MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 5|1970

Spezielle Funktionen

15. 2. bis 21. 2. 1970

Unter der Leitung der Herren C. Meyer und F. W. Schäfke (Köln) fand in der Woche vom 15.2. bis 21.2.1970 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zum zweiten Male die Fachtagung über "Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie" statt. Die - in diesem Rahmen erstmals im vergangenen Jahr durchgeführte - Tagung fand wieder ein erfreuliches Interesse. Es haben 32 Mathematiker- davon 7 aus dem Auslande - teilgenommen. Es wurden 21 teils ausführliche Vorträge gehalten. (13 aus dem Gebiet der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und 8 aus dem der Zahlentheorie). Die Themen aus dem Gebiet der speziellen Funktionen der mathematischen Physik betrafen u. a. den Aufbau der Theorie der höheren speziellen Funktionen, neue Theorien über Integraltransformationen, Funktionalgleichungen und Fragen derApproximationstheorie. An arithmetisch-analytischen Themen wurden u. a. behandelt : Eine Verallgemeinerung der Poissonschen Summenformel und deren Anwendung in der analytischen Zahlentheorie; singuläre Werte von Modulfunktionen höherer Stufe und die durch sie erzeugten Klassenkörper; Pseudo-Zufallszahlen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen; p-adische Nullstellen rationaler Polynome.

Teilnehmer :

Askey, R., z. Zt. Amsterdam	Forst, W., Konstanz
Bodendiek, R., Köln	Halbritter, U., Köln
Braaksma, B.L., Delft	Kairies, H.H., Braunschweig
Dieter, U., Karlsruhe	Kann, K.H., Köln
Endl, K., Giessen	Lang, H., Köln
Flor, P., Wien	Lemeij, J., Delft

Mauve, R., Köln
Meixner, J., Aachen
Mennicken, R., Konstanz
Meulenbeld, B., Delft
Meyer, C., Köln
Neuhaus, W., Clausthal-Zellerfeld
Niessen, H.D., Konstanz
Pohst, M., Köln
Sattler, A., Köln
Schäfke, F.W., Köln
Schertz, R., Köln
Schmidt, D., Köln
Schneider, A., Köln
Schoeneberg, B., Hamburg
Schönhage, A., Köln
Sleeman, B.D., Dundee
Snoo, H.S.V., Delft
Wegener, H., Köln
Wolf, G., Köln
Ziegler, M., Clausthal-Zellerfeld

Vortragsauszüge :

MEIXNER, J. : Einige Bemerkungen über Sphäroid-Funktionen

Es wird zunächst über eine Verallgemeinerung und einen einfachen Beweis einer von D.R. Rhodes (J. Math. and Phys. 44, 52–65, 1965) gefundene Identität für Sphäroid-Funktionen berichtet. Weiter wird kurz eine Verallgemeinerung der Sphäroid-Funktionen erwähnt, die aus der Separation der verallgemeinerten 3-dimensionalen Schwingungsgleichung $\Delta u + (\varkappa^2 + \frac{a}{z^2})u = 0$ folgt. (D. Leitner und J. Meixner, Archiv d. Math. 11, 29-39, 1960). Schliesslich wird ein Variationsproblem angegeben, welches auf Sphäroid-Funktionen führt.

SCHMIDT, D. : Zur Differentialgleichung der Ellipsoidfunktionen

Es wird die bei der Separation der Schwingungsgleichung $\Delta w + \varkappa^2 w = 0$ in allgemeinen elliptischen Koordinaten auftretende Dgl. der Ellipsoid-funktionen

$$y''(z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-k^{-2}}\right)y'(z) + \frac{p_o + p_1 k^2 z + p_2 k^4 z^2}{z(z-1)(k^2 z - 1)}\, y(z) = 0$$

mit $0 < k < 1$, $p_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2$ und den Separationsparametern p_o, p_1 für komplexe z betrachtet. Ziel der Untersuchungen ist die vollständige

Beherrschung des Transformationsverhaltens der Lösungen der Dgl. bei beliebiger analytischer Fortsetzung im Regularitätsgebiet $\mathbb{C} - \{0, 1, k^{-2}\}$ in Abhängigkeit von den Parametern $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{C}$. Dieses wird durch Gewinnung einer geeigneten Darstellung der die Floquetschen Fundamentalsysteme zu den singulären Stellen 0, 1 und k^{-2} verknüpfenden "Zusammenhangsmatrizen" erreicht. Die bewiesene Darstellung gestattet insbesondere die Berechnung der jeweiligen Zusammenhangsmatrizen mittels 4-gliedriger Rekursionen.

