Tagungsbericht 4 | 1970

Mathematische Logik

8.2. bis 14.2.1970

Die Tagung fand im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft mathematische Logik statt und stand unter der Leitung von Herrn E.-J. Thiele. Wie auf der Tagung im Herbst 1969 in Hannover war unser Ziel, uns mit neueren Ergebnissen der mathematischen Grundlagenforschung vertraut zu machen. Wir beschäftigten uns mit dem Axiom der Determiniertheit, mit normalen Ultrafiltern und mit Logiken über zulässigen Mengen, wobei der letztere Themenkreis den größeren Teil der Tagung einnahm.

Teilnehmer

Axt,P., Sorbonne
Barendregt,J., Utrecht
Ebbinghaus,H.-D., Freiburg
Flum,J., Freiburg
Gloede,K., Heidelberg
Görnemann,S., Hannover
Hasenjaeger,G., Bonn
Heine,J., Hannover
Jung,J., Mannheim
Klaas, Heidelberg
Koppelberg,B., Bonn
Müller,G.H., Heidelberg
Niefnecker, Heidelberg
Oberschelp,A., Kiel
Podewski,K.-P., Hannover
Potthoff,K., Kiel
Prestel,A., Bonn
Rutsch, Heidelberg
Schwabhäuser,W., Bonn
Schwichtenberg,H., Münster
Siefkes,D., Heidelberg
Thiele,E.-J., Hannover

Vortragsauszüge

A. Oberschelp: Bericht über das Axiom der Determiniertheit

Sei P eine Menge von Folgen natürlicher Zahlen und G(P) das folgende Spiel: Spieler I und II wählen (mit gewissen Strategien σ, φ) abwechselnd Elemente von ω, wobei I beginnt. Sie erzeugen so eine Folge $\sigma * \varphi$ natürlicher Zahlen. Spieler I gewinnt, wenn $\sigma * \varphi \in P$, sonst gewinnt Spieler II. P ist determiniert, wenn $\exists\sigma\forall\varphi(\sigma * \varphi \in P) \vee \exists\varphi\forall\sigma(\sigma * \varphi \notin P)$. Das Axiom der Determiniertheit ist: "Alle Mengen P sind determiniert". Dieses Axiom widerspricht dem Auswahlaxiom. Deshalb werden Abschwächungen betrachtet, etwa: Jede projektive Menge ist determiniert. Dieses widerspricht V=L, ist aber vermutlich mit dem Auswahlaxiom verträglich. Das Axiom der projektiven Determiniertheit klärt völlig Reduktions- und Separationsfragen in der projektiven Hierachie. Es gilt:

$$\vdash_{ZFC} PD \longrightarrow Red(\Sigma^1_{2n}) \wedge Red(\Pi^1_{2n+1})$$

B. Koppelberg: Bericht über normale Ultrafilter

Nach einführender Behandlung normaler Ultrafilter wurde eines der Hauptresultate aus der Dissertation von K. Kunen gezeigt, wonach in relativ zu einem normalen Ultrafilter konstruktiblen Modellen genau ein normaler Ultrafilter existiert. Dabei wurden die von K. Kunen angegebenen zum Teil allgemeinen Methoden dem hier angestrebten Ergebnis angepaßt. So wurden die von K. Kunen beschriebenen iterierten Ultrapotenzen von Modellen der Mengenlehre nur für den Fall betrachtet, daß die herangezogenen Filter zu den Modellen selbst gehören. Abschließend wurden weitere Ergebnisse über normale Ultrafilter aus der Dissertation von K. Kunen mitgeteilt.

J. Heine: Zulässige Mengen

(Nach Barweis: Infinitary Logic and admissible sets, JSL 34,2 1969)

Eine nichtleere Menge A heißt zulässig, falls A abgeschlossen gegenüber der Bildung der transitiven Hülle TC(x) eines jeden Elementes x von

A ist und die Generalisierten der folgenden Ausdrücke wahr in A sind:

(a) $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in z \wedge R)$ für alle Δ_0-Ausdrücke R mit x nicht frei in R.

(b) $R \rightarrow \exists w($ transitiv $w \wedge R^{(w)})$ für alle Σ-Ausdrücke R mit w nicht frei in R.

Besonders stark ist die Bedingung (b), mit deren Hilfe eine Reihe von Eigenschaften von zulässigen Mengen nachgewiesen wurden.

S. Görnemann: Der Vollständigkeitssatz für L_{HC}

Ist A eine zulässige Menge, dann läßt sich eine Sprache L_A so definieren, daß alle verwendeten Zeichen sowie auch Formeln von L_A und Sequenzen von L_A-Formeln Elemente von A sind. Ferner kann man einen Ableitungsbegriff angeben, bei dem eine "Derivation" für eine A-Sequenz wieder ein Element von A ist. Der wesentliche Unterschied dieser Sprache zur üblichen Sprache der Prädikatenlogik ist, daß für eine Menge Φ von A-Formeln auch die Konjunktion über alle Elemente von Φ eine A-Formel ist, falls Φ ein Element von A ist. Eine Semantik für A-Formeln ergibt sich in naheliegender Weise.

Jede ableitbare A-Formel ist allgemeingültig. Der Vollständigkeitssatz von Lopez-Escobar besagt, daß für A=HC auch die Umkehrung gilt: Jede allgemeingültige HC-Formel hat eine Derivation in HC.

E.-J. Thiele: Logik auf zulässigen Mengen.

Im allgemeinem lassen sich Vollständigkeits- und Endlichkeitssätze nicht auf unendliche Sprachen übertragen. Betrachtet man jedoch die Sprachen L_A, wobei A eine abzählbare zulässige Menge ist, dann lassen sich analoge Sätze nachweisen.

Sei $\Phi \subset L_A$ eine Σ_1 Satzmenge über A und sei φ ein Satz aus L_A, dann gilt:

1. Ist φ eine Folgerung von Φ, dann existiert innerhalb von A eine Ableitung von φ relativ zu Φ.

2. Ist φ eine Folgerung von Φ, dann gibt es bereits ein $\Phi_0 \subset \Phi$, $\Phi_0 \in A$, und φ ist eine Folgerung von Φ_0.

3. Falls jede Teilmenge $\Phi_0 \in A$ von Φ ein Modell besitzt, so auch Φ.

K.-P.Podewski: Die Hanfzahl von L_A

Die Hanfzahl gibt Auskunft über die Fähigkeit einer Logik etwas über die Mächtigkeit von Strukturen auszusagen. Sie ist definiert als die kleinste Kardinalzahl λ mit folgender Eigenschaft:

Ist φ ein Satz aus L und besitzt φ ein Modell der Mächtigkeit λ, dann besitzt φ ein Modell in jeder größeren Mächtigkeit.

Sei A eine abzählbare zulässige Menge und sei O(A) die kleinste Ordinalzahl, die nicht aus A ist, dann ist die Hanfzahl von L_A gleich $\beth_{O(A)}$.
(Nach J. Barwise: Infinitary Logic and admissible sets, 1967, Stanford University)

K.-P. Podewski, Hannover