MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7|1970

Wahrscheinlichkeitstheorie

1. 3. bis 7. 3. 1970

Nach insgesamt 10 Tagungen über Wahrscheinlichkeitstheorie und Math. Statistik seit 1956 ist in diesem Jahr erstmalig jedes der beiden Gebiete mit einer eigenen Tagung in Oberwolfach vertreten. Die Tagung über Wahrscheinlichkeitstheorie stand unter der Leitung von Herrn Hans G. Kellerer, Bochum. Die gegenüber früheren Tagungen geringere Teilnehmerzahl (40, darunter 14 Teilnehmer aus dem Ausland) und die größere Übereinstimmung der Interessen-Schwerpunkte führten zu einem besonders intensiven Gedankenaustausch auch während der vortragsfreien Stunden. Es wurde vereinbart, auch künftig getrennte Tagungen über Wahrscheinlichkeitstheorie und Math. Statistik vorzusehen.

Die Tagung stand unter dem Eindruck des unerwarteten Todes von Alfred Rényi, dem die vorausgegangenen Tagungen besonders viel zu verdanken hatten, und der auch diesmal einen Vortrag angekündigt hatte. Seine Schüler I. Csiszár u. P. Révész übernahmen die schwere Aufgabe, die Tagung mit einem Rückblick auf das Leben und weitgespannte Werk Rényis zu eröffnen.

An insgesamt 9 Halbtagen (trotz des ungewöhnlich hohen Schnees fand am Mittwoch nachmittag die traditionelle gemeinsame Wanderung statt) folgten 27 weitere Vorträge, die im folgenden in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt sind.

Teilnehmer:

L. Arnold, Stuttgart
C. Bandelow, Bochum
P. Bártfai, Budapest
V. Baumann, Stuttgart
D. Bierlein, Karlsruhe
H. H. Bock, Freiburg
K. Bosch, Braunschweig
I. Csiszár, Budapest
M. Csörgö, Montreal
U. Dieter, Karlsruhe
F. Eicker, Freiburg
W. Fieger, Karlsruhe
P. Gänßler, Kopenhagen
P. Georgiou, Heidelberg
G. Helmberg, Eindhoven
P. Herchenbach, Bochum
H. Heyer, Tübingen
K. Hinderer, Hamburg
J. Hoffman-Jørgensen, Aarhus
D. A. Kappos, Athen
H. G. Kellerer, Bochum
H. Kesten, Ithaca
O. Krafft, Münster
P.-A. Meyer, Straßburg
J. Michalicek, Hamburg
D. Morgenstern, Freiburg
U. G. Oppel, München
D. Plachky, Münster
T. Postelnicu, Bukarest
P. Révész, Budapest
H. Richter, München
B. Rosén, Stockholm
H. Rost, Frankfurt
M. Schaefer, Münster
R. Schassberger, Stuttgart
N. Schmitz, Karlsruhe
F. L. Spitzer, Ithaca
F. Topsoe, Kopenhagen
E.-A. Weiss, Bonn
H. Witting, Münster

Vortragsauszüge:

L. ARNOLD (u. R. SCHASSBERGER): Statistische Modelle für schwere Atomkerne

Die Hamilton-Operatoren schwerer Kerne sind nicht bekannt. Deshalb versucht man, durch statistische Annahmen die wesentlichen Eigenschaften der Kernspektren beschreiben zu können. Das allgemeinste statist. Kernmodell besteht aus einer Menge $\mathcal{T}$ selbstadjungierter Operatoren in einem separablen Hilbertraum, einer Menge $\mathfrak{U}$ von unitären Operatoren, die durch $H \longrightarrow UHU^{-1}$ $(H \in \mathcal{T},\ U \in \mathfrak{U})$ in $\mathcal{T}$ als Transformationsgruppe wirken, und einer "Gleichverteilung" auf $\mathcal{T}$, d. h. einer Wahrscheinlichkeit, die gegen $\mathfrak{U}$ invariant ist. Das Modell von Wigner wird diskutiert und kritisiert. Weiter werden alle invarianten Wahrscheinlichkeiten im Falle einer kompakten

Gruppe $\mathfrak{U}$ und eines lokal-kompakten Raumes γ angegeben. Zwei neue Modelle, die die Nachteile des Wignerschen vermeiden, werden beschrieben.

P. BÁRTFAI: Große Abweichungen in der Wartetheorie

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Charakterisierung der großen Werte der Wartezeit und der Länge der Warteschlange in den Wartemodellen GI/G/1 und GI/G/s. Diese Sätze können in zwei Gruppen eingeteilt werden: die Sätze in der ersten Gruppe sind dem Satz vom iterierten Logarithmus ähnlich, die anderen bilden die Analoga des Cramérschen und Chernoffschen Satzes über große Abweichungen.

V. BAUMANN: Subjektive Wahrscheinlichkeit

Um die Bewertung von Wetten auf das Bernoulli-Prinzip zurückzuführen, gaben von NEUMANN-MORGENSTERN und SAVAGE (1954) normative Axiome an, die jedoch unendlich viele unsichere Ereignisse, insbesondere beliebig kleiner Wahrscheinlichkeit implizieren. PFANZAGL (1959/1968) gab Axiome des normativen Verhaltens an, die auch für nur endlich viele Ereignisse eine simultane Skalierung des Nutzens und der subjektiven Wahrscheinlichkeit erlauben. Dazu ist eine Funktionalgleichung für 6 Funktionen und 4 unabhängige Variable zu lösen. Das letzte der Pfanzagl'schen Postulate läßt sich so abschwächen, daß es genügt, eine Funktionalgleichung für 4 Funktionen und 3 unabhängige Variablen zu lösen; dabei läßt sich auch die Voraussetzung entbehren, daß die Operation "Sicherheitsäquivalent" auflösbar ist.

