MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1970

Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung an höheren Schulen

1.2. - 7.2.1970

Die Tagung "Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung" war die dritte und letzte Tagung zur Didaktik des Mathematikunterrichts an höheren Schulen des Jahres 1969. Sie wurde von den Herren Dr.Athen und Coers geleitet. Von allen Teilnehmern der Tagung wurde die Aufteilung der bisherigen traditionellen Didaktik-Tagung in drei einzelne, nach Gebieten geordnete Tagungen begrüßt, zumal dadurch eine intensivere Arbeit möglich war und einige abschließende Ergebnisse in zusammenfassenden Diskussionen erzielt werden konnten.

Teilnehmer:

B.Andelfinger, Ulm
H.Athen, Elmshorn
F.Ballier, Kaiserslautern
P.Bartel, Berlin
L.Beck, Erlangen
H.J.Burscheid, Köln
H.Coers, Dortmund
F.Denk, Altenberg üb. Nürnberg
E.Dzick, Lüneburg
R.Feuerlein, Fürth
E.Freudenthal, Reinbek
G.Fröhlich, Oberforstbach/Aachen
V.Greite, Buchholz/Nordheide
K.H.Hürten, Köln
H.Jahner, Hagen
U.Kahl, Kiel
L.Kienle, Gerlingen-Schillerhöhe
A.Koch, Berlin
W.Kroll, Sarnau üb. Marburg/Lahn
J.Lauterbach, Trier
K.H.Lempert, Darmstadt
K.Radbruch, Entringen
H.Reifenkugel, Gießen
G.Reime, Stadthagen
B.Reimers, Schleswig
R.Reinhardt, Berlin
R.Schabbon, Lübeck
H.Schimmelpfeng, Ehringshausen
J.Schmidt, Berlin
J.Schönbeck, Flensburg
K.Sielaff, Hamburg
W.Stöhr, Koblenz
H.Stute, Recklinghausen
G.Sylvester, Osnabrück
H.Wäsche, Karlsruhe
H.Walter, Frankfurt
K.Zippel, Bremen

W.KROLL: Stetigkeit im Schulunterricht mit Hilfe von Pfeildiagrammen

Die konsequente Verwendung von Pfeildiagrammen inspiriert in ganz wesentlicher Weise die im Zusammenhang mit der Einführung von Funktionen notwendigen Begriffsbildungen. Im Hinblick auf die Stetigkeit dient die Erfahrung der Unstetigkeit als Motiv für die präzise Definition. Beim Beweis des Summen und Produktsatzes wird der methodische Kunstgriff verwendet, zunächst nur den Fall $f_1 (x_o) = f_2 (x_o) = o$ zu betrachten, der in beiden Fällen nach genau dem gleichen Beweisschema (interpretiert als Zusammenbau zweier bekannter Gewinnstrategien zu einer einzigen) zu erledigen ist. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Darstellung von $f_{1,2}$ als $g_{1,2} + a_{1,2}$ mit $a_{1,2} = f_{1,2} (x_o)$ und $f_1 + f_2 = g_1 + g_2 + \underline{a_1 + a_2}$ bzw. $f_1 \cdot f_2 = g_1 g_2 + a_2 g_1 + a_1 g_2 + \underline{a_1 a_2}$.
Der Quotientensatz ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel aus der globalen Stetigkeit von $x \longrightarrow \frac{1}{x}$, die unmittelbar eingesehen werden kann.

Litaratur: Fadell Calculus with Analytic Geometry van Nostrand, Princeton 1964

H.WÄSCHE: Indirekte Beweise in der Analysis

Nach kurzer Analyse der Struktur des indirekten Beweises wurden die folgenden beiden Sätze ausführlich bewiesen:

I) f stetig differenzierbar in J_a^b. Dann gilt
f ist in J_a^b genau dann monoton steigend, wenn $\forall_{x \in J_a^b} f'(x) \geq 0$

II) f in J_a^b zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:
f ist in J_a^b genau dann nach oben konvex, wenn
gilt $\forall_{x \in J_a^b} f''(x) \geq 0$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K.H.HÜRTEN: Topologische Analysen des Stetigkeitsbegriffes

