MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 11/1970

Mathematische Logik

5.4. bis 11.4.1970

Die diesjährige Tagung zur mathematischen Logik fand unter der Leitung der Herren H.Hermes (Freiburg) und K.Schütte (München) statt. 24 Referate aus den Gebieten der klassischen und intuitionistischen Logik, der Modelltheorie, der Mengenlehre, der Rekursionstheorie und der Wissenschaftslehre (sowie die durch die winterliche Witterung geförderte Arbeitsbereitschaft) trugen zum Erfolg der Tagung bei. Mit großem Interesse wurde ein Bericht über den Beweis des Satzes von Matijasevič über die diophantische Definierbarkeit einer exponentiell wachsenden Relation aufgenommen, aus dem die Unlösbarkeit des 10. Hilbertschen Problems folgt. - Die DVMLG hielt im Rahmen der Tagung ihre diesjährige Mitgliederversammlung ab.

<u>Teilnehmer</u>

J.Bammert, Freiburg
P.Bernays, Zürich
W.Bibel, München
H.B.Curry, Amsterdam
H.Czermak, München
K.-H.Diener, Köln
J.Diller, München
C.Döpp, Hannover
H.-D.Ebbinghaus, Freiburg
U.Felgner, Utrecht
J.E.Fenstad, Oslo
H.Fiedler, Bonn
J.Flum, Freiburg
R.O.Gandy, Oxford
S.Görnemann, Kiel
R.Harrop, z.Zt. Leicester
G.Hasenjaeger, Bonn
H.Hermes, Freiburg
J.Jung, Heidelberg
L.Kalmár, Szeged

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F.Kambartel, Konstanz
J.von Kempski, Hembsen
B.Koppelberg, Bonn
H.Läuchli, Zürich
R.Liedl, Innsbruck
H.Luckhardt, Marburg
F.-K.Mahn, Telgte
W.Markwald, Freiburg
A.R.D.Mathias, Cambridge
A.Menne, Hamburg
G.Mitschke, Bonn
G.H.Müller, Heidelberg
H.Müller, Hannover
A.Oberschelp, Kiel
H.Osswald, Hannover
K.Peters, Heidelberg
H.Pfeiffer, Hannover
K.-P.Podewski, Hannover
K.Potthoff, Kiel
M.B.Pour-El, Bristol
A.Preller, Marseille
A.Prestel, Bonn
D.Rödding, Münster
B.Scarpellini, Basel
K.Schütte, München
W.Schwabhäuser, Bonn
H.Schwichtenberg, Münster
D.Siefkes, Heidelberg
E.Specker, Zürich
V.Weispfenning, Heidelberg
G.Werner, Grenoble

Vortragsauszüge

H.LÄUCHLI : $P_3 \rightarrow BPI$

BPI : In jeder Boole'schen Algebra gibt es Primideale.

P_n : Für jeden Graph G gilt : Falls sich jeder endliche Teilgraph n-färben läßt, so auch G.

C_n : Auswahlaxiom für Mengen n-elementiger Mengen.

Die Implikationen BPI $\rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow C_n$, $C_2 \rightarrow P_2$ sind ohne Auswahlaxiom (A) beweisbar.

A.Lévy zeigte, daß $(\forall n\ C_n) \rightarrow P_3$ nicht ohne A beweisbar ist.

Wir zeigen, daß sogar $P_3 \rightarrow$ BPI gilt (ohne A).

K.-P.PODEWSKI : Zur Vergrößerung von Strukturen

Seien Π und Σ Theorien in den Sprachen L_1 bzw. L_2 und sei $J = \langle \theta, \theta_i \rangle_{i \in I_1}$ eine relative Interpretation von

Π in Σ. Jede Formel φ aus L_1 läßt sich mittels J dann in eine Formel φ^J aus L_2 übersetzen.