I. CSISZÁR: Über die Stetigkeit der Faltungsoperation auf topologischen Gruppen

Es ist bekannt, daß für gleichmäßig straffe reguläre Borelmaße auf einer topologischen Gruppe (oder Halbgruppe) aus $\mu_\alpha \to \mu$, $\nu_\alpha \to \nu$ auch $\mu_\alpha \nu_\alpha \to \mu\nu$ folgt. Es wird gezeigt, daß diese Behauptung für τ-reguläre Borelmaße auf topologischen Gruppen auch ohne die Straffheitsbedingung allgemein gültig ist. Dieses Resultat ergibt sich als eine Folgerung eines allgemeinen Satzes bezüglich der schwachen Stetigkeit der Faltungsoperation im Dualraum des Banachraumes $U_r(X)$ aller beschränkten rechts gleichmäßig stetigen Funktionen auf der topologischen Gruppe X. Einige Anwendungsmöglichkeiten werden angedeutet.

M. CSÖRGÖ: An Invariance Principle for the Empirical Process with Random Sample Size

Let $C = C[0,1]$ be the space of continuous functions on $[0,1]$ with the uniform topology. Let $\mathcal{B}$ be the σ-field of Borel sets of C. Let $(\Omega,\mathcal{A},P)$ be some probability space and W be the Wiener measure on $(C,\mathcal{B})$. Let W^0 be the Gaussian measure on $(C,\mathcal{B})$ constructed by setting $W_t^0 = W_t - tW_1$, where $\{W_t(\omega) : 0 \leq t \leq 1\}, \omega \in \Omega$ is the Wiener process corresponding to W on $(C,\mathcal{B})$. Let $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $S_0 = 0$, $n = 1,2,\ldots$ be the partial sum sequence of random variables $\{\xi_n\}$ defined on $(\Omega,\mathcal{A},P)$. For each n, let ν_n be a positive-integer-valued random variable defined on the same probability space as the ξ_n. Define a random element X_n of C by

$$(1) \quad X_n(t,\omega) = W_n(t,\omega) + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}(\omega)/n^{1/2} - tW_n(1,\omega)$$

where $W_n(t,\omega) = S_{[nt]}(\omega)/n^{1/2}$, and Y_n, an other random element of C, by $Y_n(t,\omega) = X_{\nu_n(\omega)}(t,\omega)$ with X_n as in (1). Given some conditions on ν_n and ξ_n it is proved that $Y_n \xrightarrow{D} W^0$. This result is applied to prove the random-sample-size Kolmogorov-Smirnow theorems.

U. DIETER: Statistische Abhängigkeiten bei Pseudozufallszahlen

Pseudo-Zufallszahlen werden nach der linearen Kongruenzmethode erzeugt: m,a,r,y_0 seien ganze Zahlen. Die Folge $\{y_i\}$ wird durch $y_{i+1} \equiv ay_i + r \pmod{m}$ mit $0 \leq y_i < m$ eindeutig bestimmt. Die Brüche $x_i = y_i/m$ sind bei maximaler Periodenlänge im Intervall $[0,1)$ gleichverteilt (HULL-DOBELL). Es läßt sich zeigen, daß folgende statistische Größen auf arithmetische Summen (verallgem. Dedekindsche Summen) führen, die sich exakt berechnen lassen:

(i) Die Autokorrelation zwischen zwei Pseudo-Zufallszahlen,

(ii) $P(x \leq x_i < x + \Delta x, y \leq x_{i+s} < y + \Delta y) - \Delta x \Delta y$,

(iii) $P(x_{i+s} < x_i < x_{i+t}) - \frac{1}{6}$, $s \neq t,\ s \neq 0,\ t \neq 0$.

Alle drei Größen sollen nahe bei 0 liegen. Eine Analyse des Berechnungsvorgangs der arithmetischen Summen zeigt, daß man dies angenähert erreichen kann: Man wähle den Faktor a so, daß der Kettenbruch a/m möglichst lang wird. Die Wahl der Größe r ist von geringem Einfluß. Insbesondere sind dann nach (ii) x_i und x_{i+1} angenähert statistisch unabhängig.

W. FIEGER: Zur Charakterisierung der Normalverteilung

Sind $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit einer Verteilungsfunktion $\in \{G(y-\lambda) : \lambda \in R^1\}$, und ist $T(u)$ eine konvexe, in jedem $u \neq 0$ differenzierbare Funktion mit $T(u) = T(-u)$, mit $T(u) > T(0) = 0$ für jedes $u \neq 0$ und mit einigen weiteren Regularitätseigenschaften, so sind folgende beiden Aussagen gleichwertig:

(1) $d(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n} \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$ ist simultan bestes verschiebungsinvariantes Schätzverfahren für den unbekannten wahren Parameter λ für jede Schadensfunktion $s(\lambda, d) = \max\{0,\ T(\lambda - d) - \gamma\}$ $(\gamma \geq 0)$.