R sei ein topologischer Raum und A sei Untermenge von R, Z sei eine Zerschlagung von R. A heißt bezüglich Z in R stetig, wenn gilt:
In jeder Klasse von Z liegt höchstens ein Berührungspunkt von A.
Wählt man in der euklidischen Ebene Z als die Menge aller Parallelen zur y-Achse, so erhält man einen Stetigkeitsbegriff alter Art für die Graphen von Funktionen.
Dieser Stetigkeitsbegriff wurde mit einem Arbeitskreis von Primanern, die Mathematik studieren wollen, am Pädagogischen Institut der Stadt Köln erarbeitet. Diese Definition wurde mit anderen Definitionen verglichen, damit die Schüler lernen, die Konsequenzen mathematischer Begriffsbildungen kritisch zu durchdenken.

F.DENK: Die Begriffe Relation, Funktion, Abbildung und andere Fragen der Terminologie

Hinsichtlich der Terminologie ist die Schule in einer völlig anderen Lage als der Wissenschaftler, der z.B. in einer Originalarbeit Definitionen nach eigenem Ermessen einführen kann.
Die Schule muß bei der von ihr verwendeten Terminologie nach Einheitlichkeit, Konsequenz und Einfachheit streben. Synonyme stellen lediglich eine Belastung dar. Andererseits kann man sich heute weniger denn je eine Unschärfe und sprachliche Verschwommenheit leisten. Die Abstraktion der Begriffe aus geschickt gewählten Beispielen muß vor jedem Verbalismus stehen. Der Vortrag möchte versuchen, von Beispielen zu den oben genannten Begriffen ausgehend, Anregung zu einheitlichen Definitionen zu geben. Damit sollen auch Kritiken bestehender Lehrbücher verbunden werden.

B.ANDELFINGER: <u>Analytische Betrachtungen an Relationsmengen (Beispiele aus Unterricht und Reifeprüfung)</u>

1. <u>Verketten von Relationen</u>
   Untersuchung der jeweiligen Verkettung mit analytischen Hilfsmitteln

2. <u>Teilmengenbildung in Relationenmengen</u>
   nach algebraischen, geometrischen und analytischen Betrachtungen an den Graphen (Form, Nullstellen, Klassen, Klassenrepräsentanten).

U.KAHL: <u>Aufbau der Analysis vom topologischen Stetigkeitsbegriff her (Aufriß anhand eines Lehrversuches)</u>

Viele Methodiker schlagen heute eine Vermeidung des [illegible] Grenzwertbegriffes bei der Einführung der Differentialrechnung vor. In einem Lehrversuch wurde dies ausgeführt. Als Voraussetzung sind die genannten Definitionen der Funktion und der Intervallumgebung nötig. Die Stetigkeit wird ausgehend von stetigen und unstetigen Beispielfunktionen mit Hilfe von Intervallumgebungen definiert. Die Stetigkeitssätze schließen sich an. Im Unterricht werden dann stetig fortsetzbare Funktionen betrachtet. Als Einstieg in die Differentialrechnung wird das Problem der linearen Näherung gewählt. Die Schüler erkennen anschaulich und definieren dann eine Funktion als ableitbar, wenn die Sekantensteigungsfunktion stetig fortsetzbar ist. Der Funktionswert der stetigen Fortsetzung an der Ergänzungsstelle gibt die Ableitung. Nach der Bestimmung der Ableitung elementarer Funktionen erfolgt als Hauptsatz der Theorie der Übergang zu der Ableitungsdefinition, wie man sie bei [2] findet. Danach können die Ableitungsregeln elegant bewiesen werden [2] .

[2] PICKERT : Einführung in die Differential- und Integralrechnung

K.SIELAFF: <u>Motivierung der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit ohne Verwendung von Folgengrenzwerten</u>

Durch viele verschiedene physikalische und geometrische Beispiele werden auf natürliche Weise Funktionen bereitgestellt, die teils stetig, teils unstetig sind. Sie können dann ohne weiteres ergänzt werden durch abschnittsweise definierte Funktionen.