Haben Π, Σ und J ferner die Eigenschaften

1. Σ besitzt eine syntaktisch beschreibbare Auswahlfunktion.
2. Für jedes ψ aus L_2 gibt es ein φ aus L_1, so daß
   $\Sigma \vdash \forall v_o \ldots \forall v_n (\Theta \wedge \ldots \wedge \Theta(v_n^{v_o}) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi^J))$.

Dann läßt sich zeigen : Zu jedem Modell $\mathfrak{B}$ von Π gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von Σ, so daß die Bedeutung von J in $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{B}$ ist. Anhand von Beispielen läßt sich außerdem zeigen, daß keine der beiden Eigenschaften allein ausreicht.

H.MÜLLER : <u>Automaten in Labyrinthen</u>

Zwei Präzisierungen des Begriffs "Labyrinth" werden angegeben:

Form 1: Ein Labyrinth ist eine endliche Teilmenge von $Z \times Z$ (Paare ganzer Zahlen).

Form 2: Ein Labyrinth ist ein endlicher, ebener Graph mit einer zusätzlich ausgezeichneten Menge von Zielpunkten.

Zur Frage des Verhaltens von Automaten in Labyrinthen werden folgende Resultate vorgetragen :

a) Zu jedem zustands-endlichen Automaten gibt es ein Labyrinth (der Form 2), das er nicht bewältigt.

b) Es gibt einen nichtlöschenden Stackautomaten, der jedes Labyrinth (der Form 1) bewältigt.

H.SCHWICHTENBERG : <u>Eine Klassifikation der ordinal rekursiven Funktionen</u>

Jeder ordinal rekursiven Funktion läßt sich nach einer Metho-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

de von Heinermann eine Rekursionszahl $< \varepsilon_0$ zuordnen; $\mathfrak{R}_\alpha$ sei die Klasse der mit Rekursionszahlen $\leq \alpha$ definierbaren ordinal rekursiven Funktionen. Weiter wird mit dem Kleene'schen Verfahren (unter Verwendung von Standard-Fundamentalfolgen für die Limeszahlen $\lambda < \varepsilon_0$) eine Folge $\mathcal{L}_\alpha$, $\alpha < \varepsilon_0$, von Funktionenklassen definiert. $\mathfrak{E}_\alpha$, $\alpha < \varepsilon_0$, sei die Robbin'sche Erweiterung der Grzegorczyk-Hierarchie, also $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}(F_\alpha)$ mit $F_0(x) = 2^x$, $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x)$, $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$.

<u>Satz</u> : $\mathfrak{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha$ für alle $\alpha < \varepsilon_0$.

Die F_α können durch Anwendungen aus F_0 und den Funktionalen $F_0^{\sigma_{n+1}} = \lambda x_n \ldots \lambda x_0\ (x_n)^{x_0}(x_{n-1})\ldots(x_0)$ vom Typ σ_{n+1} $(\sigma_0 := o,\ \sigma_{n+1} := (\sigma_n \to \sigma_n))$ definiert werden, also ohne Bezugnahme auf die Fundamentalfolgen $\lambda[x]$.

G.MITSCHKE : <u>λ - definierbare Funktionen auf Peano-Algebren</u>

Durch $\langle t_1,\ldots,t_n\rangle := \lambda x(xt_1\ldots t_n)$, x nicht frei in den t_i, definiert man im λ-K-Kalkül das geordnete n-Tupel der Terme $t_1,\ldots,t_n$. Zusammen mit der Standarddarstellung $\underline{n} = \lambda y \lambda x(\underbrace{y\ldots(y}_{n\text{-mal}}x))$ für die natürliche Zahl n kann man damit Peano-Algebren $P = P(M,\Delta)$, wo $M = \{a_0,\ldots,a_{m_0}\}$ endlich ist und der Typ Δ die Gestalt $\Delta = (k_i)_{1\leq i\leq n_0}$, $k_i \in \mathbb{N}-\{0\}$ im λ-Kalkül darstellen durch $a_i \mapsto \langle 0,i\rangle$, $f_i(p_1,\ldots,p_{k_i}) \mapsto \langle i,\underline{p_1},\ldots,\underline{p_{k_i}}\rangle$ ($\underline{p_j}$ die Darstellung von p_j).