(2) Entweder ist $G(y)$ die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 oder es ist $p_{\lambda=0}(X=0) = 1$.

Beim Beweis dieser Äquivalenz wird ein Lemma über symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzt.

P. GÄNSSLER (u. J. PFANZAGL): Konvergenz bedingter Erwartungswerte

Sei $(X, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum und $P_n | \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge von W.-Maßen, die in irgend einem Sinne gegen ein W.-Maß $P_0 | \mathcal{F}$ konvergieren möge. Ist $\mathcal{F}_0$ eine sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$, $f \in \bigcap_{n=0} \mathcal{L}_1 (X, \mathcal{F}, P_n)$, und bezeichnet $p_n(f, \cdot)$ eine Version des bedingten Erwartungswertes von f bezüglich $P_n | \mathcal{F}$ bei gegebenem $\mathcal{F}_0$, so stellt sich das Problem, hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß $p_n(f, \cdot)$ in einem

gewissen Sinne gegen $p_o(f,\cdot)$ konvergiert. Eine Antwort hierzu gibt das folgende Theorem: Sei $\mu|\mathcal{F}$ ein σ-endliches Maß, welches $\{P_n|\mathcal{F} : n = 0,1,2,..\}$ dominiert, h_n bzw. h_{on} Dichten von $P_n|\mathcal{F}$ bezüglich $\mu|\mathcal{F}$ bzw. von $P_n|\mathcal{F}_o$ bezüglich $\mu|\mathcal{F}_o$.
Es gelte (i) $h_n \longrightarrow h_o$ μ-f.ü. und (ii) $h_{on} \longrightarrow h_{oo}$ μ-f.ü.
Dann gilt: 1.) $p_n(f,\cdot) \longrightarrow p_o(f,\cdot)$ P_o-f.s. für beliebige Versionen $p_n(f,\cdot)$ und jede beschränkte $\mathcal{F}$-meßbare Funktion f.

2.) Ist μ ein W.-Maß, zu welchem eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit $\tilde{\mu}(A,\cdot)$ existiert, dann existieren reguläre bedingte W. $p_n^*(A,\cdot)$ derart, daß $\sup\limits_{A\in\mathcal{F}} | p_n^*(A,\cdot) - p_o^*(A,\cdot)| \longrightarrow 0$ P_o-f.s.

3.) Ist $\mathcal{F}$ abzählbar erzeugt, so gilt die in 2.) behauptete Konvergenz für alle regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Zusatz: Ersetzt man (ii) durch (ii'): $\mu(\sup\limits_n h_n) < +\infty$, so gelten die Behauptungen 1.) - 3.).

An Hand von Beispielen zeigt man, daß 1.) wirklich nur für beschränkte f gilt, daß (i) nicht (ii) impliziert und daß (i) allein nicht hinreichend ist. Selbst unter (ii') ist die gleichmäßige Konvergenz der $P_n|\mathcal{F}$ gegen $P_o|\mathcal{F}$ nicht hinreichend für P_o-f.s. bedingte Konvergenz. Andererseits impliziert gleichmäßige Konvergenz der $P_n|\mathcal{F}$ gegen $P.|\mathcal{F}$ die Aussagen 1.), 2.) für abzählbar erzeugtes $\mathcal{F}$ und 3.), falls man "P_o-f.ü." durch "P_o-stochastisch" ersetzt.

P. HERCHENBACH: Zur strengen Quotientengrenzwerteigenschaft Markovscher Ketten

Eine irreduzible, aperiodische und R_p-rekurrente Übergangsmatrix $P = (P(x,y))_{x,y\in R}$ besitzt definitionsgemäß die strenge Quotientengrenzwerteigenschaft ("P$\in$SRLP"), falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{n+m}(x,y)}{P_n(z,w)}$ für alle $x,y,z,w \in R$, $m \in \mathbb{Z}$ existiert. Der Satz von Orey und Pruitt (Proc. AMS 1965), für den ein einfacherer

Beweis angegeben wurde, ist optimal im Sinne von

Satz 1: ($\exists x,y,z,w \in R$, $m \in \mathbb{Z}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+m}(x,y)}{P_n(z,w)} < \infty \succ P \in$ SRLP) $\Leftrightarrow$ ($m \neq 0$, $x = z$, $y = w$).

Insbesondere für das Studium des von Orey aufgeworfenen Problems, ob die Konvergenz von $\left(\frac{P_n(x,y)}{P_n(z,w)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x,y,z,w \in R$ $P \in$ SRLP impliziert, sind die folgenden Aussagen aufschlußreich:

Satz 2: Zu $x \in R$, $T \subset \mathbb{N}$ mit $|T| = \infty$ und ggT $T=1$ existieren $P \in$ SRLP und $P' \notin$ SRLP, P und P' rekurrent auf R, mit $T = \{n \in \mathbb{N}: P_n(x,x) > 0\}$ $= \{n \in \mathbb{N}: P'_n(x,x) > 0\}$.

Satz 3: Die von Kingman und Orey angegebene hinreichende Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{x\in R} P_n(x,x) > 0$ für $P \in$ SRLP kann nicht abgeschwächt werden zu:

$\exists n \in \mathbb{N}: P_n(x,x) > 0$ für alle $x \in R$.