Beachtet man, daß z.B. bei Drehspulgalvanometern durch die Güteklasse des Gerätes ein Unsicherheitsintervall festgelegt ist, daß durch Verkleinerung des Meßbereichs verkleinert wird, so kann man hier leicht die mathematische Stetigkeit als sinnvolle Präzisierung der Erwartung interpreteiren. Funktionen wie die Postleitzahlabbildung (Menge der Punkte der BRD $\longrightarrow \mathbb{N}$) und die Telefonnummerabbildung (Menge der Telefonanschlüsse $\longrightarrow \mathbb{N}$) stellen weitere Beispiele zur Erläuterung der Stetigkeit und Unstetigkeit dar (im ersten Beipiel wähle man Kreisscheiben, im zweiten die Seiten eines Telefonbuches als Umgebungen).
Zur Vorbereitung der Differenzierbarkeit wird zunächst eine geometrische Charakterisierung der Tangente erarbeitet: Die Gerade t heißt genau dann Tangene an eine Kurve k im Punkte P, wenn es zu jedem noch so engen Sektor $S_{p,t}$ um t eine geeignete Umgebung U von P gibt derart, daß $k \cap U \subseteq S$ gilt, Als analytisches Äquivalent dazu ergibt sich die lineare Näherung einer Funktion.

W.KROLL: <u>Eine anschauliche Motivation für die Einführung des Differenzierbarkeitsbegriffes als lineare Approximation</u>

Das besondere Verhalten von $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) untersucht an seinem Graph an der Stelle 0 wirft die Frage nach einer präzisen Fassung des "Berührens" auf. Die Analyse führt zu der Definition: Der Graph einer Funktion f berührt die X-Achse bei 0, wenn sich f als Produkt aus der identischen Funktion und einer an der Stelle 0 stetigen Funktion vom Werte 0 (Epsilonfunktion) darstellen läßt. Die geometrische Intergretation ("zu jedem Sektor, begrenzt durch die Geraden $g_{1,2} = (x \longrightarrow \pm \varepsilon x)$ mit $\varepsilon > o$, gibt es eine Umgebung von 0, innerhalb das f ganz im Sektor liegt") weist das so definierte Berühren als einen speziellen Fall der linearen Approximation aus. Die Summenbildung aus berührender und linearer Funktion (Superposition) motiviert die Definition der Tangente zunächt bei 0, und schließlich nach Verschiebung um x_o parallel zur X-Achse allgemein.
Existiert in einer Umgebung von 0 für f $(x+x_o)$ eine Darstellung f (x_o) + mx + x $\cdot$ e (x) mit einer Epsilonfunktion e, so hat f bei x_o eine Tangente mit der Steigerung m, die eindeutig bestimmt ist, falls $x_o \in \overline{D}_f$.
Da $x \cdot e(x)$ stärker als linear verschwindet, ist die Tangente die beste lineare Approximation von f bzgl. x_o.

H.REIFENKUGEL: Lebesguesches Maß im Schulunterricht

Im ersten Teil des Vortrages wird das Lebesguesche Maß für eine möglichst umfangreiche Klasse linearer Mengen eingeführt. Unter dem Lebesgueschen Maß des offenen Intervalls a,b versteht man die nichtnegative Zahl b-a. Da jede offene lineare Menge A als Vereinigung von höchstens abzählbar unendlich vielen disjunkten offenen Intervallen I_i (bis auf die Reihenfolgen der I_i) eindeutig darstellbar ist, erklärt man das Lebesguesche Maß $|A|$ von A durch $|A| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i|$. Dieses Maß ist nichtnegativ und abzählbar additiv, d.h. das Maß der Vereinigung einer abzählbaren Menge disjunkter Mengen ist gleich der Summen ihrer Maße.
Das Ziel des Vortrages ist eine Erweiterung des Maßbegriffes auf eine noch größere Klasse linearer Mengen, auf die sog. Klasse der meßbaren Mengen. Das neue Maß ist ebenfalls nicht-negativ, abzählbar additiv und fällt für offene lineare Mengen mit dem oben erklärten Maß zusammen.
Im zweiten Teil des Vortrages wird eine recht umfangreiche Klasse reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen, die sog. Klasse der meßbaren Funktionen, die in der Lebesgueschen Integraltheorie eine fundamentale Rolle spielt, untersucht.
Literatur: HARTMANN-MIKUSINSKI The Theory of Lebesgue Measure and Integration

