MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6/1970

Funktionentheorie einer komplexen Variablen

22.2. bis 28.2.1970

Vom 22. bis 28. Februar 1970 fand in Oberwolfach eine Tagung über Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen statt. Die Leitung der Tagung hatten Prof. Dr. D. Gaier (Gießen), Prof. Dr. H. Grunsky (Würzburg) und Prof. Dr. H. Wittich (Karlsruhe).
Die vorgesehenen Vorträge zum Themenkreis "Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Funktionentheorie" mußten wegen des plötzlichen Todes von Prof. A. Rényi (Budapest) ausfallen. Die Teilnehmer gedachten zum Beginn der Tagung des verstorbenen Kollegen.
Auch diese Tagung war, wie alle vorhergehenden, sehr gut besucht. Erfreulich groß war die Zahl der Gäste aus dem Ausland. In 33 Vorträgen wurden die verschiedensten Themen aus der Funktionentheorie behandelt.

Teilnehmer

N. Alling, Rochester, N.Y.
C. Andreian-Cazacu, Bukarest
I. N. Baker, London
K. Böhmer, Karlsruhe
E. F. Collingwood, Alnwick
H. Cremer, Freiburg
R. Delanghe, Gent
A. Dinghas, Berlin
G. Frank, Karlsruhe
F. Gackstatter, Würzburg
D. Gaier, Gießen
T. Ganelius, Göteborg
P. M. Gauthier, Montreal
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Berlin
K.-P. Herfeld, Marburg
H. Herold, Würzburg
A. Huber, Zürich
F. Huckemann, Gießen
J. A. Jenkins, St. Louis, Miss.
G. Jensen, Berlin
B. Kjellberg, Täby
H. Köditz, Würzburg
Y. Komatu, Tokyo
Th. Kövari, London
H. Kuhn, Karlsruhe

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A. J. Lohwater, Cleveland, Ohio
E. Lowien, Marburg
W. Meyer-König, Stuttgart
E. Mues, Karlsruhe
J. Nikolaus, Karlsruhe
M. E. Noble, Canterbury
E. Peschl, Bonn
A. Pfluger, Zürich
G. Piranian, Ann Arbor
Ch. Pommerenke, Berlin
M. von Renteln, Gießen
St. Ruscheweyh, Bonn
F. Ryan, Cleveland, Ohio
H. Schmidt, Würzburg
H. S. Shapiro, Djursholm
A. Steiner, Rüttenen
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
R. Tijdeman, Amsterdam
St. Timmann, Hannover
O. Volk, Würzburg
Wagenknecht, Würzburg
H. Walk, Stuttgart
J. Winkler, Berlin
H. Wittich, Karlsruhe
D. Wrase, Karlsruhe
H. J. W. Ziegler, London
P. Zinterhof, Wien

Vortragsauszüge

N. Alling: de Rham's theorem in a complex variable on non-orientable Klein surfaces

A Klein surface is a surface, together with an equivalence class of atlases, who transition functions are analytic or antianalytic: i.e., a convergent power series in z or in $\bar{z}$. The sheaves H and Δ of germs of analytic functions and analytic differentials can be defined on such surfaces Y. Then $0 \to K \to H \xrightarrow{d} \Delta \to 0$ is exact. The de Rham question then is, what is $\Gamma(Y,\Delta)/d\Gamma(Y,H)$? Assume that Y is noncompact and that its first Betti number $b(Y)$ is finite. The real dimension of $\Gamma(Y,\Delta)/d\Gamma(Y,H)$ is $2b(Y)$ or $2b(Y) - 1$ according as Y is orientable or not. Let $A \equiv \Gamma(Y,H)$ be the algebra of analytic "functions" on Y. Let A^* be the group of units of A and for $f \in A$ let $\exp f \equiv e^{2\pi f}$. $A^*/\exp A$ measures the obstruction to the formation of a single valued log of an element in A^*. This group is $Z^{b(Y)}$ or $Z_2 \oplus Z^{b(Y)-1}$ according as Y is orientable or not.

C. Andreian-Cazacu: Über quasikonforme Abbildungen

Der Vortrag enthält Formeln für die Extremallänge mit einem Gewicht einer Klasse von Kurvenscharen in R^2 und im allgemeinen von q-dimensionalen Flächenfamilien in R^n ($q = 1,\dots,n-1$; für $q = 1$ besteht die Familie aus Kurven). Solche Familien - die quasimodulär genannt werden - erhält man z.B. durch quasikonforme Abbildung einer Familie von q-Ebenen $\{\xi \in R^n; \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n), \xi_{q+j} = c_j = \text{konst.}, j=1,\dots,n-q\}$ wenn $c = (c_1,\dots,c_{n-q})$ ein $(n-q)$-dimensionales Intervall beschreibt. Transformationsformeln für die Extremallänge quasimodulärer Familien bei quasikonformen Abbildungen werden abgeleitet. Als Anwendung wird eine Methode dargestellt, die die Lösung einer schon von Teichmüller aufgezeigten Klasse von Extremalproblemen ermöglicht: man sucht in einer Familie quasikonformer Abbildungen, deren Charakteristiken bestimmte Bedingungen erfüllen, die Extremalabbildung, die ein konform invariantes Funktional- einen Modul- extremiert. Die Methode ist anwendbar, wenn sich der Modul durch eine Extremallänge ausdrücken läßt.