H. HEYER: ε-Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen (auf lokalkompakten Gruppen)

Es wird ein Zusammenhang hergestellt zwischen Zerlegbarkeitsfragen für W.-Maße im Sinne der Faltung einerseits und der Erschöpftheitsrelation im Sinne Blackwells andererseits.

Zwei Experimente $\mathfrak{X} := (X,\mathfrak{A},(P_i)_{i\in I})$ und $\mathfrak{Y} := (Y,\mathfrak{B},(Q_i)_{i\in I})$ stehen in der Beziehung $\mathfrak{X} \succ_\varepsilon \mathfrak{Y}$ ($\varepsilon \geq 0$), falls es einen Markoff-Kern T von $(X,\mathfrak{A})$ nach $(Y,\mathfrak{B})$ gibt mit $\|T P_i - Q_i\| \leq \varepsilon$ für alle $i \in I$. Für eine lokalkompakte abelsche Gruppe G mit abzählbarer Basis werden für W.-Maße μ,ν auf G die zugehörigen Translationsexperimente $\mathfrak{X}_\mu := (G,\mathfrak{L},(\mu_x)_{x\in G})$, $\mathfrak{X}_\nu := (G,\mathfrak{L},(\nu_x)_{x\in G})$ erklärt. Dabei ist für jedes Maß λ auf G und jedes $x \in G$ das Maß λ_x durch $\lambda_x(B) := \lambda(Bx^{-1})$ für alle $B \in \mathfrak{L}$ definiert. Ist nun $\mathfrak{X}_\mu$ dominiert durch ein σ-endliches Maß auf G (etwa durch das Haar-Maß auf G), so sind äquivalent

(i) $\mathfrak{X}_\mu \succ_\varepsilon \mathfrak{X}_\nu$

(ii) Es existiert ein W.-Maß ϱ auf G mit $\|\varrho \times \mu - \nu\| \leq \varepsilon$,

insbesondere

(i') $\mathfrak{X}_\mu \sim \mathfrak{X}_\nu$ (d.h. $\mathfrak{X}_\mu \succ \mathfrak{X}_\nu$ und $\mathfrak{X}_\nu \succ \mathfrak{X}_\mu$)

(ii') $\mu = \nu + \varepsilon_x$ für ein $x \in G$

D.A. KAPPOS: Eine Verallgemeinerung stochastischer Integrale

$m: \mathcal{L} \longrightarrow S$ sei ein nicht-negatives Maß auf einer Booleschen σ-Algebra $\mathcal{L}$ von Teilmengen einer Grundmenge Ω mit Werten in einer vollständigen Verbandsgruppe S. Übergang zur σ-Algebra $\mathfrak{A} := \mathcal{L}/\mathfrak{N}$ der Restklassen modulo Nullmengen führt zu einem strikt positiven Maß $\mu: \mathfrak{A} \longrightarrow S$. Für eine weitere vollständige Verbandsgruppe T bezeichne $O(\mathfrak{A},T)$ die vollständige Verbandsgruppe aller Carathèodoryschen Ortsfunktionen über $\mathfrak{A}$ mit Werten in T. Für eine dritte vollständige Verbandsgruppe Ψ sei schließlich $T \times S \ni (\tau, s) \longmapsto \tau \circ s \in \Psi$ ein distributiver und bezüglich der σ-Konvergenz stetiger Produkt-Operator mit $\tau \circ s \geq \theta_\Psi$ für $\tau \geq \theta_T$, $s \geq \theta_S$.

In $O(\mathfrak{A},T)$ liegt die Verbandsgruppe $\mathcal{E}(\mathfrak{A},T)$ aller elementaren Ortsfunktionen dicht bezüglich der σ-Konvergenz. $\tau I a$ bezeichne die Ortsfunktion, die für $a \in \mathfrak{A}$ den Wert $\tau \in T$ und für a^c den Wert $\theta_T \in T$ annimmt. Für $f = \sum_{j \geq 1} \tau_j I a_j \in \mathcal{E}(\mathfrak{A},T)$ mit $f \geq \theta_T$ wird $I(f) = \sum_{j \geq 1} \tau_j \circ \mu(a_j)$ definiert, falls diese Reihe in Ψ σ-konvergiert. Dieses Integral kann in der üblichen Weise auf eine möglichst große Teilmenge von $O(\mathfrak{A},T)$ fortgesetzt werden, und unter gewissen Zusatzvoraussetzungen über S,T und Ψ lassen sich die meisten Sätze der klassischen Integrationstheorie übertragen. Ist $T = \mathbb{R}$ und $S = \Psi = \mathcal{W}$ = Vektorverband aller reellen Zufallsvariablen über einer Wahrscheinlichkeitsalgebra $(\mathcal{L},p)$, so erhält man das stochastische Integral. Für $S = T = \Psi = \mathcal{W}$ ergibt sich eine Verallgemeinerung des sogenannten Martingal-Integrales.

H. KELLERER: Markov-Komposition von Martingalen

Ist $\mathcal{I}_0$ der konvexe Kegel aller isotonen, konvexen und Lipschitz-stetigen Funktionen $f|\mathbb{R}$, so definiert "$\int f d\mu_1 \leq \int f d\mu_2$ für alle $f \in \mathcal{I}_0$" eine teilweise Ordnung "$\prec$" in der Gesamtheit $\mathcal{M}_0$ aller W.-Maße $\mu|\mathcal{L}$ mit $\int |x| d\mu < \infty$.