J.SCHMIDT: Berechnung von Integralen durch Grenzwerte

Die Definition des Riemannschen Integrals als Supremum der Menge der Untersummen bzw. als Infimum der Menge der Obersummen ermöglicht im allgemeinen leider noch keine praktische Berechnung. Zu einer Berechnung eines Integrals benutzt man (neben dem Hauptsatz der Integralrechnung für stetige Funktionen) den Satz von Darboux. Man wählt eine Folge von Einteilungen des Definitionsintervalls, die die Eigenschaft besitzt, daß jede Einteilung Verfeinerung der vorangehenden ist, und daß die maximalen Längen der Teilintervalle einer Einteilung eine Nullfolge bilden. Die zugehörige Folge von Untersummen bzw. Obersummen liefert dann das fragliche Integral.
Merkwürdigerweise verwendet man bei der Berechnung der Integrale der elementaren Funktionen durch Grenzwerte zwei Einteilungsfolgen, bei der die erste Eigenschaft

nicht erfüllt ist, nämlich die "äquidistante" Einteilungsfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie die "geometrische" Einteilungsfolge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für ein Intervall $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ durch

$$A_n = \left\{ \left(1-\frac{k}{n}\right) a + \frac{k}{n} b \;\middle|\; k = 0,1,\ldots,n \right\}$$

$$G_n = \left\{ a^{\frac{n-k}{n}} b^{\frac{k}{n}} \;\middle|\; k = 0,1,\ldots,n \right\}$$

definiert sind.

Trotzdem sind die zugehörigen Folgen der Unter- bzw. Obersummen bei den elementaren [illegible] Funktionen konvergent, ja sogar monoton wachsend bzw. fallend.

Diese Tatsache wird durch den folgenden allgemeinen Satz theoretisch untermauert:

Satz: Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine eine monoton wachsende oder fallende und konvexe oder konkave Funktion.
Dann ist die Folge der Untersummen bezüglich der Einteilungsfolge $(A_n)\ n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend.

K.SIELAFF: <u>Kurzreferat</u>

Als Beispiel für eine endliche Gruppe von rationalen Funktionen bezügl. Verkettung wird die Menge

$$\left\{ id,\ x \to \frac{2x-4}{x+4},\ x \to \frac{-4}{x+2},\ x \to -\frac{x+4}{x+1},\ x \to -2-\frac{4}{x},\right.$$
$$x \to \frac{4x+4}{-x+2},\ x \to -x-2,\ x \to -\frac{4x+4}{x+4},\ x \to \frac{-2x}{x+2},$$
$$\left. x \to \frac{-x+2}{x+1},\ x \to \frac{4}{x},\ x \to \frac{2x+8}{x-2} \right\}$$

vorgestellt.

Es ist besonders reizvoll, die Graphen dieser 12 Funktionen bezügl. desselben Koordinatensystems aufzutragen weil sich dann eine Figur ergibt, welche die SYmmetrie des Quadrat-Dieders besitzt. Die Gruppe selbst ist isomorph zur Diedergruppe des regelmäßigen Sechsecks. Die Gruppeneigenschaften lassen sich an der geometrischen Figur interpretieren.

Die hier angedeutete Untersuchung bietet folgenden Vorteil:

Die Isomorphie dieser Gruppe mit $\mathcal{D}_6$ ist nichttrivial. Funktionen werden deutlich als Objekt, nämlich Elemente einer Gruppe erkannt.

Beispiele für ähnliche Gruppen von Funktionen lassen sich leicht angeben.