K. Böhmer: Über das Wachstum der Lösungen linearer Differentialgleichungen an einer Unbestimmtheitsstelle

Es wird die Dgl.

$$w^{(m)} + a_{m-1}(z)w^{(m-1)} + \dots + a_0(z)w = 0$$

mit den Koeffizienten

$$a_j(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\alpha_j} A_{j,\nu} z^\nu, \quad \alpha_j \leqq \infty, \text{ untersucht.}$$

Die kanonischen Lösungen sind von der Bauart

$$w_n(z) = z^\rho \left(d_n(z)+\dots+d_\ell(z)(\log z)^{n-\ell}+\dots+d_1(z)(\log z)^{n-1}\right)$$

mit $\rho \in \mathbb{C}$ und holmorphen $d_\ell(z)$ in einer Umgebung von ∞. Mit $M(r,f) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$ bzw. $T(r,f) = m(r,f)+O(\log r)$ sei

$$\lambda^{(\ell)}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_\ell T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{\ell+1} M(r,f)}{\log r} .$$

f ist genau dann von rationalem Verhalten in Unendlich, wenn

$$\lambda^{(0)}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r,f)}{\log r} < \infty .$$

Mit $T(r,w_n) = \operatorname{Max}_{\ell=1}^{n} \{T(r,d_\ell)\}$ und $T(r,A) = \operatorname{Max}_{j=0}^{m-1} \{T(r,a_j)\}$

gilt als Verallgemeinerung der Fuchs'schen Theorie der Satz 1:
(Für $K = 0$ geht (1) in die Fuchs'sche Theorie über, wenn man beachtet, daß $\lambda(w) = 0$ für Dgln. mit $\alpha_j < \infty$ genau für $\lambda^{(0)}(w) < \infty$ erfüllt ist.

(1) $\forall_j: \ \lambda^{(0)}(a_j) = \alpha_j \leqq (m-j)(k-1) < \infty \Longleftrightarrow \forall_w :$

$$\lambda^{(1)}(w) = \lambda(w) = K = \operatorname{Max}_{j=0}^{m-1} \left\{\frac{\alpha_j}{m-j} + 1\right\} < \infty$$

(2) $\forall_j: \ \lambda^{(\ell)}(a_j) \leqq \lambda^{(\ell)}(A) = \rho < \infty \Longleftrightarrow \forall_w \ \lambda^{(\ell+1)}(w) \leqq \rho < \infty$

(3) $\exists_j: \ a_j$ transfinit $\Longleftrightarrow \exists_w: \ w$ transfinit.

Ist $a_n(z)$ ein Koeffizient, der "stärker" anwächst als die folgenden $a_{n+j}(z)w$ gibt es [für (2) und (3)] höchstens n linear unabhängige "subnormale" Lösungen. Für den Fall (1) werden weitere Aussagen über subnormale Wachstumsordnungen und Summe der Wachstumsordnungen gemacht.

E. F. Collingwood: Some Cluster Set Theorems

Let $f(z)$ be defined in the unit disc $D = \{z, |z| < 1\}$, and denote by K the boundary $|z| = 1$, and let $P = e^{i\theta}$ be a point of K. Then $f \in C(f,P)$, the cluster set of f at P, if $\exists \ \{z_n\} \subset D, \lim_{n\to\infty} z_n = P, \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$; and $C_\Delta(f,P)$ is the partial cluster set in a Stolz angle Δ at P. Then for an arbitrary function $f(z)$ in D the Maximality-Theorem states that $C_\Delta(f,P) = C(f,P)$ at nearly all points P on K, i.e. expect for a set of first category. If f is bounded this gives a "dual" of Fatou's Theorem for holomorphic functions for which nearly every point P must, by the Maximality Theorem, be a point at which every angular cluster set is maximal, i.e. = $C(f,P)$. We can also derive a Theorem of Kurt Meier for any meromorphic function in D which states that nearly all points $e^{i\theta}$ of K belong to the union $M(f) \cup I(f)$, where $M(f)$ is the set of Meier points P such that the cluster set of f on every chord to P is maximal, i.e. = $C(f,P)$ and $I(f)$ is the set Plessner points P at which every angular cluster set $C_\Delta(f,P)$ is total = covers the Riemann sphere.