SLEEMAN, B.D. : High Frequency Approximations to Ellipsoidal Wave Functions

The ellipsoidal wave equation is the ordinary differential equation which arises when the reduced wave equation $\Delta v + \chi^2 v = 0$ is separated in ellipsoidal coordinates; doubly-periodic solutions of this equation are known as ellipsoidal wave functions.
Approximations to the latter, in the form of asymptotic series valid for χ^2 large positive or large negative were given by Malurkar but his analysis was incomplete in that the values of two integral parameters were left undetermined.
In the present paper, this gap is filled, the complete results recalculated and the connections established between the asymptotic series and the stadard solutions in various parts of the plane.

ASKEY, R.A. : Orthogonal Polynomials and Positivity

If $p_n(x)$ is a sequence of orthogonal polynomials then there are often interesting functions in the cone $\sum_{n=o}^{\infty} a_n p_n(x)$, $a_n \geq 0$. We will give a number of theorems of this type and some applications. One application is to give a new proof of Szegös theorem that

$$\frac{1}{(1-r)(1-s)+(1-s)(1-t)+(1-t)(1-r)} = \sum_{n,m,l} \sqrt[A_{n,m,l}]{r^n s^m t^l} , \quad A_{n,m,l} \geq 0 .$$

A second application is the construction of some new Banach algebras.

NIESSEN, H.-D. : Singuläre S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme

In Verallgemeinerung der von Weyl, Stone, Titchmarsh, Kodaira u.a. behandelten singulären selbstadjungierten Eigenwertproblemen bei Differentialgleichungen 2. bzw. gerader Ordnung werden beliebige komplexe S-hermitesche Differentialgleichungssysteme auf nicht notwendig kompaktem Intervall untersucht. (Zur Definition S-hermitescher Systeme vgl. Schäfke u. Schneider, Math. Ann. 162 , 9-26; 165, 236-260; 177, 67-94; zum reell-singulären Fall vgl. A. Schneider, M.Z. 107, 271-296; 109, 153-168).
Es wird eine Charakterisierung und eine vollständige Aufzählung aller möglichen S-hermiteschen Randbedingungen gegeben. Diese dürfen linear vom Eigenwertparameter abhängen. Ferner ergibt sich ein (direkter) Entwicklungssatz der Form

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_\lambda (x) d_\lambda \left(f, \int_0^\lambda Y_\mu \, dP(\mu)\right),$$

wobei Y_λ eine Fundamentalmatrix zum vorgelegten Differentialgleichungssystem ist. Das Integral konvergiert auf Kompakta gleichmässig.

BRAAKSMA, B.L.J. : Asymptotic Analysis of a Differential Equation of Turrittin

Fundamental systems of solutions for the differential equation $\frac{d^n}{dx^n} y = x^\nu y$ are given by means of integrals $\int_C \varphi(s) x^{ms} ds$, $m = n+\nu$. The behaviour as $x \to 0$ and $x \to \infty$ is deduced. For $x \to \infty$ this behaviour is found using the fundamental system $\tilde{y}(x \exp(\frac{2\pi ik}{m}))$ $(k=0,\dots,n-1)$

where $\tilde{y}(x) = \int\limits_{C} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{m} - s\right) m^{-ns} e^{-n\pi i s} x^{ms}\, ds$, C a contour enclosing the positive s-axis. From the behaviour of the product of gamma-functions in the entire s-plane the behaviour of $\tilde{y}(x)$ as $x \to \infty$ on $-\pi + \varepsilon < \arg x^m < (n+1)\pi - \varepsilon$ is derived. Other fundamental systems characterized by the asymptotic behaviour as $x \to \infty$ on a sector with opening $(n+1)\pi$ can be deduced.