H.JAHNER: Ein Vergleich über die verschiedenen Möglichkeiten zur Einführung in die Integralrechnung

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Einführung in die Integralrechnung sollen miteinander verglichen werden, insbesondere sollen das Lebes - guesche-Integral (in der Form bei GRAUERT-LIEB) und die Integraldefinition mit Hilfe der gleichmäßigen Approximation von Treppenfunktionen in Beziehung zum Riemann-Integral gesetzt werden.

G.SYLVESTER: Fragen zum Sinn und Inhalt des Analysisunterrichts im sprachlichen Gymnasium

Analysis aus Gewohnheit ? - Kann Mathematikunterricht ohne Analysis im sprachlichen Gymnasium sinnvoll sein ? -
Welche Stoffe der Mathematik können für das sprachliche Gymnasium interessant werden ? - Verzicht auf Systematik und Strenge ?
Die Rolle und Form der mathematischen Information im Unterricht - Anleitung zum(begrenzten) Selbststudium ?

A.KOCH: Motive und Hinweise zu einem genetischen Aufbau der Analysis

1. Erfahrungsbasis (Der Weg wurde seit 1960 im Unterricht begangen)
2. Motive für die Suche nach dem genetischen Weg: "Durststrecke", "Häufung der Schwierigkeiten", "Motivation für die Schüler", "Exaktheit soll von den Schülern als Notwendigkeit zur Problemlösung erkannt werden.
3. Kennzeichnen des Weges: Breite geometrisch-experimentelle Propädentik mit Vorbereitung der Beweistechniken der Präzisierung an Fehlerab - schätzungen. Präzisierung der Ableitung (stetige Fortsetzung der Sekantensteigungsfunktion). Funktionsgrenzwert.

Das Scheitern der naiven Vorstellung am Inhaltsproblem. Der Versuch der Präzisierung führt auf das Problem der Vollständigkeit. Konstruktion von $\mathbb{R}$ mit Dedekindschen Schnitten.

H.JAHNER: Bericht über eine AG Topologie

Ziel der Unterrichtsreihe war es, den Satz über die Annahme der Grenzen bei stetigen Funktionen und damit auch den Zwischenwertsatz auf rein topologischem Wege herzuleiten.
Der topologische Raum läßt sich m.E. am besten mit Hilfe der Kuratowskischen Hüllenyxiome einführen (Was heißt der Rand einer Punktmenge ?).
Am Beispiel einer "Rundungstopologie" lassen sich viele Sätze erläutern.
Nach den Definitionen der abg. Menge und des Randes kann man beweisen:
a) $A \subset B \Rightarrow \hat{A} \subset \hat{B}$, b) $\widehat{A \cap B} \subset \hat{A} \cap \hat{B}$. Nun wurden offene Mengen und Umgebungen eines Punktes definiert und gezeigt, daß bei Komplementbildung offene in abg. Mengen übergehen und umgekehrt.
Die Umgebungssysteme sind mit den berandeten Mengen verträglich, d.h. $A \subset M$, $x \in \hat{A} \Rightarrow \bigwedge_{U \in \mathfrak{U}(x)} U \cap A = \phi$ Es werden nun die Begriffe Filter, Berührungspunkt und Konvergenzpunkt von Filtern eingeführt (Analyse bekannter Konvergenzsachverhalte). Es gilt: Sei f ein Filter; x ein BP von f; dann gibt es einen feineren Filter, der gegen x konvergiert. Nach der Definition der Stetigkeit (Abb. konvergenter Filter in einer konvergenten Filterbasis) und der kompakteren Räume läßt sich nun der Hauptsatz beweisen:
Sei M kompakt, f stetig; dann ist f (M) kompakt.
Beweis nach der sog. f g f $^{-1}$ - Methode:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \in \mathfrak{P}(f(M)) \arrow[d, "f^{-1}"'] & & f(\mathfrak{G}) \text{ konvergiert gegen } f(x) \arrow[ll, dashed, "\text{feiner als}"'] \\
f^{-1}(\mathfrak{F}) \text{ ist Filter} \arrow[r, "\text{Kompakt}", "\text{BP } x"'] & \mathfrak{G} \text{ konvergiert gegen } x \arrow[ur, "f \text{ stetig}"'] &
\end{tikzcd}$$