H. Cremer: Bericht über das Zentrumproblem

Der Fixpunkt z_0 einer in der Umgebung von z_0 holomorphen Funktion

$$(1) \qquad f(z) = z_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \qquad |a_1| = 1$$

heißt nach Poincaré und Julia ein Zentrum, wenn $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 als "transformierte Drehung", d.h. in der Form

$$(2) \qquad f(z) = S^{-1}(a_1 S(z))$$

mit einer in z_0 regulären Funktion

$$(3) \qquad S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (z-z_0)^\nu \qquad c_1 \neq 0$$

dargestellt werden kann.
Es gibt dann eine Umgebung des Fixpunktes z_0, die von einer Schar geschlossener, den Nullpunkt umschließender Kurven lükkenlos und schlicht bedeckt wird, welche durch $f(z)$ einzeln in sich überführt werden.
Die Fragen nach der Möglichkeit der Darstellung (2) für die durch (1) gegebenen holomorphen Funktionen bilden das "Zentrumproblem".
Der Vortragende berichtete eingehend über dieses nunmehr hundert Jahre alte Problem, seine bis heute immer noch unvollstän-

dige Lösung und die damit in Zusammenhang stehenden noch offenen Fragen. Ein ausführliches Referat steht im Vortragsbuch Nr. 16, Seite 112-115 des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach.

R. Delanghe: Singularities for functions with values in a Clifford algebra

Consider functions $f: R^n \longrightarrow A$ where A is the Clifford algebra over an n-dimensional real quadratic vector space V where in an orthogonal basis $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ has been chosen; assume furthermore that, if $e_A = e_{i_1} \ldots e_{i_h}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n)$ denotes an arbitrary basic element of A, the function $f = \sum\limits_A f_A e_A$ is regular in an open set $G = \overset{\circ}{B}(0,R) \setminus \overline{B}(0,r)$ (which means that $M(f) = \sum\limits_{i,A} e_i e_A \frac{\partial f_A}{\partial x_j} = 0$ in G where

$$M = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i});$$

then a Laurent series of f in an associated Laurent domain G^* of G is obtained.

The existence of this Laurent series in G^* enables us to consider as singularities the removable singularities, the poles and the essential isolated singular points. The concept of residue can be introduced and theorems on residues are obtained which are extensions of the well known theorems in classical function theory. Moreover, Mittag-Leffler's Theorem is proved for functions with values in a Clifford algebra.

G. Frank: Ausnahmewerte bei Lösungen linearer Differentialgleichungen

Jede ganze transzendente Lösung $w(z)$ der linearen Differentialgleichung $L_n(w) = w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_0(z)w = 0$ mit Polynomkoeffizienten $a_j(z)$, $a_0(z) \not\equiv 0$, hat höchstens zwei defekte Werte, nämlich Null und Unendlich. Dabei ist $\delta(w,\infty) = 1$.

Gefragt wird nach den Differentialgleichungen $L_n(w) = 0$, deren Lösungen gewisse Voraussetzungen über die Nullstellendefekte erfüllen. Insbesondere werden solche Differentialgleichungen $L_n(w) = 0$ untersucht, die ein Fundamentalsystem von Lösungen mit der folgenden Eigenschaft besitzen: Jede dieser Funktionen hat den Picard'schen Ausnahmewert Null. Es wird gezeigt, daß eine Differentialgleichung $L_n(w) = 0$ genau dann ein solches Fundamentalsystem besitzt, wenn ein Polynom $q(z)$ so existiert, daß die Transformation $w(z) = \exp\{q(z)\}u(z)$ diese Differentialgleichung in eine Differentialgleichung $L_n(u) = 0$ mit konstanten Koeffizienten überführt.

F. Gackstatter: <u>Zum 2. Hauptsatz von Nevanlinna und zur Differentialgeometrie der Realteilflächen</u>

Stellt man Untersuchungen an über die log. Ableitung einer meromorphen Funktion, so erhält man u.a. folgende Gleichung:

$$N_1(r) + \left\{m\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{f}{f'}\right)+m(r,f)\right\} = 2T(r,f) + S(r,f),$$

die ähnlich gebaut ist wie der 2. Hauptsatz. Dadurch wird man veranlasst, neben dem Begriff "Gesamtverzweigtheit $N_1(r)$" auch den Begriff "Gesamtschmiegung $\left\{m\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{f}{f'}\right)+m(r,f)\right\}$" einzuführen. Diese Bildung tritt wieder auf, wenn man versucht, die Differentialgeometrie der Realteilflächen mit Nevanlinna'schen Größen der Wertverteilungslehre in Zusammenhang zu bringen:

<u>Satz:</u> K sei die Gauss'sche Krümmung der Realteilfläche $x, y, Rf(x+iy)$, f meromorph. Dann besteht zwischen dem Krümmungsmittelwert

$$m\left(r,\frac{1}{-K}\right) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg^+ \frac{1}{-K(re^{i\theta})}\,d\theta$$

und der Gesamtschmiegung der Ableitung die Relation

$$m\left(r,\frac{1}{-K}\right) = 2\left\{m\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f''}\right)+m(r,f')\right\} + S(r,f) .$$

Daraus folgt z.B. für den hierbei eingeführten Krümmungsmittelwert der

Satz: g sei eine ganze transzendente Funktion von endlicher Ordnung. Dann sind $\lg M(r,g)$, $T(r,g)$ und $m\left(r,\frac{1}{K}\right)$ von derselben Ordnung, demselben Typus und derselben Klasse.