Eine Funktion $f : P^n \to P$ heißt λ-definierbar genau dann, wenn es einen Term F gibt mit $F\underline{p_1}\ldots\underline{p_n} = \underline{f(p_1,\ldots,p_n)}$ ist beweisbar. Analog definiert man λ-definierbare Funktionen zwischen Peano-Algebren. Es gilt nun für Peano-Algebren $P = P(M,\Delta)$ der obigen Form der

Satz : (i) Es gibt eine λ-definierbare Gödelisierung $\gamma : P \to N$, wobei auch $\overset{-1}{\gamma} : N \to P$ λ-definierbar ist.

(ii) $f : P^n \to P$ ist genau dann λ-definierbar, wenn es eine λ-definierbare Funktion $g : N^n \to N$ gibt, so daß $f(x_1,\dots,x_n) = \overset{-1}{\gamma}\, g(\gamma x_1,\dots,\gamma x_n)$ für alle $x_1,\dots,x_n \in P$.

A.OBERSCHELP : Eine Verallgemeinerung der Stratifizierung

Es wurden verschiedene mengentheoretische Systeme betrachtet, die alle Subsysteme eines umfassendsten Systems sind. Die Absicht ist, eine Mengenlehre zu erhalten, die (a) in natürlicher Weise für die Kategorientheorie geeignet ist und (b) mit der üblichen Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ZF verträglich ist. Es wird eine einsortige Sprache erster Stufe mit Identität und den Grundbegriffen ϵ (Elementbeziehung), M (Mengenprädikat), $\langle\ ,\ \rangle$ (geordnetes Paar) zugrundegelegt. Die umfassendste der angegebenen Theorien ist die Theorie ZF + M-Strat. Axiome sind: Extensionalität, geordnete Paare und die üblichen Mengenaxiome von Zermelo-Fraenkel (formuliert für Klassen als Urelemente). Die Klassenbildung wird durch das M-Stratifizierungsschema geregelt.

M - Strat : $(\forall\dots\exists z\forall u(u\,\epsilon\, z \leftrightarrow \varphi))^{[M]}$ ist ein Axiom, wenn es M-stratifiziert ist und z nicht in φ vorkommt.

Die vorkommenden Begriffe sind so definiert :

In Θ mögen verschiedene Quantorenvorkommen zu verschiedenen Variablen gehören. $\Theta^{[M]}$ entsteht aus Θ folgendermaßen :

(a) Man ordne den einzelnen Variablenvorkommen in Θ Indizes aus N so zu, daß gilt : Wenn $\ulcorner x\,\epsilon\, y\urcorner$ in Θ und k, l die Indizes von x und y (an diesen Stellen) sind, so k+1 = l.

Wenn $\ulcorner x = y \urcorner$ oder $\ulcorner z = \langle x,y \rangle \urcorner$ in Θ , so sind die Indizes von x, y, z (an diesen Stellen) gleich. Dann relativiere man diejenigen Variablen, die mit Index 0 <u>und</u> Index 1 auftauchen, auf M. Wenn man das so machen kann, daß dabei jede Variable, die an einer Stelle in Θ einen Index $k \geq 2$ erhält, überall in Θ den Index k erhält, so ist $\Theta^{[M]}$ M-stratifiziert.

<u>Bemerkungen</u>. Diese Theorie vereinigt die Vorzüge der anderen betrachteten Theorien. Weil sie ZF enthält, ist sie als "Gebrauchsmengenlehre" geeignet. Weil sie NF (= "New Foundations" von Quine, 1937) enthält, gibt es z.B. in ihr die Kategorie aller großen Kategorien. Ferner ist die Klassenbildung liberaler als in ZF + NF. Z.B. definiert jede "n-th-order set theoretical condition" eine Klasse. Die Theorie enthält ferner die früher angegebene Theorie ZF + M-Comp (Math.Annalen 157 (1964), 234-260). Allerdings ist die Widerspruchsfreiheit (relativ zu bekannten Systemen) unbekannt.