SNOO de H.S.V. : On Integraltransforms related to a class of linear second order differential equations on a half line

We consider the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\lambda^2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x)\right) y = 0$, $0 < x < \infty$, where $q(x)$ is a continous, complex valued function of class $L_1(0, \infty)$ and $-\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} \nu \leqq \frac{1}{2}$. Of this equation we construct two solutions $y_1(x, \lambda)$ and $y_2(x, \lambda)$, which satisfy :

$$\left.\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &\sim e^{-\lambda x} \\ y_1'(x,\lambda) &\sim -\lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{as } x \to \infty \\ &\text{on } \operatorname{Re}\lambda \geqq 0 \\ &\qquad \lambda \neq 0 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} y_2(x,\lambda) &\sim x^{\nu+\frac{1}{2}} \\ y_2'(x,\lambda) &\sim (\nu+\tfrac{1}{2}) x^{\nu-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{as } x \searrow 0 \\ &\text{on } \operatorname{Re}\lambda \geq 0 \\ &\qquad \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Denoting the Wronskian of $y_1(x,\lambda)$ and $y_2(x,\lambda)$ by $W(\lambda)$ the following theorems is proved.

Theorem. Let x and λ_1 be real, positive numbers. Let $f(t)$ be a function, defined for positive t , be of bounded variation in a neighbourhood of $t = x$.

I. If $e^{-\lambda_1 t} f(t) \in L_1(0,\infty)$, then :

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1 - i\mu}^{\lambda_1 + i\mu} \frac{\lambda}{W(\lambda)} y_2(x,\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty f(t) y_1(t,\lambda)\, dt = \frac{1}{2}\left\{ f(x-0) + f(x+0) \right\} .$$

II. If $e^{\lambda_1 t} f(t) \in L_1(0,\infty)$, then :

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1 - i\mu}^{\lambda_1 + i\mu} \frac{\lambda}{W(\lambda)} y_1(x,\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty f(t) y_2(t,\lambda)\, dt = \frac{1}{2}\left\{ f(x-0) + f(x+0) \right\} .$$

This theorem includes as special cases the classical one-sided Laplace transform and integral transforms, which were considered by Meyer, Titchmarsh, Koh-Zemanian, and Braaksma-Meulenbeld.

LEMEI, H. : Integral transforms related to c class of second order linear differential equations

We consider the differential equation $\frac{d^2}{dx^2} y - \left\{ \lambda^2 + q(x) \right\} y = 0$.

$q(x)$ is a continous function for all $x \in (-\infty, +\infty)$. Further let there be constants a and b such that $q(x)-a \in \mathcal{L}(0, +\infty)$ and $q(x)-b \in \mathcal{L}(-\infty, 0)$. Two solutions $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ are characterised by

$$y_1(x,\lambda)\exp(\sqrt{\lambda^2+a}\,x) \to 1, \quad \frac{d}{dx}\left\{ y_1(x,\lambda)\exp(\sqrt{\lambda^2+a}\,x)\right\} \to 0 \quad \text{as}$$

$$x \to +\infty, \quad \Re\sqrt{\lambda^2+a} \geq 0 .$$

and

$$y_2(x,\lambda)\exp(-\sqrt{\lambda^2+b}\,x) \to 1, \quad \frac{d}{dx}\left\{ y_2(x,\lambda)\exp(-\sqrt{\lambda^2+b}\,x)\right\} \to 0 \quad \text{as}$$

$$x \to -\infty, \quad \Re\sqrt{\lambda^2+b} \geq 0 .$$

Then we have the representation formula :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_2(x,\lambda_0)dx \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} y_1(x,\lambda)f(\lambda)d\lambda = \pi i \frac{W(\lambda_0)}{\lambda_0} f(\lambda_0) ,$$

where $W(\lambda)$ is the Wronskian of y_1 and y_2 . $f(\lambda)$ has to satisfy the following conditions :

(i) $f(\lambda)$ analytic in a vertical strip in the λ-plane to the right of the cuts $\Re\sqrt{\lambda^2+a} = \Re\sqrt{\lambda^2+b} = 0$ and containing the right part of the contour $\Re\sqrt{\lambda^2+b} = \Re\sqrt{\lambda_0^2+b} \geq \Re\sqrt{b} > 0$

(ii) $f(\lambda) \in \mathcal{L}(\alpha_1 - i\infty, \alpha_2 + i\infty)$;

(iii) $f(\lambda) = \lambda\, o(1)$ as $|\mathrm{Im}\,\lambda| \to \infty$ in the strip .