T. Ganelius: A class of convolution equations with applications in function theory

In connection with their studies of meromorphic functions Edrei and Fuchs derived the regular variation of a function from an asymptotic estimate for an integral transform of the function. The problem has later been treated by Drasin, Shea and others.

By considering the problem in the general form where we wish to prove that

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x+h)/\phi(x)$$

exists, if $K*\phi(x) = \int_{\infty}^{\infty} K(x-y)\phi(y)dy = \mu\phi(x) + o\big(\phi(x)\big)$

for some $K \in L(-\infty,\infty)$, I have obtained a theorem more general than the previous results. It turns out that the meromorphic type of the function $\hat{K}(t)^{-1}$ is decisive.

P. M. Gauthier: The range of a meromorphic function

Let f be meromorphic in $|z| < 1$. We give an exemple where $C(f,1)$ is the entire sphere but $R(f,1)$ has measure zero. However we show that $R(f,1)$ has infite linear measure if the cluster set has a non-empty interior. This work was done with Leon Brown. For definitions see Collingwood-Lohwater: Cluster sets. This work has been submitted to the London Math. Soc..

H. Herold: Ein Randwertproblem bei Differentialgleichungen 3. Ordnung im Komplexen

Es wird ein Existenz- und Einzigkeitssatz für die Lösung des Randwertproblems

$$w''' = F(z,w) \qquad w(a) = w'(a) = w(b) = 0$$

mit Methoden der Funktionalanalysis bewiesen. Die komplexwertige Funktion $F(z,w)$ ist dabei in einer geeigneten Menge definiert und stetig (bzw. regulär-analytisch) und kann für $z = a$ und $z = b$ Singularitäten nicht zu hoher Ordnung aufweisen.

Als Folgerung ergibt sich z.B. der folgende Satz:

Die komplexwertige Funktion $p(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ definiert und stetig mit $|p(x)| \leqq L$, L eine positive Konstante. Falls $L < \frac{k}{(b-a)^3}$ (k ist angebbar) gilt, besitzt die Differentialgleichung $w''' + p(x)w = 0$ keine nichttriviale Lösung $w(x)$ mit $w(x_1) = w'(x_1) = w(x_2) = 0$, $a \leqq x_1$, $x_2 \leqq b$.

Im Falle $L = \frac{k}{(b-a)^3}$ ist die Behauptung im allgemeinen nicht mehr richtig.

A. Huber: Konforme und metrische Kreise auf vollständigen Flächen

Sei F eine vollständige zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom topologischen Typ der euklidischen Ebene. Die Gauss'sche Krümmung K sei auf F integrabel,

$$\iint_F |K| \, dA < \infty \, .$$

Ferner gelte $\iint_F K dA \neq 2\pi$. Dann existiert eine konforme Abbildung von F auf die komplexe Ebene $\mathbb{C}$. Wir definieren

$$L(r) = \max_{|z|=r} \rho\left[\phi^{-1}(0), \phi^{-1}(z)\right] \quad \text{und}$$

$$\ell(r) = \min_{|z|=r} \rho\left[\phi^{-1}(0), \phi^{-1}(z)\right] \, ,$$

wobei ρ den Abstand auf F bezeichnet. Satz: $\lim_{r\to\infty} L(r)/\ell(r) = 1$.

J. A. Jenkins: On the growth of slowly increasing unbounded harmonic functions

Let $u(z)$ be a non-constant real-valued harmonic function defined in a plane domain Ω, $\ell(c)$ the level set $\{z \in \Omega,\ u(z) = c\}$.
Let

$$\theta(c) = \int_{\ell(c)} |{*}du|, \quad \ell(c) \text{ not void}; \quad \theta(c) = 0, \ \ell(c) \text{ void}.$$

If $a \in u(\Omega)$, the behaviour of $\int_a^b (\theta(c))^{-1}dc$ as $b \to \infty$ provides important information about the rate of growth of u as we approach the boundary of Ω. In particular if this quantity is finite for each finite b but tends to infinity with b, u will be called a slowly increasing (unbounded) harmonic function. If Ω is a circular annulus $r_0 < |z| < 1$ one can study the asymptotic behaviour of $u(z)$ in Stolz regions about radii on which the function is unbounded and in particular for directions of maximal growth. Further one can study slowly increasing harmonic functions with maximal rate of growth in a finite number of directions among functions of that class. The results extend and generalize earlier results of Hayman and Eke who treated regular functions in the unit circle with certain valence restrictions.