M.B.POUR-EL : <u>Herbrand-Gödel Computability and its Relation to the General-Purpose Analog Computer</u>

Our definition of "general purpose analog computer" (G.P.A.C.) - which makes use of an observation by Shannon - includes both the electronic differential analyzer and the mechanical differential analyzer. Feedback, which may be viewed as a form of continuous recursion, is definitely allowed.

Let f be a function of a real variable; let I be a closed bounded interval with non-empty interior. Among the results proved are

<u>Theorem 1</u>. There exist entire functions f such that

1. f is recursive

2. for any I, $f \upharpoonright I$ cannot be generated by a G.P.A.C.

Theorem 2. Let f be entire. Suppose for some I, $f \upharpoonright I$ can be generated by a G.P.A.C. Then f is "essentially recursive" on every I.

Example for 1: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^x}{n^{(n^3)}}$.

(Theorem 2. can be formulated more generally.)

K.SCHÜTTE : Zur Axiomatisierung der Mengenlehre nach Dana Scott

In enger Anlehnung an eine Arbeit von Dana Scott (Axiomatizing Set Theory) läßt sich eine Axiomatisierung der Mengenlehre so durchführen, daß außer dem Aussonderungsaxiom und dem Extensionalitätsaxiom nur ein Existenzaxiom für Schichten benötigt wird, wobei die Schichten in einer natürlichen Weise definiert werden können. Entsprechend läßt sich ein erweitertes System mit fünf Axiomen bilden, in dem Klassenterme auftreten.

B.J.KOPPELBERG : Ein Unabhängigkeitsergebnis bei großen Kardinalzahlen

Sei $\varkappa$ eine meßbare Kardinalzahl und U normaler Ultrafilter auf $\varkappa$. Dann erhält man mit Methoden von Vopěnka - Hrbáček und K. Kunen, daß in L[U] für keine reguläre Kardinalzahl $\rho > \varkappa$ auf ρ ein uniformer $\varkappa$-vollständiger Ultrafilter existiert. Seien nun $\varkappa$ und μ $(\varkappa < \mu)$ meßbare Kardinalzahlen. Dann existiert auf μ ein $\varkappa$-vollständiger uniformer Ultrafilter, der nicht $\varkappa^+$-vollständig ist.

Dennoch erhält man: Ist ZFC + Es gibt zwei meßbare Kardinalzahlen konsistent, so kann Folgendes nicht ableitbar sein : „Sind $\varkappa$ und μ mit $\varkappa < \mu$ meßbare Kardinalzahlen, so gibt es reguläre Kardinalzahlen ρ_1 und ρ_2 sowie eine Limeskardinalzahl σ mit $\varkappa < \rho_1 < \sigma < \rho_2 < \mu$, so daß auf ρ_1 und ρ_2 je ein $\varkappa$-vollständiger uniformer Ultrafilter existiert." Beim Beweis werden Ergebnisse von R.B.Jensen und Methoden von K.Kunen verwandt.

J.FLUM : Ganzgeschlossene Logiken

Es wird eine Klasse von Logiken zwischen der ersten und zweiten Stufe (mit Standardinterpretationen) ausgezeichnet und u.a. für sie die Unabhängigkeit der Eigenschaften "Gültigkeit des Endlichkeitssatzes" und "Rekursive Aufzählbarkeit der allgemeingültigen Ausdrücke" bewiesen.