Satz 1: Gilt $\lambda \prec \nu$, so existiert ein Markov-Kern P mit $\lambda P = \nu$ und folgenden beiden Eigenschaften: (*) $Pf \geq f$ für $f \in \mathcal{I}_0$, (**) $Pf \in \mathcal{I}_0$ für $f \in \mathcal{I}_0$ (Verschärfung von Ergebnissen, die auf Hardy-Littlewood-Polya, Blackwell u.a. zurückgehen).

Satz 2: Ist T total-geordnet, so existiert zu jeder aufsteigenden Familie $(\mu_t)_{t\in T}$ in $\mathcal{M}_o$ ein stoch. Prozeß $(X_t)_{t\in T}$ mit diesen Marginalverteilungen, der gleichzeitig (a) ein Submartingal, (b) ein Markov-Prozeß ist (Verallgemeinerung von Ergebnissen, die auf Straßen und Doob zurückgehen).

H. KESTEN: Limit points of a normalized random walk

We deal with the accumulation points of $\gamma(n)^{-1} S_n$ for a random walk S_n and a fixed sequence $\gamma(n) \longrightarrow \infty$. It turns out that there exists a closed non-random set $B(F,\{\gamma(n)\})$ such that $P\{\text{set of accumulation points of } \{\gamma(n)^{-1}\cdot S_n\}_{n\geq 1} \text{ is } B(F,\{\gamma(n)\})\} = 1$. B depends only on $\{\gamma(n)\}$ and the distribution F of the steps $S_k - S_{k-1}$. The structure of B is then investigated for $\gamma(n) = n^{\alpha}$. E.g. for $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ it is proved that B must contain the whole real line if B contains any finite point. It is conjectured that this statement remains valid for $\alpha = \frac{1}{2}$. For $\alpha = 1$ any closed set B is possible.

O. KRAFFT: Dualisierung von Tschebyscheff Schranken

Gilt $P(A) \leq \alpha$ für alle W.-Maße P mit $E_P f_i = c_i$, $i=1,2,\ldots,m$, wobei A, f_i, c_i gegeben sind, so heißt α eine (obere) Tschebyscheff-Schranke für das Problem (A,f,c). Das Problem der Bestimmung einer scharfen Tschebyscheff-Schranke läßt sich behandeln als ein Problem des (unendlichen) linearen Programmierens. Am Beispiel der Normalverteilung wird die Gültigkeit des korrespondierenden Dualitätssatzes für den Fall von abzählbar und überabzählbar unendlich vielen Nebenbedingungen untersucht. Es ergeben sich dabei einige brauchbare Abschätzungen und Reihenentwicklungen für die Normalverteilung.

P.-A. MEYER: Some results in strict sense prediction theory (continuous time)

The following results which are due to J. de Sam Lazaro and the speaker, give a precise meaning to the problem of strict sense prediction for continuous time Kolmogorov flows.

Let $(\Omega,\mathcal{F},P)$ be a complete probability space with a flow (Θ_t) and an increasing family $(\mathcal{F}_t)$ of σ-fields. We set $T_t f = f \circ \Theta_t$ and $E_t = E[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ and $E_0 T_t = T_t E_t$ (commutation relation). The problem consists in chosing the prediction operator E_0 in such a (canonical) way that $E_0 f$ is not defined up to sets of measure 0, but up to polar sets (a set A is polar if for almost all ω, $I_A(\Theta_t \omega)$ is identically 0). It is shown that if the probability space is properly constructed, such a version $g = E_\Theta f$ can be constructed that $E[f \circ \Theta_T \mid \mathcal{F}_T] = g \circ \Theta_T$ for every stopping time T (finite), and the process $(g \circ \Theta_t)$ is "well measurable": g is unique up to polar sets.

J. MICHALICEK: Ein Satz über abhängige Zufallsgrößen

Satz: Es sei X_i eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gibt es einen W.-Raum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und unabhängige Zufallsvariable Y_i' auf Ω' und Funktionen $g_i(z_1, \ldots, z_i)$ von $R_i \longrightarrow R_1$, die monoton in der letzten Komponente z_i sind, so daß die X_i's mit

$$X_1' = g_1(Y_1'),$$
$$X_2' = g_2(X_1', Y_2'),$$
$$\vdots$$
$$X_i' = g_i(X_1', X_2', \ldots, X_{i-1}', Y_i')$$

dieselben gemeinsamen Verteilungsfunktionen haben wie die ursprünglichen Variablen X_i.

Mit Hilfe dieses Satzes wurde eine Grenzwerteigenschaft einer speziellen Art von homogenen Markov-Ketten hergeleitet und eine Definition für Abhängigkeit von 2 Zufallsvariablen, die unabhängig ist von deren einzelnen Verteilungen, gegeben.