H.COERS: Gliederung des Vortrages (Rückblick auf Analysis-Vorträge)

1. Tendenzen der Vorträge

2. Konsequenzen, die durch die Vorträge nahegelegt werden

3. Offene Fragen

Untergliederung zu 1)

a) Orientierung an Stoffen oder Methoden der Hochschulen, insbesondere der Universitäten.
Lebesguesches Maß, Modernisierung der Integralbegriffe, Topologie und Analysis
(Zusätzlich: Klärung des schulischen Arbeitens mit dem R-Integral)

b) Methodische Zubereitung von Anregungen aus dem Hochschulbereich

Stetigkeit und Umgebungsbegriff
Stetige Fortsetzung
Differenzierbarkeit als lineare Approximierbarkeit

c) Wechselbeziehungen zwischen Analysis und Strukturbetrachtungen

d) Logische Analyse als Mittel zur Klärung von Beweisen (indirekten Beweisen) der Analysis

e) Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis.
Bedeutung von Motivation und Exaktheit.
Beziehung zwischen Motivation und Exaktheit

f) Probleme der Terminologie

g) Verfremdung und Variation von Begriffen
Axiomatisieren

Beherrschend sind stoffliche und begriffliche Erläuterungen. Es fehlen Anregungen an Nachbardisziplinen, die historisch so viel für die Entwicklung der Analysis bedeutet haben.

Literatur:

1) Papy Lepremier enseigement de l'analyse Braxelles

2) Pickert Einführung in die Differential- und Integralberechnung
Klett - Stuttgart

3) Kristensen-Rindung Mathematik I, II, III Kopenhagen

4) Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen Klett 69

L.KIENLE: Analytisches über die Bewertung physikalischer Größen

1. Zur bisherigen Entwicklung des mathematischen Gymnasialunterrichts.

   Sein Interesse dient heute vorzugsweise Grundlagen- und Strukturfragen.

2. Problematik.

   Hier geht es um das Zuordnen von Maßzahlen [illegible] zu physikalischen Größen

3. Bridgman-Relation.

   Bridgman ging von der Konstanz des Maßzahlverhältnisses bei Ändern der Einheit aus. Görtler leitet sie her.

4. Topologische Forderungen.

   Die Menge der möglichen Bewertungen einer physikalischen Größenart ist gleichmächtig der Menge der monoton steigenden Funktionen

5. Metrische Konventionen.

   Drei Konventionen machen aus einer topologischen Skala eine Maßzahlskala. Nach der ersten werden "Merkmalunterschiede" durch Maßzahlunterschiede erklärt und wie diese geordnet.

6. Beweis des Satzes, daß eine Maßzahlskala nur durch eine lineare Transformation wieder in eine Maßzahlskala übergeführt wird.

7. Grundgrößenarten und abgeleitete Größenarten.

8. Funktionsgleichungen der Definitionsfunktionen.

9. Definitionsfunktionen sind Monome der Argumentmaßzahlen.

10. Fundamentaldarstellung der Definitionsfunktionen.

    Die Maßzahl einer jeden abgeleiteten Größe kann als Monom der Maßzahlen von Grundgrößen dargestellt werden.

11. Grundeinheiteninvariante Maßzahlengleichungen. Funktionalgleichung und Form.

12. Schlußbemerkung.

    Man kann gewisse Grundlagen-, Strukturfragen und dergl. schon auf elementarem Niveau mit physikalischen Vorstellungen verbinden.

K.H.LEMPERT: Kurzbericht über den Mathematikunterricht an einer Ingenieurschule für Maschinenwesen für die Fachrichtung Elektrotechnik

Nach kurzer Charakterisierung des Adressatenkreises und Abgrenzung der stofflichen Voraussetzungen wird eine Stoffgliederung (für den sich über drei Halbjahre erstreckenden Matehmatikunterricht) mit Hinweisen über die unterricht - liche Darbietung und ein Stoffablaufplan angegeben.
Abschließend werden einige Bemerkungen darüber gemacht, was stofflich und unterrichtlich noch wünschenswert wäre.