NEUHAUS, W. : Restgliedentwicklungen asymptotischer Reihen einer Klasse von Laplaceintegralen

Es wurde eine Fragestellung behandelt, die von Stieltjes in seiner Abhandlung von 1886 in den Ann. de l' ec.Nor. aufgeworfen wurde : Sei eine Funktion

$f(x)$ und dazu eine asymptotische Reihe $f(x) \sim v(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu}$ vorgegeben, und sei $R_N(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu}$. Wie kann die Gleichung $R_N(x) = 0$ approximativ gelöst werden? Stieltjes fand eine Lösung, deren wichtigster Bestandteil eine asymptotische Entwicklung von $R_N(x)$ für eine Klasse von Funktionen $N(x) = x - \eta(x)$, $\eta(x) = 0(1)$, ist. Diese Herleitung von Stieltjes wurde nun einerseits in einer den heutigen Ansprüchen genügenden Form gegeben und die fehlenden Beweise mit Hilfe einer verallgemeinerten Definition der asymptotischen Reihe nach H. Schmidt (Math. Ann. 1937) ausgeführt, andererseits die bei Stieltjes nur für einzelne Funktionen $f(x)$ gegebenen asymptotischen Entwicklungen für $R_N(x)$ auf die Klasse von Funktionen $\int_0^\infty e^{-xt} t^{\varkappa} G(t)dt$ ausgedehnt, bei der $G(t)$ die Gestalt hat:

$$G(t) = \sum_{\lambda=1}^{L} \sum_{j=1}^{\mathfrak{z}} A_\lambda^{(j)} \frac{1}{(1 - e^{i\alpha_\lambda} t)^j} + \frac{A_0}{1-t} + \chi(t), \quad \chi(t) \text{ ganz}.$$

Das Ergebnis lautet:

$$R_{N(x)}(x) \sim \frac{x^{\mathfrak{z}-1}}{(\mathfrak{z}-1)!} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[c_0(x, N(x)) + \frac{c_1(x, N(x))}{x} + \ldots \right]$$

mit $c_0(x, N(x)) = \sum_{\lambda=1}^{L} A_\lambda^{(\mathfrak{z})} \frac{e^{i\alpha_\lambda N(x)}}{1 - e^{i\alpha_\lambda}} + A_0 \left(x - (N(x) - \varkappa - \frac{1}{3})\right)$.

KAIRIES, H.-H. <u>Eine Kennzeichnung der reziproken Gammafunktion</u>

Es sei $\phi(x) > 0$ für $x > 0$ und stetig differenzierbar für $x \geq 0$. Ferner gelte

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = A(x)\, \phi(x), \quad A(x),\ A'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0.$$

Gilt dann a) $f(x) > 0$ für $x > 0$, $f(x)$ stückweise stetig differenzierbar für $x > 0$ und stetig bei $x = 0$, b) $f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) = A(x) f(x)$ für $x > 0$ und c) $f(1) = \phi(1)$ sowie $\frac{d}{dx}\left(\log \frac{f(x)}{\phi(x)}\right)$ beschränkt oder bestimmt divergent für $x \to 0$, so ist für $x \geq 0$ $f = \phi$.

Bew.: Wir definieren $g(x) := \log \frac{f(x)}{\phi(x)}$ für $x > 0$.

Wegen b) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{\nu=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x+\nu}{2^n}\right) = g'(x)$ und für

$\mathfrak{J} = \int_0^1 g'(x)dx$ gilt wegen c): I) $\mathfrak{J} = \pm\infty$ oder II) $\mathfrak{J} = r \in \mathbb{R}$.

Fall I) wird zu einem Widerspruch geführt und wegen II) folgt

$$\left| \sum_{\nu=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x+\nu}{2^n}\right) - \mathfrak{J} \right| < \varepsilon$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und hinreichend grosses n.

Also ist $g'(x)$ konstant, nach b) gilt $f(x) = \phi(x)e^{r(x-\frac{1}{2})}$

und die Normierung in c) legt $r = 0$ fest.

SCHÄFKE, F.W. : <u>Über einige Funktionalgleichungen</u>

Es wird in wenigen Zeilen bewiesen :

<u>Satz</u>: <u>Vor.</u> $k \in \{2,3,4,\ldots\}$;

$f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ st. dfb.;

$\forall x \in (0,\infty) \quad \sum_{\varkappa=0}^{k-1} f\left(\frac{x+\varkappa}{k}\right) = f(x)$;

$\eta \neq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad f(\eta) = 0$.