G. Jensen: Abschätzungen der Diskriminanten kompakter ebener Mengen

Als n-te Diskriminante einer kompakten Menge E bezeichnet man

$$\Delta_n(E) = \max_{z_\nu \in E} \prod_{\mu \neq \nu} \prod |z_\mu - z_\nu|; \quad \mu,\nu = 1,\dots,n.$$

$\Delta_n^{1/n(n-1)}$ strebt monoton abnehmend gegen den transfiniten Durchmesser oder die Kapazität cap E von E. Die Green'sche Funktion $g(z,\infty)$ des Außengebietes G von E hat dann die Entwicklung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$g(z,\infty) = \log |z| - \log \operatorname{cap} E + o(1) \quad (z \to \infty).$$

Es werde cap $E = 1$ vorausgesetzt. Dann gilt immer $\Delta_n(E) \geq n^n$. Ist ferner G regulär bezüglich des Dirchlet'schen Problems, und ist $s(\lambda)$ der Zusammenhangsgrad des Gebietes $\{z: \ g(z,\infty) > \lambda\}$, so setze man

$$\log \delta(E) = \int_0^\infty (s(\lambda)-1)d\lambda .$$

Weiter sei $\tilde{\Delta}_n = \sup \{\Delta_n(E) : E \text{ Kontinuum, cap } E = 1\}$.

Dann gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Delta_n(E)^{1/n} \geq \delta(E)$

und $\Delta_n(E) \leq \delta(E)^{2(n-1)} \tilde{\Delta}_n < \delta(E)^{2(n-1)} (\frac{4}{e}\log n + 4)^n n^n$.

Diese Abschätzungen verallgemeinern die entsprechenden Ergebnisse von Ch. Pommerenke für Kontinuen $(\delta(E) = 1)$.

B. Kjellberg: <u>Beispiele von Integralgleichungen in der Funktionentheorie</u>

Gewisse Probleme über das Wachstum ganzer und subharmonischer Funktionen (Analogien zu Sätzen von Milloux-Schmidt, Dinghas und Phragmén-Lindelöf-Ahlfors-Heins) werden behandelt. Die Probleme werden in Integralgleichungen überführt. Außer von dem Vortragenden stammen die Resultate von Matts Essén, Ulf Hellsten und Folke Norstad.

Y. Komatu: <u>Über eine Variationsformel vom Hadamard'schen Typus für Abbildungsfunktionen</u>

Es wird die konforme Abbildung von einem gegebenen Ringgebiet auf einen konzentrischen Kreisring betrachtet. Jede Veränderung der Randkurven des Ringgebiets bringt eine entsprechende Wirkung auf die betreffende Abbildungsfunktion. Unter der Annahme, daß alle auftretenden Gebiete regulär analytische Ränder besitzen, wird eine Variationsformel in expliziter Gestalt hergestellt. Sie stellt die erste Variation der Abbildungsfunktion dar, wenn der Rand des Urringgebiets eine angegebene senkrechte Verschiebung erleidet. - Früher wurde eine derartige Formel hergeleitet, um diejenige im einfach zusammenhängenden Fall zu verallgemeinern. Die hier vorgelegte Variationsformel ergänzt die früher gewonnene, indem eine zugefügte Beschränkung über die Weise der Gebietsveränderungen völlig beseitigt wird.

H. Kuhn: Beitrag zur Interpolation

Durch Behandlung eines gewissen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung wird der folgende Satz bewiesen: Zu den vorgegebenen reellen Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ mit

$$(-1)^{n-j+1}(y_j - y_{j-1}) > 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

gibt es genau ein Polynom $(n+2)$-ten Grades mit dem Hauptkoeffizienten 1, welches nacheinander (im Sinne wachsender x) die Extremwerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ annimmt, beginnend mit y_0 an der Stelle $x = 0$.

A. J. Lohwater: Cluster sets of Analytic Functions

Some modern problems in the theory of cluster sets.