V.WEISPFENNING : Zur Entscheidbarkeit bewerteter Körper

Ein bewerteter Körper (K,v) mit Wertgruppe Γ heiße Hensel-Körper, falls in ihm das Henselsche Lemma gilt und eine Querschnittsfunktion $\Pi : \Gamma \to K^{\times}$ mit $\Pi^{\alpha} \cdot \Pi^{\beta} = \Pi^{\alpha+\beta}$ und $v(\Pi^{\alpha}) = \alpha$ existiert. Für Henselsche Körper der char 0 mit Restklassenkörper R der char 0 wird ein syntaktisches Verfahren angegeben, mit dem man jede elementare Aussage über den Körper (K,v) zurückführen kann auf eine aussagenlogische Verbindung von elementaren Aussagen über Γ und solchen über R. Hieraus folgt die Vollständigkeit und Entscheidbarkeit der elementaren Theorie von (K,v), falls die elementaren Theorien von Γ und R vollständig und entscheidbar sind. Wegen der Endlichkeit elementarer Beweise kann man dabei zu jedem Satz A der elementaren Theorie von

(K,v) effektiv eine Schranke p_o angeben, so daß für alle Primzahlen $p \geq p_o$ die obige Reduktion auch in den Fällen char K = 0, char R = p und char K = char R = p gilt. Man erhält so eine effektive Version des Satzes von Ax und Kochen (A., K. : Dioph. problems over local fields, Ann. of Math. 83 (1966), Th. 8, S. 444) und dessen Anwendung auf die Artinsche Vermutung im Körper Q_p der p-adischen Zahlen (--, Th. 9, S.445).

B.SCARPELLINI : Ein nicht-konstruktives Modell der Barrekursion höheren Typs

Es wird eine (nicht-konstruktive) Menge stetiger Funktionale eingeführt, mit Hilfe einer Methode, die auf Kuratowski zurückgeht. Es wird gezeigt, daß diese Menge Spectors Gleichungen für Barrekursion vom höheren Typ erfüllt.

J.DILLER : Eine Variante bei der Interpretation der Heyting-Arithmetik endlicher Typen

Betrachtet man als Primformeln einer intuitionistischen Zahlentheorie H_ω alle Gleichungen zwischen primitiv-rekursiven Termen (gleicher) endlicher Typen, so läßt sich H_ω mit der üblichen Gödel-Übersetzung nicht in der Theorie T der primitiv-rekursiven Funktionale interpretieren. Ändert man nur die Übersetzung der Implikation wie folgt :

$$\bigvee v \bigwedge w A \rightarrow \bigvee y \bigwedge z B \mapsto \bigvee WXY \bigwedge vz (\bigwedge x{<}Xvz A_w[Wxvz] \rightarrow B_y[Yv]) ,$$

so läßt sich H_ω in einer Theorie $T_\wedge$ interpretieren, die aus T durch Hinzunahme des beschränkten Allquantors $\wedge x{<}t$ hervorgeht. Hinsichtlich geschlossener Formeln ist $T_\wedge$ eine konservative Erweiterung von T.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

D.SIEFKES : Syntaktisierung des Rabinschen Entscheidungsverfahrens für die einstellige Theorie zweiter Stufe von mehreren Nachfolgeroperationen

Eine einstellige Theorie zweiter Stufe enthält außer den Mitteln einer elementaren Theorie quantifizierbare Prädikatvariablen (Mengenvariablen). Für die entscheidbaren einstelligen Theorien zweiter Stufe der zahlentheoretischen Nachfolgerfunktion (SC von Büchi 1960) und zweier Nachfolger (S2S von Rabin 1969) werden vollständige Axiomensysteme durch Syntaktisierung des Entscheidungsverfahrens gesucht. SC ist durch die drei Peano-Axiome für den Nachfolger (zusammen mit dem Komprehensionsaxiom in der Logik) vollständig axiomatisiert (Siefkes 1970). Dagegen scheint für S2S die Verallgemeinerung der Peano-Axiome auf zwei Nachfolger nicht auszureichen. Während daraus die üblichen Sätze über die natürlichen Ordnungen des binären Baumes, das Rekursionstheorem für Mengen und die Hilfsmittel zur Eliminierung der Automatentheorie aus dem Entscheidungsverfahren ableitbar sind, benötigt man darüber hinaus anscheinend z.B. das Königsche Lemma, oder allgemeiner gewisse Formen des Auswahlaxioms, Induktion über endliche Mengen und Mengenvereinigungsaxiome.