<u>Beh.</u> $f = 0 \iff f'$ bei 0 halbbeschränkt

$\iff f'$ nach 0 absolut-integrabel.

Unmittelbare Folgerungen sind ein Eindeutigkeitssatz für Funktionalgleichungen

$$\prod_{\varkappa=0}^{k-1} \Phi\left(\frac{x+\varkappa}{k}\right) = A(x)\,\Phi(x)$$

und eine entsprechende Charakterisierung der Γ - Funktion. (Vgl. auch den Vortrag von H.H. Kairies.)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

ENDL, K. Zum Müntzschen Problem auf dem Intervall (o, ∞)

Sei $L_w^p(o,\infty) = \left\{ x : \left(\int_o^\infty |x(t)|^p w(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$ und $w > 0$ so,

dass $t^\lambda \in L_w^p(o,\infty)$ $(\lambda \geq o,\ 1 \leq p < \infty)$. Wir betrachten

$w_\alpha(t) = \exp\left(-t^\alpha\right)$ $(o < \alpha \leq \infty)$. Hierbei liefert

$w_\infty(t) = \lim\limits_{\alpha \to \infty} w_\alpha(t)$ den Raum $L^p_{w_\infty}(o,\infty) = L^p(0,1)$. Sei

$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \nearrow \infty$,

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\lambda_1} & 0 \leq t \leq \lambda, \\ \sum\limits_{\lambda_i < t} \dfrac{1}{\lambda_i} & \lambda_1 < t \end{cases}$$

Es gilt dann der

Satz von Fuchs - Müntz

Sei $\lambda_{i+1} - \lambda_i \geqslant c > o$. $\left\{ t^{\lambda_i} \right\}_{i=1}^{\infty}$ ist vollständig

in $L^p_{w_\alpha}(o,\infty)$ genau dann wenn

$$\| e^{\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \|_{L^\alpha(o,\infty)} = \infty \quad (0 < \alpha \leq \infty).$$

FORST, W. : Ein funktionentheoretischer Beweis des Satzes von Müntz

Aufbauend auf einer Arbeit von M. M. Crum (vgl. Crum: On the theorems of Müntz and Szasz, J. London Math. Soc. 31 (1956), pp. 433-437) wird berichtet über eine Verallgemeinerung des Satzes von Müntz für den Fall der Approximation durch Exponentialpolynome. Ferner wird ein Zusammenhang aufgedeckt zwischen der Dichtheit und der Paley-Wiener-Klasse der rechten Halbebene.

Die Beweismethoden lassen sich dann so modifizieren, dass man zu einem Beweis des Satzes von Müntz für das kompakte Intervall gelangt. In diesem Falle erhält man ganz analog einen Zusammenhang zwischen der Dichtheit und der Paley-Wiener-Klasse zum Index α.

SCHERTZ, R. : Eine Methode zur Untersuchung der singulären Werte folgender Modulfunktionen höherer Stufe
$\gamma_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)}$, $\gamma_3(\omega) = \sqrt{j(\omega) - 12^3}$, $f_2(\omega) = \sqrt{2}\,\eta(2\omega)/\eta(\omega)$

Aus dem Transformationsverhalten gegenüber Modulsubstitutionen und den bekannten q-Entwicklungen dieser Funktionen kann man schliessen :

$$\gamma_2(3\omega) \in P(j(\omega), j(9\omega)),\quad \gamma_3(2\omega) \in P(j(\omega), j(4\omega)),\quad f_2(n\omega)^{\frac{24}{n}} \in P(j(\omega), j(2n^2\omega)),\ n \mid 12$$

Algebraische und geometrische Überlegungen liefern den

Satz : Vor.: $f(\omega) \in P(j(\omega), j(S(\omega)))$, ganz, $\alpha \in$ 0.H., $\operatorname{Im} \alpha \geq |S|$

Beh.: $f(\alpha) \in P(j(\alpha), j(S(\alpha)))$.