P.BARTEL: Wahrscheinlichkeitsrechnung unter strukturellem Aspekt Erfahrungen mit einer Klasse 12

Ausgehend vom naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff als Verhältniszahl, der als Motivation dafür bemüht wird, Mengenalgebra zu treiben, gelangt man durch Abstraktion zu den Strukturen:
1. Boolesche Algebra
2. Maßstruktur

Dies ermöglicht den Beweis von Sätzen über unabhängige Ereignisse und den Nachweis, daß es sich bei der sog. bedingten Wahrscheinlichkeit

$$w': \mathfrak{P}(U) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{mit} \quad w'(A) = \frac{w(A \wedge B)}{w(B)} \underset{\text{def}}{=} w'(A|B)$$

ebenfalls um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt.

U bezeichnet die Menge der Merkmale der Elementarereignisse

B.REIMERS: Boolesche Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bericht über einen Unterrichtsversuch in einer Oberprima. Der Kurs ist folgendermaßen aufgebaut: Die Axiome und einige Folgerungen für die Boolesche Algebra werden aufgestellt und mehrere Modelle behandelt. Auf diesen Modellen definierte Maßfunktionen führen auf das Axiomensystem von Kolmogoroff. Die anschließende Deduktion bringt Modelle von Wahrscheinlichkeitsfeldern.

Literatur: 1) Rueff/Jeger: Menge, Boolescher Verband und Maß
2) Kemeny, Mirrl, Thompson: Finite Mathematical Structures
3) Reimers: Boolescher Verband und Wahrscheinlichkeitsrechnung MNV Jahrgang 22 (1969) Heft 1

R.SCHABBON: Propädentische Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Rahmen und als Anwendung der Bruchrechnung in Quinta

1. Kleiner Überblick über die Entwicklung
2. Voraussetzungen aus Mengenlehre und Bruchrechnen
3. **Die zum Ziel gesetzten Begriffe:** Ergebnismenge, Häufigkeiten und rel. Häufigkeiten bei Ergebnissen,
   Wahrscheinlichkeit bei Ergebnissen,
   Ereignisse und Häufigkeiten bei Ereignissen,
   Additionssatz bei Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen,
   Additionssatz bei Wahrscheinlichkeiten von unabhängigen Ereignissen,
   Beispiele für die Ungültigkeit des Additionssatzes
4. **Die methodischen Schritte mit einigen exemplarisch ausgewählten Beispielen von Würfel, Münze, Urne.**

H.ATHEN: Statistisches Testverfahren

Nach einer kurzen Erklärung von Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsfunktionen und damit zusammenhängenden speziellen Begriffen wird das T e s t e n von H y p o t h e s e n zunächst anhand eines einfachen Beispiels mit Hilfe der Binomialverteilung, sodann allgemein mit Hilfe der Normalverteilung dargelegt. Auch Begriffe wie "Gegenhypothese", "Risiko 1. und 2. Art", "Trennschärfekurve" u.a. werden behandelt. Mit einem kurzen Ausblick auf Konfidenzintervalle und auf das "Ausreißer"-Problem wird das Referat abgeschlossen.

ZUSAMMENFASSUNG: Analysis

Folgende Punkte wurden diskutiert:

Ist die Analysis notwendig, um bei den Schülern eine Aufgeschlossenheit für die Mathematik(unterricht) zu erreichen. oder'läßt sich die Analysis durch andere Gebiete ersetzen, die relativ voraussetzungsfrei sind. um an ihnen die Probleme des Mathematisierens kennenzulernen. Z.B. die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

2) Wie soll ein Lehrbuch geschrieben sein ?
Mögliche Formen: a) Lesebuch für den Schüler, b) Aufgabensammlung
Vorschläge für Neuerungen:
1. Lose-Blatt-Sammlungen. um Verbesserungen mühelos nachträglich vornehmen zu können. 2. Beihefte zu den jetzigen Lehrbüchern mit ausgewählten Themen aus der modernen Mathematik.
3) Einrichtung einer Schülerbibliothek.
Im didaktischen Zentrum in Karlsruhe wird zur Zeit untersucht, wie eine solche Bibliothek aufgebaut werden soll.