U.G. OPPEL: Ein Marginalproblem für W.-Maße

1.) Sei $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i): i \in I)$ eine Familie von normierten Maßräumen. Ist $\varphi := (\varphi_i : i \in I)$ eine Familie von maßtreuen Abbildungen $\varphi_i: (X_k, \mathcal{B}_k, \mu_k) \longrightarrow (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ mit φ_k zusätzlich injektiv und $\varphi_k(K_k) \in \mathcal{B}_k$ für $K_k \in \mathcal{B}_k$ und definiert man $D^\varphi := \{(\varphi_i(x_k): i \in I): x_k \in X_k\}$, so ist das durch $\mu_\varphi(M) := \mu_k(pr_k(D^\varphi \cap M)$ für $M \in {}^K\Pi \mathcal{B}_i$ bestimmte Maß $\mu_\varphi|^B\Pi\mathcal{B}_i$ ein Extrempunkt der nichtleeren, konvexen Menge $\mathcal{F} := \{\mu|^B\Pi\mathcal{B}_i: \mu$ normiertes Maß mit $\mu_i = \mu \circ pr_i^{-1}\ \forall\ i \in I\}$.

2.) Für den Fall, daß I endlich oder abzählbar ist und $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ der Lebesguesche Maßraum $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ für alle $i \in I$ ist, ist $\mathcal{F}$ schwach kompakt und die Menge der Extrempunkte von $\mathcal{F}$ liegt schwach dicht in $\mathcal{F}$ und bildet mit der relativierten schwachen Topologie einen Baireschen Raum. Außerdem liegen sogar abzählbar viele Extrempunkte von $\mathcal{F}$ schwach dicht in $\mathcal{F}$, nämlich solche, die zu einer Familie $(\Psi_i: i \in I)$ von stückweise direkt kongruenten Abbildungen gehören.

Schließlich werden noch Beispiele und Eigenschaften von Extrempunkten angegeben.

D. PLACHKY: Eine neue Methode zur Behandlung von Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen

Ausgangspunkt ist das Variationsproblem $\sup\{\int \varphi dP: \int \varphi dQ \leq \alpha\}$, P,Q Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\Omega, \mathfrak{A})$ und φ eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion, $0 \leq \varphi \leq 1$ sowie $0 < \alpha < 1$. Durch Dualisierung dieses Problems und geeigneter Abschätzung der dualen Zielfunktion erhält man die Ungleichungen:

$$1-\beta \geq (1-\alpha)^{\frac{\tau}{\tau-1}} e^{-I_\tau(q:p)}, \tau > 1 \text{ und } 1-\beta \leq \alpha^{\frac{\tau}{\tau-1}} (1-\tau)\tau^{\frac{\tau}{1-\tau}} e^{-I_\tau(q:p)}, 0 < \tau < 1.$$

Diese Ungleichungen entstanden in Zusammenarbeit mit O. Krafft und sind im Falle $P = R(0,\vartheta)$, $\vartheta > 1$, $Q = R(0,1)$ scharf. Hierbei ist β das obige Supremum, p,q die zu P,Q gehörenden Dichten (bzgl. eines σ-finiten Maßes) und $I_\tau(q:p)$ die Information der Ordnung τ von q bzgl. p. Mit Hilfe dieser Ungleichungen erhält man folgendes Resultat über eine Wahrscheinlichkeit großer Abweichung:

Es sei $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

(1) $m_n(t) = \int e^{tX_n} dP < \infty$, $t \in [0,T)$, $T > 0$,

(2) $\frac{1}{n}\psi_n^{(i)}(t) \longrightarrow C_i(t)$, $t \in [0,T)$, $i=0,1,2$, mit $\psi_n(t) = \ln m_n(t)$,

(3) $\frac{1}{n}\psi_n^{(3)}(t)$ ist lokal beschränkt in $(0,T)$,

(4) $C_2(t) > 0$, $t \in [0,T)$.

Dann gilt für jede Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $a_n \to a \in \{C_1(t): t \in (0,T)\}$

$$\sqrt[n]{P(X_n > na_n)} \longrightarrow \exp\{C_0(h) - ha\}.$$

Dabei ist $h \in (0,T)$ die eindeutig bestimmte Lösung von $a = C_1(h)$.

Dieses Resultat stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von Sievers, AMS 40 (1969) dar.

T. POSTELNICU: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der ärztlichen Diagnose

Es sei R die Menge der Symptome beobachteter Fälle und D_j die entsprechende Enddiagnose. Es sei S der Symptomenkomplex eines neuen Patienten. Auf Grund der Informationen über R und S wird mit Hilfe der Bayesschen Formel eine Aussage über die zukünftige Wahrscheinlichkeit der Diagnose D_j gemacht. Es folgt eine Verallgemeinerung für den stetigen Fall von Abmessungen eines Symptoms.

P. RÉVÉSZ: On M-mixing systems

A sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of square integrable random variables is called M-mixing system, if

$$(i)\quad \left| \int_\Omega \xi_{i_1}^{r_1} \xi_{i_2}^{r_2} \cdots \xi_{i_k}^{r_k} \xi_{j_1}^{s_1} \xi_{j_2}^{s_2} \cdots \xi_{j_l}^{s_l} - \int_\Omega \xi_{i_1}^{r_1} \xi_{i_2}^{r_2} \cdots \xi_{i_k}^{r_k} \int_\Omega \xi_{j_1}^{s_1} \xi_{j_2}^{s_2} \cdots \xi_{j_l}^{s_l} \right| \leqq f(j_1 - i_k)$$

where $i_1 < i_2 < \ldots i_k < j_1 < j_2 < \ldots < j_l$; r_i and s_j $(i=1,2,\ldots k;$ $j=1,2,\ldots l)$ can be equal to 1 or 2 and $f(n)$ is a decreasing function with $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. If condition (i) holds only in the case when $k+l \leqq 4$ the system $\{\xi_i\}$ is called 4-wise multiplicative. The following theorems can be formulated:

Th. 1: If $\{\xi_i\}$ is a 4-wise multiplicative system with $E(\xi_i) = 0$, $E(\xi_i^4) \leqq K$ and $f(l) \leqq e^{-dl}$ then $\sum c_k \xi_k$ is convergent with probability 1 provided that $\sum_k c_k^2 \log_r k < \infty$ where $\log_r k$ is the r-th iterated of log and r is an arbitrary integer.