Hiermit erhält man zum Beispiel folgendes Ergebnis :

Satz : Es sei Σ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante D. Ist dann $\mathfrak{R}_f$ eine Ringklasse modulo f und $\mathfrak{R}_{2f}$ eine in $\mathfrak{R}_f$ enthaltene Ringklasse modulo 2f, so gilt :

$$\sqrt{D} \cdot \sqrt{j(\mathfrak{R}_f) - 12^3} \in P(j(\mathfrak{R}_f)) \quad \text{im Fall } Df^2 \equiv 1\ (4)$$

$$\sqrt{j(\mathfrak{R}_f) - 12^3} \in P(j(\mathfrak{R}_{2f})) \quad \text{im Fall } Df^2 \not\equiv 1\ (4)$$

MEYER, C. : Imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 2 und komplexe Multiplikation

Es sei Ω ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit der Klassenzahl 2 und es sei K sein absoluter Klassenkörper. In K sind, neben $K_2 = \Omega$, zwei weitere quadratische Teilkörper K_0, K_1 enthalten, von denen K_0 reell und K_1 imaginär ist. Es zeigt sich, dass hier die

Grundeinheit von K die Grundeinheit ε_o von K_o ist. Dann gilt die Klassenzahlformel für K:

$$\varepsilon_o^{h_o h_1} = \left(\frac{D(\mathfrak{a})}{D(1)}\right)^{w_1/2} \quad \text{mit} \begin{cases} h_o, h_1 & \text{Klassenzahl von } K_o, K_1 \\ w_1 & \text{Einheitswurzelzahl von } K_1 \end{cases};$$

dabei bezeichnet allgemein $D(\mathfrak{m}) = |\delta(\mathfrak{m})|^{1/2} \eta(\sqrt[24]{\Delta(\mathfrak{m})})$ die Modulnormfunktion des Gitters $\mathfrak{m}$ ($\delta(\mathfrak{m})$ = Determinante von $\mathfrak{m}$).
Diese ist hier zu bilden für die Divisoren 1 und $\mathfrak{a}$ aus der absoluten Haupt- und Nebenklasse.
Im Spezialfall Diskriminante $d_\Omega = -4p$ mit $p \equiv 5 \bmod 8$, also $K_o = P(\sqrt{p})$, $K_1 = P(i)$ ist einfacher (h_o ungerade) $\varepsilon_o^{h_o} = \frac{1}{2}\mathfrak{f}(\sqrt{-p})^4$ ($\mathfrak{f}$ = Schlaeflischer Modul).
Hiermit lässt sich $\gamma_3(\sqrt{-p})$ (γ_3 = Webersche Funktion) ausdrücken, wobei $\gamma_3(\sqrt{-p})$ im grössten reellen Teilkörper des Ringklassenkörpers mod 2 über Ω liegt. Wüsste man, dass dies auch für $\sqrt{\varepsilon_o^{h_o}}$ gilt, so wären die Körper $\Omega = P(\sqrt{-4p})$ der Klassenzahl 2 bijektiv bezogen auf die Gitterpunkte $\neq (0,0)$ auf der elliptischen Kurve $y^2 = x(x^2+3)$.

POHST, M.: <u>Werte der Dedekindschen Zetafunktion an geradzahligen Argumenten in Zahlkörpern vom Grade 2 und 3</u>

Ausgehend von einem Satz von K. Barner:

<u>Satz:</u> $\mathfrak{K}$ Idealklasse eines reell-quadratischen Zahlkörpers Ω mit Diskriminante d; $\varepsilon > 1$ Grundeinheit darin, $\mathfrak{i} = \{1, \varrho\}$ mit $\varrho - \varrho' > 0$ Ideal in $\mathfrak{K}^{-1}$; $\delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ vermöge $\varepsilon = \gamma\varrho + \delta$. Dann gilt:

$$\zeta_\Omega(2k, \mathfrak{K}) = \frac{2^{4k-2}\pi^{4k}}{(4k)!\sqrt{d}^{4k-1}\mathfrak{N}(\mathfrak{i})^{2k-1}} \sum_{m=o}^{4k} (-1)^m \binom{4k}{m} S_{4k}^m(\delta,\gamma) \sum_{\mu=o}^{2k-1} \binom{m-1}{\mu}\binom{4k-1-m}{2k-1-\mu} \cdot N(\varepsilon^{\mu+1}) Sp(\varepsilon^{2\mu+1-m}).$$