ZUSAMMENFASSUNG: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

In einer Zusammenfassung stellte der Diskussionsleiter Herr Dr. Athen zunächst fest:
Die Stochastik bietet Gelegenheit zu systematischem Aufbau ohne zu große Voraussetzungen zu erfordern. Die Behandlung dieses Stoffes im Unterricht wird auch durch die starken Beziüge zur Praxis nahegelegt. Die methodischen und didaktischen Erfahrungen der letzten Jahre scheinen zu bestätigen, daß eine Einschmelzung in den Schulunterricht möglich ist. Das soll in verschiedenen Niveaus geschehen. Wichtig ist dabei eine entsprechende Propädeutik.
Einen Eingliederungsvorschlag mit Stoffplan gibt Engel in MU Okt. 66, zu überlegen ist, inwieweit Maßtheorie und die Theorie der Booleschen Verbände mit hineingenommen werden soll. Problematische bleibt die Definition der Wahrscheinlichkeit, die wohl axiomatisch erfolgen müßte. Wichtig ist, daß im Unterricht der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik klar herausgestellt wird. Zum Thema Statistik liegen noch wenige Erfahrungen vor. Der Zeitbedarf dürfte für die Gebiete Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik etwa 16 bis 2o Wochen betragen. Es bleibt offen, welche Unterschiede in sprachlichen und naturwissenschaftlichen Zweigen zu machen sind.

Anschließend wurde über folgende, vom Diskussionsleiter vorgeschlagenen Punkte diskutiert:

1. Grundlegung der Statistik
2. Rolle von Statistik, Spieltheorie, Kybernetik, Informationstheorie etc.
3. Propädeutik
4. Lehrplanfragen
5. Sonstiges

Zu 1) Es wurde die Frage nach der Brauchbarkeit des v. Mises'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs gestellt. Weitgehend war man der Meinung, daß für die Schule der axiomatische Aufbau von Kolgomoroff brauchbarer sei, der sich auch weitgehend durchgesetzt habe. Dabei sollte aber immer bedacht werden, daß es sich um einen möglichen Ansatz handelt. Die Diskussion klärte, daß Wahrscheinlichkeitsrechnung schon vor 1945 in Höheren Schulen betrieben wurde; der damalige Ansatz ist aber in der Intention vom heutigen völlig verschieden.

Zu 2) Hier liegt ein weites Experimentierfeld, auf dem Erfahrungen noch weitgehend fehlen. Es bestand Einigkeit, daß diese Dinge prinzipiell gebraucht werden können.

Zu 3) Der O.a. Stoffplan von Engel scheint brauchbar und beruht auf Erfahrung. Bedenken bestanden gegen die lange Dauer der Versuche in der Unterstufe. Dazu wurde festgestellt, daß Engel durch Anlage eines Schülerheftes mit experimentell gewonnenen Tabellen erheblich"rationalisiert", so daß der Zeitaufwand erträglich wird, weil die Tabellen öfter verwendet werden können.

Zu 4) Es wurde festgestellt: Die hier ausstehenden Fragen sind in Engels Vorschlag alle behandelt und scheinen im Prinzip kaum besser lösbar. Einfache Markoff-Ketten können schon in der Mittelstufe behandelt werden. Es wäre zu überlegen, ob die Analysis z.T. vorgezogen werden könnte, um Raum für die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu gewinnen, eventuell auch auf Kosten der Analytischen Geometrie und (soweit noch im Lehrplan) der sphär. Geometrie.

Es wurde daruaf verwiesen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung vieles aus aus anderen Stoffgebieten in neuer Form erhält.
Wichtig bleibt aber auch hier, daß Grundbegriffe sichtbar gemacht werden; die Anwendungen sind sekundär.

Zu 5) Als Literatur zum Thema Stochastik wurden genannt:

Die Bücher von Kreyszig
Ineichen
Sachs
Smirnow
Wallis
Goldberg
Freudenthal
Athen

J. Schmidt (Berlin)