Th. 2: If $\{\xi_i\}$ is a mult. system with $E(\xi_i) = 0$, $E(\xi_i^2) = 1$, $|\xi_i| \leqq K$, $f(l) \leqq e^{-dl}$ then $\{\xi_i\}$ obeys the central limit theorem.

Th. 3: If $\{\xi_i\}$ is a mult. system with conditions of Th. 2 then

$$P\left(\overline{\lim_n} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n \log \log n}} \leqq 7\right) = 1.$$

H. RICHTER: Zur Konvergenz der a-posteriori-Verteilung

Sei $\sum$ die Menge der Polynomialverteilungen $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$

mit $\Theta_\varkappa > 0$ und $\sum\limits_\varkappa \Theta_\varkappa = 1$. Die wahre Verteilung sei $p = (p_1,\ldots,p_k) \in \sum$. Auf $\sum$ wird ein Abstand $d(\Theta;p)$ und eine Metrik $k(\Theta',\Theta'')$ eingeführt. Auf $\sum$ sei gegeben die a-periori-Verteilung φ_o mit dem Träger T; φ_n sei die a-posteriori-Verteilung nach n-maliger unabhängiger Wiederholung. Gesucht ist φ_n bei $n \longrightarrow \infty$, falls $p \notin T$, so daß das klassische Ergebnis von Le Cam nicht gelten kann. Es ergeben sich:

Theorem 1: Ist $d_o = \min\limits_T d(\Theta;p)$, so konzentriert sich p-fast sicher φ_n bei $n \longrightarrow \infty$ auf $A_o = T \cap \{\Theta : d(\Theta;p) = d_o\}$.

Theorem 2: Zu jedem $\Theta^* \in A_o$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m_o > 0$, so daß p-fast sicher unendlich oft für alle $\Theta \in T$ und $k(\Theta,\Theta^*) \geq \varepsilon$ gilt:

$$\frac{d\varphi_n}{d\varphi_o}(\Theta^*) \geq \frac{d\varphi_n}{d\varphi_o}(\Theta) \cdot e^{m_o\sqrt{2n \log\log n}}.$$

Beweismittel: Ist $n_\varkappa^{(n)}$ die absolute Häufigkeit des Eintretens von $\varkappa$ bei n Wiederholungen und ist $z_\varkappa^{(n)} = (n_\varkappa^{(n)} - n\cdot p_\varkappa)/\sqrt{2n \log\log n}$, so ist p-fast sicher die Menge der Häufungspunkte von $(z_1^{(n)},\ldots,z_k^{(n)})$ ein Ellipsoid nebst Rand in $\sum\limits_\varkappa z_\varkappa^{(n)} = 0$.

B. ROSÉN: On bounds on the central moments of even order of a sum of independent random variables

The following result will be discussed.

Theorem: Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent random variables with mean 0. Let p be a natural number and let $\lambda_r(p)$ and $\varrho_r(p)$ be real numbers such that

$$EX_r^{2K} \leq \lambda_r^{2K}(p)\, \varrho_r(p),\quad K = 1,2,\ldots,p,\quad r = 1,2,\ldots,n.$$

Then,

$$E\left(\sum_{r=1}^n X_r\right)^{2p} \leq C(p)\max\left(\left(\sum_{r=1}^n \lambda_r^2(p)\varrho_r(p)\right)^p, \sum_{r=1}^n \lambda_r^{2p}(p)\varrho_r(p)\right)$$

where C(p) is a number which only depends on p.

H. ROST: Die Stoppverteilungen eines Markov-Prozesses

Wenn X_t, $t \in R_+$ oder $t \in N$, ein spezieller Markov-Prozeß zur Übergangshalbgruppe (P_t) ist mit μ als Startverteilung, so wird gefragt nach allen Verteilungen ν von X_T, wobei T eine Stoppzeit des Prozesses ist. Es zeigt sich, daß genau die Maße ν auftreten, deren Potential durch das Potential von μ majorisiert wird. Es werden zwei völlig verschiedene Beweismethoden für den zeitlich diskreten und den kontinuierlichen Fall vorgeführt. Im zeitlich diskreten Fall wird noch (in Analogie zum "Lemma von Skorokhod") gezeigt:

Wenn $\int f d\mu \leq \int f d\nu$ für eine hinreichend große Klasse $\mathcal{F}$ von positiven subharmonischen Funktionen f, so gibt es eine Stoppzeit $T < \infty$ derart, daß die Verteilung ν' von X_T kleiner als ν ist und daß gilt

$$\int f d\nu' = \mathcal{E}_\mu f \circ X_T = \uparrow \lim_n \mathcal{E}_\mu f \circ X_{T \wedge n}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