($S_{2e}^m(\delta,\gamma)$ eine verallgemeinerte Dedekindsche Summe)

kann man die

Werte der Dedekindschen Zetafunktion an den Stellen $2k$ explizit berechnen für Körper vom Degertschen Typus. Da die Werte der Zetafunktion Klasseninvarianten sind, kann man Mehrklassigkeitsaussagen machen. Mit Hilfe Artinscher L-Reihen kann man dann auch die ζ-Funktion eines total reellen nicht zyklischen kubischen Körpers K berechnen. Man erhält, falls D die Diskriminante von K bezeichnet und $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ die Klassenzahl 3 besitzt: $\zeta_K(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)\left(\zeta_\Omega(s, \mathfrak{K}_0) - \zeta_\Omega(s, \mathfrak{K}_1)\right)$, wobei $\mathfrak{K}_0$ die Hauptklasse, $\mathfrak{K}_1$ eine der beiden Nebenklassen bedeutet.

DIETER, U.: Pseudo-Zufallszahlen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen

Pseudo-Zufallszahlen werden meist nach der linearen Kongruenzmethode erzeugt. Es seien m, a, r, y_0 ganze Zahlen. Die Folge $\{y_i\}$ wird durch $y_{i+1} \equiv a y_i + r \pmod m$ und $0 \leq y_i < m$ eindeutig bestimmt. Die Brüche $x_i = \frac{y_i}{m}$ sind bei maximaler Periodenlänge im Intervall $[0,1)$ gleichverteilt (HULL - DOBELL). Es lässt sich zeigen, dass die folgenden drei statistischen Grössen auf verallgemeinerte Dedekindsche Summen führen, die sich exakt berechnen lassen:

(i) Die Autokorrelation zwischen zwei Pseudo-Zufallszahlen.

(ii) $P(x \leq x_i < x + \Delta x,\ y \leq x_{i+s} < y + \Delta y) - \Delta x \Delta y$.

(iii) $P(x_{i-1} < x_i < x_{i+1}) - \frac{1}{6}$.

Natürlich sollen (i), (ii), (iii) möglichst nah bei 0 liegen. Eine Analyse des Berechnungsvorgangs der verallgemeinerten Dedekindschen Summen zeigt, dass man dies angenähert erreichen kann: Man wähle den Faktor a so, dass der Kettenbruch a/m möglichst lang wird. Die Wahl der Grösse r ist ohne Einfluss.

SCHOENEBERG, B. : <u>Bemerkungen zu verallgemeinerten Dedekindschen Funktionen</u>

Das bekannte Verhalten der Logarithmen der Dedekindschen Funktionen

$$\underbrace{(1-\zeta_N^{-h})\, e^{\pi i P_1\left(\frac{h}{N}\right)}}_{\left[\text{nur bei } g \equiv 0 \not\equiv h(N)\right]} e^{\pi i \tau P_2\left(\frac{g}{N}\right)} \prod_{\substack{m>0 \\ m\equiv g(N)}} \left(1-\zeta_N^{h} q_N^{m}\right) \prod_{\substack{m>0 \\ m\equiv -g(N)}} \left(1-\zeta_N^{-h} q_N^{m}\right)$$

bei beliebigen Modulsubstitutionen wird benutzt zur Konstruktion von Modulfunktionen, affinen Darstellungen der Modulgruppe und unitären Darstellungen der Hauptkongruenzgruppen. Über die bekannte Jacobische Identität wird der Zusammenhang mit den klassischen Funktionen $\vartheta_0(\tau), \dots, \vartheta_3(\tau)$ und den von H. Petersson untersuchten Reihen

$$\sum_{n\equiv \alpha(N)} e^{\frac{\pi i \tau}{N} n^2}$$

hergestellt.

HALBRITTER, U. : <u>Über die Poissonsche Summenformel</u>

Inhalt : 1.) Verallgemeinerung eines Satzes von Guinand (Ann. of Math. 42 (1941), S. 596, Theorem 3). Sie wurde für $f(x) = g(x) \cdot (a \cos bx + c \sin dx)$ bewiesen, wobei vorausgesetztwurde, dass (1) $g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, (2) $\int_0^{1/2} |g(x)|\, dx < \infty$, (3) g von beschränkter Variation in $[\frac{1}{2}, \infty)$, (4) $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \vee b = 0$, $d \in \mathbb{Q}$ bzw. $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \vee b = 0$, $d \in \mathbb{R}$, falls ausserdem (5) g absolut stetig in $[\frac{1}{2}, \infty)$. Diese Verallgemeinerung des Satzes von Guinand enthält als Spezialfall einen Satz von Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals, Second Edition 1948, S. 61.