W. Meyer-König: Vergleich der Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei reellen Ordnungen

Es handelt sich um die Frage der Verträglichkeit der Verfahren E_p (Euler-Knopp), $B_{\pm 1}$ (Borel), S_p, T_p (Taylor), wobei diese in der Reihe-Reihe-Form betrachtet und bei S_p und T_p die singulären Fälle ausgeschlossen werden. Die Ordnung p wird als reell vorausgesetzt; ferner sei $p \neq 0$ bei E_p, $p \neq 0$ und $p \neq 1$ bei S_p und T_p. Durch Agnew (1944) weiß man, daß die E_p-Verfahren unter sich verträglich sind; durch Meyer-König/Zeller (1963), daß jedes E_p mit B_1 und mit B_{-1} verträglich ist, sowie daß B_1 und B_{-1} nicht verträglich sind. In einer Stuttgarter Dissertation hat Strasser (1967) Fälle der Verträglichkeit und der Unverträglichkeit im Bereich der E_p, S_q, $B_{\pm 1}$ festgestellt. Unter Hinzunahme der T_p wurden die noch ausstehenden Fälle durch Ishiguro und Meyer-König betrachtet. Es liegt jetzt eine volle Übersicht über alle möglichen Paarungen vor, wobei man mit insgesamt drei verschiedenen Untersuchungsmethoden auskommt. Einen Sonderfall bietet das Paar $(B_{-1}, T_{1/2})$; in diesem Fall wird die Unverträglichkeit mit Hilfe eines expliziten Beispiels nachgewiesen.

E. Mues: Über eine Vermutung von Hayman

Als Beitrag zu Probl. 1.18 in Hayman's "Research problems in function theory" wird der folgende Satz bewiesen:

Satz: $f(z)$ sei eine in der Ebene meromorphe Funktion von endlicher unterer Wachstumsordnung $\left(\lambda = \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} < \infty\right)$.

Haben $f(z)$ und $f''(z)$ keine Nullstellen, dann ist $f(z) = e^{az+b}$ oder $f(z) = (Az+B)^{-n}$.

Beim Beweis ist wesentlich das folgende

Lemma: Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion von endlicher unterer Wachstumsordnung λ. J_ε bezeichne ein Intervall der Länge 2ε; $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Es sei

$$H(r,\varepsilon) = \sup_{J_\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} r\left|\frac{f'(re^{i\phi})}{f(re^{i\phi})}\right| d\phi .$$

Dann gibt es eine Konstante $B = B(\lambda)$, die nur von λ abhängt, so daß

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{H(r,\varepsilon)}{T(r,f)} \leq B(\lambda)\varepsilon\cdot\log\frac{1}{\varepsilon} .$$

J. Nikolaus: Lineare Differentialgleichungen mit ganzen Koeffizienten

Es wird gezeigt, daß jede ganze Funktion beliebiger Wachstumsordnung mit nur einfachen Nullstellen Lösung einer Differentialgleichung $w'' + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0$ mit ganzen Funktionen $a_j(z)$ und $a_0(z) \not\equiv 0$ ist. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ergibt die Lösung des sog. Umkehrproblems für lineare Differentialgleichungen: Gegeben seien die reellen Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_\kappa$ mit $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 <\ldots< \lambda_{\kappa-1} < \lambda_\kappa = \infty$ und die natürlichen Zahlen $\mu_1,\ldots,\mu_\kappa$ mit $\mu_1+\ldots+\mu_\kappa = n$. Es soll eine Differentialgleichung $w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \ldots$ $\ldots + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0$ mit ganzen Funktionen $a_j(z)$ und $a_0(z) \not\equiv 0$ und mit einem Fundamentalsystem $\omega = (w_1,\ldots,w_n)$ mit folgender Eigenschaft konstruiert werden: für jedes $j=1,\ldots,\kappa$ gibt es genau μ_j Funktionen $u_1,\ldots,u_{\mu_j} \in \omega$ von der Wachstumsordnung λ_j so, daß jede nichttriviale Linearkombination dieser $u_1,\ldots,u_{\mu_j}$ wieder die Wachstumsordnung λ_j hat.

Der Beweis dieser Aussage wird in drei Hilfssätzen für $n = 3$ angedeutet. Zum Schluß wird über das Umkehrproblem mit $\lambda_\kappa < \infty$ berichtet.

A. Pfluger: Eine Konvexitätseigenschaft des n-ten Koeffizientenkörpers schlichter Funktionen

Durch $f \to (a_2,\ldots,a_n)$ wird S auf eine kompakte Menge V_n des R^{2n-2} abgebildet. Einem $(a_2,\ldots,a_k)$ in V_k und $n > k$ wird zugeordnet die Menge

$W_n(a_2,\ldots,a_k) = \{(a_{k+1},\ldots,a_n)/(a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \in V_n\}$.

Behauptung: Für $k < n \leq 2k$ ist $W_n(a_2,\ldots,a_k)$ eine konvexe Menge und jede Stützebene enthält nur einen Punkt von W_n. Für $a_2 = \ldots a_k = 0$ ist $W_{2k+1}(0,\ldots,0)$ dagegen nicht mehr konvex.

G. Piranian: <u>Zerstörbarkeit absoluter Konvergenz bei Potenzreihen schlichter Funktionen</u>

Es sei $f(z) = \sum a_n z^n$ $(|z| < 1)$, und für $|c| < 1$ sei

$$f_c(z) = \sum a_n^{(c)} z^n = f\left(\frac{z-c}{1-\bar{c}z}\right) .$$

Wie schon L. Aplár bewiesen hat, folgt aus der Konvergenz von $\sum |a_n|$ nicht die Konvergenz von $\sum |a_n^{(c)}|$. Ein neues Beispiel zeigt jetzt, daß das Alpár'sche Ergebnis auch für schlichte Funktionen gilt.