R. SCHASSBERGER: Die Stufenmethode in der Theorie der Warteschlangen

Die Stufenmethode besteht darin, auf $[0,\infty)$ konzentrierte Verteilungen durch solche des Typs

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k E_k(t;\lambda)$$

zu approximieren, wobei $\{p_k\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $E_k(t;\lambda)$ die Verteilungsfunktion der k-fachen Faltung der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist. Bei Wartesystemen ist etwa die Bedienungszeit eines Kunden gemäß F(t) verteilt, wenn er mit Wahrscheinlichkeit p_k k aufeinanderfolgende, unabhängige, mit Parameter λ exponentiell verteilte Bedienungsphasen durchlaufen muß.

Es wird gezeigt, wie man mit dieser Methode im Wartemodell GI/G/1 neue Ergebnisse erzielen kann. Es wird darauf hingewiesen, daß die Methode bei vielen anderen Modellen zu Resultaten führt.

N. SCHMITZ: Zur Umkehrung des Satzes von Wald und Wolfowitz

Die auf der vorigen Tagung geäußerte Vermutung, der Satz von Wald und Wolfowitz über die simultane Optimalität des Likelihoodquotienten-Sequenztests (LQST) bzgl. des Stichprobenumfangs bei unabhängigen Versuchswiederholungen gestatte - von trivialen Ausnahmen abgesehen - eine Umkehrung, wird durch den folgenden Satz wiederlegt: $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen, deren Verteilungen einer Familie von Verteilungsfunktionen mit monotonem Dichtequotienten in ϑ und T(x) angehören. Es seien

$$H_1: \mathfrak{W}(X_1) = \mathfrak{W}_{\vartheta_1}, \mathfrak{W}(X_\nu) = \mathfrak{W}_{\vartheta_2} \text{ für } \nu \geq 2;$$

$$H_2: \mathfrak{W}(X_1) = \mathfrak{W}_{\vartheta_4}, \mathfrak{W}(X_\nu) = \mathfrak{W}_{\vartheta_3} \text{ für } \nu \geq 2, \qquad \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 < \vartheta_4.$$

Dann gilt für jeden LQST $\vartheta^*(k_1,k_2)$

$$E_i(N;\delta^*) \leq E_i(N;\delta),\ i=1,2$$

für alle δ mit $\alpha_i(\delta) \leq \alpha_i(\delta^*)$.

F. SPITZER: Interaction of Markov processes

Let D be a finite connected subset of $\mathbb{Z}^\nu$. A (two-valued) random field is a probability space $(\Omega,\mathcal{F},P)$ with $\Omega = \{0,1\}^D$ and $\mathcal{F}$ all subsets of Ω. Such a random field is called a Markov random field (MRF) if (1) $P(x) > 0$ for each $x \in \Omega$, (2) for each $t \in D$, the conditional probabilities $P[x(t) = 1 \mid x(\cdot)$ on $\Omega - \{t\}]$ depend only on the values of $x(\cdot)$ at the neighbors of t, (3) the conditional probabilities in (2) are invariant under translation. A Gibbs random field (GRF) is defined as a random field described by the explicit formula

$$P(x) = Z^{-1} \exp(-\tfrac{1}{2} \sum_{t\in D} \sum_{s\in D} x(s)x(t)U(s,t)),$$

where $U: \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu \longrightarrow R$ is a pair potential satisfying

(1) $U(s,t) = U(t,s)$,
(2) $U(s,t) = 0$ if $|s-t| > 1$,
(3) $U(s,t) = U(0,t-s)$.

Theorem: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ is a MRF $\Leftrightarrow$ $(\Omega,\mathcal{F},P)$ is a GRF. The proof was hinted at, the connection with statistical mechanics and the problem of phase transition was indicated (referring to Dobrushin's work), and random motions with interaction where described which leave these random fields invariant.

F. TOPSOE: On canonical versions of stochastic processes

A stochastic process is a particular case of a projective system of probability spaces. For the most important realizations of stochastic processes the basic probability space is a topological function space and the pertaining measure is "topologically nice". It is pointed out that for many natural processes the projections are bound to be non-continuous, but they will be open.

Consider the category $\mathfrak{A}_{0,t}$ where the objects are pairs (X,μ) of Hausdorff spaces and tight probability measures, and where the morphisms $\pi: (X,\mu) \longrightarrow (Y,\nu)$ are open mappings $\pi: X \longrightarrow Y$ such that

$$\mu(\overset{\circ}{\widehat{\pi^{-1}E}}) \leq \eta(\overset{\circ}{E}) \leq \eta(\overline{E}) \leq \mu(\overline{\pi^{-1}E})$$

holds for all $E \subseteq Y$. Let I, $(X_i, \mu_i)_{i\in I}$, $(\pi_{ij})_{i\leq j}$ be a projective system in this category and let X be a "target space" with open mappings $\pi_i : X \longrightarrow X_i$. A necessary and sufficient condition that a projective limit can be realized on X is given. The idea is to put

$$\mu K = \inf_{G \supseteq K} \inf_i \mu_i(\pi_i G)$$

for any compact subset of X.

Bochum, den 26. März 1970

C. Bandelow