J.E.FENSTAD : On constructive mathematics

The aim was to give an exposition of some work of Per Martin-Löf on a certain "point-free" approach to constructive mathematics. One starts by accepting Church thesis for constructive mathematics. Π^1_1 - statements are analysed by means of Brouwer's bar theorem, i.e. in terms of certain constructively understood generalized inductive definitions. Basic spaces are the real line, Cantorspace and Bairespace, and the starting point is the notion of neighborhood. From this one derives in one direction the notion of constructive point, in the other various classes of sets, in particular one obtains a constructivization of the Borelsets by means of g.i.d. Sets are introduced in a "pointfree" manner, and a basic part of the analysis consists in determining when e.g. two open sets in Bairespace are equal. This is a Π_1^1 - statement, and the analysis of the bar theorem applies directly. For Borelsets one applies a Gentzen type calculus. A short exposition of measure theory was also given.

W.SCHWABHÄUSER : <u>Zur Axiomatisierbarkeit der dimensionsfreien Geometrie</u>

Offenes Problem : Ist die dimensionsfreie Geometrie $\Gamma(OF)$ über beliebigen angeordneten Körpern (d.h. die Menge der geometrischen Sätze [einer elementaren Sprache], die in jedem kartesischen Raum $\mathcal{L}_n(\mathfrak{K})$ endlicher Dimension $n \geq 2$ über einem angeordneten Körper $\mathfrak{K}$ gelten) rekursiv axiomatisierbar ?

Resultate : $\Gamma(OF)$ ist nicht endlich axiomatisierbar. Es läßt sich ein Axiomensystem angeben, dessen endlich-dimensionale Modelle gerade die Räume $\mathcal{L}_n(\mathfrak{K})$ sind; dieses reicht jedoch nicht aus zur Axiomatisierung von $\Gamma(OF)$. Es gibt ein unendlich-dimensionales Modell $\mathfrak{M}$ von $\Gamma(OF)$, in dem ein Vektor $\mathfrak{a}$ existiert, dessen inneres Produkt mit sich selbst keine endliche Quadratsumme von Elementen des Grundkörpers ist; damit existiert keine Isometrie, die a in einen Vektor eines endlich-dimensionalen Untermodells von $\mathfrak{N}$ überführt. Deshalb läßt sich eine Methode der Axiomatisierung, die früher vom Verfasser für geeignete angeordnete Körper verwendet wurde, jedenfalls nicht auf $\Gamma(OF)$ übertragen.

A.PRESTEL : Über η_α-Gruppen und η_α-Körper

Es sei M eine durch $<$ linear geordnete Menge.

Definition (Hausdorff): M heißt η_α-Menge genau dann, wenn

$$\left.\begin{array}{l} A,\ B \subset M,\ |A|,\ |B| < \aleph_\alpha \\ A < B\ [\text{d.h. } a < b \text{ für alle } a \in A,\ b \in B] \end{array}\right\} \rightarrow (\exists c \in M)\ A < \{c\} < B.$$

Eine geordnete, abelsche, teilbare Gruppe heißt η_α-Gruppe, wenn sie eine η_α-Menge ist. Ein reell-abgeschlossener, geordneter Körper heißt η_α-Körper, wenn er eine η_α-Menge ist.

Die Existenz von η_α-Mengen hat Hausdorff bewiesen.

Ist I eine linear geordnete Menge, so bezeichnet

$$\Gamma_I \mathbb{R} = \{\ f \in \mathbb{R}^I \mid \{ i \in I \mid f(i) \neq 0 \} \text{ ist wohlgeordnet } \}$$

das lexikographische Produkt der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ über I.

Satz : Ist I eine η_α-Menge, so ist $\Gamma_I \mathbb{R}$ eine η_α-Gruppe.

(Der Beweis verwendet nur die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$.)