St. Ruscheweyh: <u>Über den Wertevorrat gewisser Lösungen der Differentialgleichungen</u> $\underline{(1+z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + n(n+1)w = 0}$

Eine eingehende Untersuchung der im Titel genannten Differentialgleichung wurde zuerst von K. W. Bauer und E. Peschl vorgenommen. Im Hinblick auf eventuell mögliche Rückschlüsse im Bereich holomorpher Funktionen wurden gewisse Eigenschaften der Lösungen untersucht. In diesem Vortrag wird gezeigt, daß in einer gewissen Klasse von Lösungen Analoga zu dem Fundamentalsatz der Algebra und zu den Sätzen von Picard, Schottky und Landau bestehen.

F. Ryan: <u>The Set of Asymptotic Values of a Holomorphic Function</u>

Let $f(z)$ be holomorphic in D: $|z| < 1$, and let $a(f)$ be the set of asymptotic values of $f(z)$. $a(f)$ must be an analytic set, but not every analytic set is the set of asymptotic values for some function holomorphic in D. Necessary and sufficient conditions are obtained in order that a set $A = a(f)$ for some function f holomorphic in D.

H. S. Shapiro: Function-Theoretic problems motivated by study of Banach Algebras

Our discussion will revolve about two theorems:
The "Corona Theorem" of Carleson concerning the maximal ideals of H^∞, and the "Wermer Maximality Theorem", together with its extensions by Björk and Alexander. We aim to show how certain special cases of these theorems can be established by fairly simple constructive arguments, and to point out some unsolved problems we encountered.

K. Strebel: Über Folgen von quasikonformen Abbildungen

Es wird der folgende Satz bewiesen: Seien f_n und f k-quasikonforme Abbildungen eines ebenen Gebietes G in die Ebene und die Folge der f_n konvergiere lokal gleichmäßig gegen f. Dann gilt für die zugehörigen komplexen Dilatationen κ_n und κ

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} |\kappa_n| \geq |\kappa|$ f. ü. in G

(2) Falls auf einer Menge E von positivem Maß in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \iint_E |\kappa_n(z) - \kappa(z)| \, dxdy = 0 .$$

Für eine beliebige messbare Menge E hat man dann, immer unter Voraussetzung des Gleichheitszeichens, eine Teilfolge f_{n_i}, so daß $\kappa_{n_i} \to \kappa$ f. ü. auf E.

R. Tijdeman: On the distribution of the values of solutions of linear differential equations

Let w denote a non-constant solution of a linear differential equation $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$, with entire functions as coefficients. Upper bounds are given for the number of zeros, and more general c-values, of w in an arbitrary disk. These estimates are compared with asymptotical results due to a.o. G. Pólya and O. Perron. For constant coefficients an improvement of a result of S. Dancs and P. Turán is obtained. H. Wittich has proved that such upper bounds for the number of c-values of w in a disk is characteristic of constant coefficients. In a similar manner is demonstrated that the upper bound for the case of polynomial coefficients is also characteristic of this class of differential equations.

H. Walk: <u>Wachstumseigenschaften zufälliger Potenzreihen</u>

Für zufällige Potenzreihen, deren Koeffizienten einer gewissen Klasse von orthogonalen Zufallsvariablen angehören, liegt hinsichtlich verschiedener Randeigenschaften am Einheitskreis entweder mit Wahrscheinlichkeit 1 überall ein singuläres Verhalten oder mit W 1 überall ein reguläres Verhalten vor. Beispielsweise gilt der folgende Satz. Die Koeffizienten a_n einer zufälligen Potenzreihe mit gleichmäßig beschränkten $\sqrt{n}\, a_n$ seien an den Erwartungswerten zentriert, die Ausdrücke $E(a_{n_1} a_{n_2} \overline{a_{n_3}}\, \overline{a_{n_4}})$ mit mindestens 3 verschiedenen Indizes seien Null, und es sei $E(|a_{n_1}|^2 |a_{n_2}|^2) = E|a_{n_1}|^2 \cdot E|a_{n_2}|^2$ für alle Indizes $n_1 \neq n_2$. Dann bildet $\sum a_n z^n$ entweder mit W 1 jeden offenen Sektor der Kreisscheibe $|z| < 1$ auf ein Gebiet unendlichen Flächeninhalts ab (genau dann ist $\sum n\, E|a_n|^2 = \infty$) oder mit W 1 die Kreisscheibe $|z| < 1$ auf ein Gebiet endlichen Flächeninhalts (genau dann ist $\sum n\, E|a_n|^2 < \infty$).