2.) Verallgemeinerung eines Satzes von Wilton (Journal of the London Math. Soc. 5 (1930), S. 276-279).

3.) Bericht über Untersuchungen zur Poissonschen Summenformel im Zweidimensionalen bei Verwendung eines speziellen Integralbegriffs für unendliche

Doppelintegrale, nämlich $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,d(x,y) := \lim\limits_{\substack{\mathfrak{Z},k \to \infty \\ \mathfrak{Z},k \in \mathbb{N}}} \int_0^{\mathfrak{Z}} \int_0^{k} f(x,y)\,d(x,y)$.

Mittels dieses Integralbegriffs lässt sich ein Kriterium angeben, dass u.a. die Verwendung der zweidimensionalen Poissonschen Summenformel zur Summation von zweifachen Reihen aus einer allgemeinen Klasse von bedingt konvergenten zweifachen Reihen ermöglicht.

FLOR, P. : Zwei Vermutungen

1. Die Minkowski'sche singuläre monotone Funktion $?(x)$ ist für rationale $x \in [0,1]$ so definiert : $?(0) = 0$, $?(1) = 1$; für $pq' - p'q = \pm 1$ sei $?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \frac{1}{2}\left[\,?\left(\frac{p}{q}\right) + \,?\left(\frac{p'}{q'}\right)\right]$. $?(x)$ ist stetig auf ganz $[0,1]$ fortsetzbar. Es gilt $?(0) = 0$, $?\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $(1) = 1$; darüber hinaus gibt es zumindest noch zwei weitere Fixpunkte ; ich vermute, dass es nur noch zwei gibt, $\xi_1 \approx 0{,}4203723\ldots$ und $\xi_2 = 1 - \xi_1$.

2. Für quadratische Matrizen $B = (b_{ij} \mid i,j = 1,\ldots,n)$ ist die Permanente $\operatorname{per} B := \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} b_{i,\pi(i)}$ ("Determinante ohne Vorzeichenfaktoren"). Ferner bezeichne $s(B)$ die Summe der Elemente von B.

   Vermutung : Sei A eine beliebige $n \times n$ - Matrix aus nicht negativen reellen Zahlen. Sei $1 \leq k \leq n$, $\mathfrak{S}_k$ die Menge der $k \times k$ -Teilmatrizen von A. Dann ist $\sum_{B \in \mathfrak{S}_k} 1 \sum_{B \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{per} B \cdot s(B) \geqq \left(\sum_{B \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{per} B\right)\left(\sum_{B \in \mathfrak{S}_k} s(B)\right)$.

   Es wird gezeigt, dass hieraus die van der Waerden'sche Vermutung folgt : $\operatorname{per} A \geqq n^{-n}\, n!$, falls A doppeltstochastisch ist.

MAUVE, R.: p-adische Nullstellen rationaler trinomischer Polynome

Die Nullstellen eines Polynoms aus $\mathbb{C}[X]$ lassen sich bekanntlich durch Werte gewisser hypergeometrischer Funktionen darstellen. Das spezielle trinomische Polynom $f(X) = X^n - gX - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ $(g \neq 0)$ hat nach Birkeland eine Nullstelle der Form

$$x_n = {}_nF_{n-1}\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n}{n-1}, \frac{(-n)^n \beta^{n-1}}{(n-1)^{n-1} g^n}\right) \text{ wenn } \left| \frac{n^n \beta^{n-1}}{(n-1)^{n-1} g^n} \right| \leq 1 .$$

Wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen ist dieses x_n auch eine Nullstelle von f in $\mathbb{Q}_p$, wenn die auftretende hypergeometrische Reihe p-adisch konvergiert. Nun gilt aber der

Satz:

Vor: Für $i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m$ gelte $a_i, b_j \in \mathbb{Q}$ und $\operatorname{ord}_p a_i \geq 0$, $\operatorname{ord}_p b_i \geq 0$

Beh: ${}_nF_m(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots b_m,x)$ ist konvergent genau dann, wenn

$$\operatorname{ord}_p x > \frac{m+1-n}{p-1}$$

ist.

Insbesondere ist also x_n eine p-adische Nullstelle des obigen Polynoms, wenn $(n-1)\operatorname{ord}_p \beta > n \operatorname{ord}_p g$ gilt.

D. Schmidt (Köln)