Da η_α-Gruppen und η_α-Körper $\aleph_\alpha$-universell sind (für $\alpha \neq 0$), erhält man damit die Hahnschen Einbettungssätze für geordnete abelsche Gruppen in lexikographische Produkte von $\mathbb{R}$ und geordnete, kommutative Körper in formale Potenzreihenkörper über $\mathbb{R}$.

F.KAMBARTEL : Idealisierung und Realisierung - terminologische Präzisierungen zum Programm der Protophysik

Im Rahmen des von Hugo Dinglers Ansätzen beeinflußten Bemühens um apriorische Grundlagen der Physik spielen "ideale" Forderungen eine hervorgehobene Rolle. Eine besondere Schwierigkeit macht bisher die Deutung der in solchen Postulaten vorkommenden Prädikatorensymbole als "Ideatoren" oder Bezeichnungen von "Ideen". Zur Präzisierung wird (aufbauend auf Vorschlägen von P.Lorenzen und P.Janich) in Bezug auf Postulatensysteme Π die Rede von einem für einen Handlungszusammenhang (Praxis) P "ausreichenden Realisierungsverfahren H" so eingeführt, daß die H-Produkte in der Praxis P keine Eigenschaften zeigen, die Folgerungen aus Π widersprechen. Dabei können die in den Aussageformen eines Postulatensystems Π auftretenden Prädikatoren P_i noch als exemplarisch und terminologisch bestimmt im Sinne von P.Lorenzen angesehen werden. Wir können nun statt der Prädikatoren P_i Prädikatorensymbole ${}^{\Pi}P_i$ verwenden, wo immer wir zum Ausdruck bringen wollen, daß wir uns für eine Praxis so orientieren, als ob mit $x_1,\ldots,x_k \in P_i$ auch die sich daraus unter Voraussetzung von Π ergebenden Implikate Gültigkeit haben. Symbole ${}^{\Pi}P_i$ in der gekennzeichneten Verwendung mögen Ideatoren heißen. Ideatoren lassen sich als Bezeichnungen für abstrakte Objekte (die "Ideen") auffassen, welche man auf Grund der folgenden Äquivalenzrelation gewinnt: ${}^{\Pi}P$ idealäquivalent ${}^{\Pi'}P'$ $=_{Df}$ P synonym P' und Π analytisch äquivalent Π'.

K.PETERS : Zum 1o. Hilbert'schen Problem

Das Problem: eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen

Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

Zum Beweis der rekursiven Unlösbarkeit des Problems genügt es zu zeigen, daß jedes rekursiv aufzählbare Prädikat $R(\mathfrak{x})$ diophantisch ist, d.h. von der Form $R(\mathfrak{x}) \leftrightarrow \vee_{\mathfrak{y}} P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ mit einem ganzzahligen Polynom P.

Julia Robinson hat gezeigt, daß es dazu ausreicht, ein diophantisches Prädikat anzugeben, welches exponentiell wächst. Ein solches Prädikat wurde kürzlich von Matijasevič, Leningrad, angegeben. Es lautet:

Matijasevič's Theorem: das folgende System von zehn Gleichungen, I-X, hat genau dann eine Lösung in positiven ganzrationalen Zahlen, wenn $v = \varphi_{2u-2}$ ist, wobei φ_n die n-te Fibonacci-Zahl ist.

I.	$(u-1)+(w-1) = v$	VI.	$m = (2h+g)c+3$
II.	$l = v+a$	VII.	$m = fl+2$
III.	$l^2-lz-z^2 = 1$	VIII.	$x^2-mxy+y^2 = 1$
IV.	$g = bl^2$	IX.	$x = (d-1)l+(u-1)$
V.	$g^2-gh-h^2 = 1$	X.	$x = (2h+g)(e-1)+v$

Dabei sind die Fibonacci-Zahlen wir folgt definiert:

$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$.