J. Winkler: Zum Verzweigungsindex ganzer und meromorpher Funktionen

Der zweite Hauptsatz von Nevanlinna besagt, daß

$$\sum_n \left(\delta(a_n) + \theta(a_n)\right) \leq 2$$

gilt, wobei $\delta(a_n)$ der Defekt und $\theta(a_n)$ der Verzweigungsindex von a_n für $w(z)$ ist.

Habe $w(z)$ die Ordnung ρ, sei $w(z)$ ganz, $\mu > \lambda > \rho$, a irgendein komplexer Wert und

$$K = \bigcup_{w(\zeta)=a} \left\{z \,\middle|\, |z-\zeta| \leq \exp(-|\zeta|^{\lambda})\right\} .$$

Jede Komponente von K, die mindestens eine mehrfache a-Stelle von $w(z)$ oder zwei a-Stellen ζ_1 und ζ_2 von $w(z)$ mit $|\zeta_1-\zeta_2| \leq \mathrm{Max}\{\exp(-|\zeta_1|^{\mu}), \exp(-|\zeta_2|^{\mu})\}$ enthält, heißt $\exp(-|z|^{\lambda})$ - $\exp(-|z|^{\mu})$ -Komponente der a-Stellen von $w(z)$. $b(a,r)$ sei die Anzahl dieser in $|z| \leq r$ enthaltenen Komponenten. Im zweiten Hauptsatz kann dann $\theta(a_n)$ durch

$$\beta(a_n) = \underline{\lim}_{r\to\infty} B(a_n,r)/T(r,w) \quad \left[\geq \theta(a_n)\right]$$

ersetzt werden, wobei $T(r,w)$ die charakteristische Funktion und

$$B(a_n,r) = \int_0^r b(a_n,t)\,\frac{dt}{t} \quad \text{ist.}$$

Ein analoges, aber notwendig sehr viel schwächeres Resultat gilt auch für meromorphes $w(z)$.

H. Wittich: Lineare Differentialgleichungen im Komplexen

In zwei einstündigen Vorträgen wurden Probleme aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen besprochen, die uns in den letzten Jahren in Karlsruhe beschäftigt haben. Es handelt sich dabei um Beiträge zu den Themen

1. Eigenschaften minimaler Fundamentalsysteme und das Umkehrproblem
2. Zusammenhang zwischen den Koeffizienten linearer Differentialgleichungen und Wachstums- und Wertverteilungseigenschaften der Lösungen.

Fragestellungen, Ergebnisse und Beweismethoden wurden an einfachsten Typen von Differentialgleichungen erläutert. Wesentliche Hilfsmittel sind Methoden der Wertverteilungslehre und die Methode des Zentralindex.

Die Vorträge waren so angelegt, daß sie die Berichte von K. Böhmer, G. Frank und J. Nikolaus vorbereiteten.

H. J. W. Ziegler: <u>Der dritte Hauptsatz für meromorphe Flächen</u>

Nach kurzer Erläuterung des Begriffs "meromorphe Fläche" S und der ersten beiden Hauptsätze:

I. $T(r,S) = H(r,S-c) + m\,(r,o,S-c) + N(r,o,S-c) + O(1)$

II. $T(r,S') = G(r,S-zc) + m(r,o,S'-c) + N(r,o,S'-c) + O(1)$

wird der dritte Hauptsatz ausführlich bewiesen. Dieser lautet für meromorphe Flächen über der Ebene

$$(q-2)T(r,S)+G(r,S) \leqq \sum_{j=1}^{q} H(r,S-c_j)+N(r,o,S-c_j) - N_S(r)+\rho(r,S).$$

Dabei ist $N_S(r) = 2N(r,S)-N(r,S')+N(r,o,S')$, und es gilt $\rho(r,S) = O(\log T(r,S))+O(\log r)$ für $r \to \infty$ bis auf höchstens eine gewisse Ausnahmemenge. Als Anwendung werden u.a. Defektrelationen für sog. Sichtbarkeits- und Totalkrümmungsdefekte der Fläche gegeben.

Zum ersten Hauptsatz vergleiche man E. F. Beckenbach und G. A. Hutchison, Pac. J. of Maths. vol. 28(1969). Die beiden Hauptsätze I und II und das Verhältnis $\frac{T(r,S')}{T(r,S)}$ werden in meiner Dissertation (Würzburg 1969) ausführlich studiert.

P. Zinterhof: Über schlichte Funktionen

Jede schlichte Funktion $f(z) = z + a_2 z^2 + -$ läßt sich mit einer beschränkten Funktion $B(z)$ als

$$f(z) = \frac{z}{1-zB(z)} \qquad (x)$$

darstellen. Mit Hilfe dieser Darstellung wird eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit einer Funktion $B(z)$ durch eine universelle Konstante $c \geq 1$ gegeben. Aus (x) folgt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $B(z)$, so daß $f(z)$ schlicht ist.

H. Wittich (Karlsruhe)