L.KALMÁR : <u>On an unusual axiomatizability problem arisen in optimization questions of Boolean functions</u>

A problem, unsolved so far, connected with questions of optimal logical design, is presented. In a certain sense, it can be regarded as an axiomatizability problem, even if not of a standard type.

R.HARROP : <u>Über endliche Modelle von Aussagenkalkülen</u>

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Definition von Modellen von Aussagenkalkülen, insbesondere starke, schwache Modelle, Smiley-Modelle und modifizierte Smiley-Modelle. In jedem Fall, außer dem Fall $n=0$ für ein schwaches Modell, ist es so, daß, wenn $X_1,\dots,X_n \vdash Y$ in einem Kalkül P nicht ableitbar ist, ein vielleicht unendliches Modell von P existiert, in dem $X_1,\dots,X_n \vdash Y$ nicht erfüllt ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen werden angegeben, die sichern, daß ein nicht ableitbarer Ausdruck $X_1,\dots,X_n \vdash Y$ in allen schwachen Modellen von P erfüllt ist. Es wird gezeigt, wie schwache Modelle sich durch Benutzung der Lindenbaum-Modelle charakterisieren lassen. Es wird auf Anwendungen der Theorie auf endliche Modelle hingewiesen.

A.PRELLER : <u>On the weak representability of σ-cylindric algebras</u>

It is known that all dimension complemented cylindric algebras are representable, i.e., isomorphic to a subdirect product of cylindric set algebras. This paper answers the following question: Are σ-complete dimension-complemented cylindric algebras all homomorphic images of subdirect products of σ-complete set algebras where the homomorphisms in question should of course transform countable unions into countable sums.

S.GÖRNEMANN : Über eine Verschärfung der intuitionistischen Logik

ID sei der Prädikatenkalkül, der aus dem intuitionistischen Prädikatenkalkül durch Hinzunahme des Schemas

$$(D) \quad \forall x(\alpha \vee \beta) \rightarrow \alpha \vee \forall x \beta$$

(x nicht frei in α) entsteht. - Ein Grzegorczyk-Modell (G-Modell) ist ein Kripke-Modell der intuitionistischen Logik mit konstantem Individuenbereich. Eine vollständige distributive Pseudo-Boolesche Algebra (DPBA) ist eine vollständige PBA A, in der für jedes $M \subseteq A$ und $a \in A$ gilt:

$$\prod_{m \in M} (a \cup m) = a \cup \prod M.$$

Für jede Formel α ist Folgendes äquivalent:

(i) α ist in ID ableitbar

(ii) α ist in jedem Punkt jedes G-Modells erfüllt

(iii) α wird in jedem verbandstheoretischen Modell, dessen zugrundeliegende Algebra DPBA ist, mit 1 bewertet.

H.OSSWALD : Über einen Vollständigkeitsbegriff bei allgemeinen aussagenlogischen Systemen

Es sei $\Sigma = \{p_i \equiv F^0 : i \in m\} \cup \{x_0 \equiv F^0 \cup x_0 \rightarrow x_1 \equiv F^0 \succ x_1 \equiv F^0\}$.
Die Logik von Σ (freie Σ-Algebra $\overline{F}$ über einer abzählbaren Menge) heißt vollständig gdw Es gibt ein $\mathfrak{L}$ mit

(1) $\mathfrak{L}$ ist Modell von Σ und wird von Φ erzeugt;

(2) $\mathfrak{L}$ ist Modell von $t \equiv F^0 \Rightarrow$ Alle Modelle von Σ sind Modelle von $t \equiv F^0$.

Der Vollständigkeitsbegriff läßt sich syntaktisch fassen.

1. Die klassische Logik ist vollständig. Die Semantik ist nicht eindeutig bestimmt.

2. Folgende logische Systeme sind nicht vollständig:

(a) Implikationslogik

(b) positive Logik

(c) intuitionistische Logik

Wenn die logischen Systeme (b) und (c) vollständig wären, so wäre notwendig die klassische Semantik eine semantische Charakterisierung.

H.-D.Ebbinghaus, Freiburg i.Br.