MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 12/1970

Arbeitsgemeinschaft über den Indexsatz

von Atiyah - Singer

12.4. bis 18.4.1970

Die Arbeitsgemeinschaft wird auch die Herbsttagung (Leitung: F. Hirzebruch, Bonn) der Indexformel von Atiyah-Singer widmen. Im Herbst wird der Beweis und die zugehörige Analysis behandelt.

Diese Tagung wurde von G. Harder (Bonn) geleitet. Hier wurde zunächst der Indexsatz formuliert.
Dabei wurde für die topologische Seite ein Überblick über die K-Theorie und K_G-Theorie (äquivalente K-Theorie) gegeben, wobei der Periodizitätssatz von Bott mit äquivarianter Verallgemeinerung ("trivialer" Fall des Thomisomorphismus) ohne Beweis benutzt wurde. Ebenso wurde für die analytische Seite die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren (insbesondere der elliptischen Operatoren) im Überblick vorgetragen, soweit es zur Formulierung des Indexsatzes notwendig war.
Im zweiten Teil beschäftigte sich die Arbeitsgemeinschaft mit der Interpretation und den Anwendungen des Indexsatzes.

Teilnehmer

H. Abels, Bochum
H. Bauer, Erlangen
E. Berends, Berlin
R. Berger, Saarbrücken
Th. Bröcker, Heidelberg
R. Brüske, Bochum
T. tom Dieck, Saarbrücken
W. End, Heidelberg
H.-J. Fendrich, Münster
W. Fischer, Bielefeld
O. Forster, Regensburg
W.D. Geyer, Heidelberg
E. Gottschling, Mainz
B. Hain, Erlangen
W. Hansen, Erlangen
G. Harder, Bonn
M. Hazewinkel, Moskau
K. Jänich, Regensburg
W. Jehne, Köln
R. Kiehl, Frankfurt
K. Kiyek, Saarbrücken
M. Knebusch, Saarbrücken
J. Köhn, Erlangen
K. Legrady, Hamburg
F. Lorenz, Konstanz
J. Mennicke, Bielefeld
H.-J. Nastold, Münster
G. Neubauer, Konstanz
V. Puppe, Heidelberg
K. Radbruch, Tübingen
U. Rehmann, Göttingen
H. Reiter, Göttingen
R. Rentschler, Strasbourg
U. Stuhler, Göttingen
G. Tamme, Göttingen
G. Wittstock, Saarbrücken

Vortragsauszüge

U. REHMANN: Äquivariante K-Theorie

Zusammenstellung elementarer Definitionen und Sätze aus der topologischen K-Theorie nach
(i) Atiyah: K-Theory (Benjamin, 1967)
(ii) -, Singer: The index of elliptic operators I
(iii) Segal, Equivariant K-Theory (Publ. Math. IHES 34).

U. STUHLER: Der Thom-Isomorphismus in der äquivarianten K-Theorie

Es würde ein Beweis der Thom-Isomorphie unter Voraussetzung des Bottschen Periodizitätssatzes nach der Arbeit von Segal (1, iii) gegeben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

G. TAMME: <u>Der topologische Index</u>

Sei G eine kompakte Liegruppe und X eine kompakte differenzierbare G-Mannigfaltigkeit. Dann wird der topologische Index als R(G)-Modulhomomorphismus

$$\mathrm{ind}_t : K_G(TX) \longrightarrow R(G)$$

erklärt. Dabei ist TX das Tangentialbündel von X und R(G) der Darstellungsring von G.

Jeder G-Einbettung $i : X \longrightarrow Y$ ordnet man einen R(G)-Homomorphismus $i_! : K_G(TX) \longrightarrow K_G(TY)$ zu und erklärt $\mathrm{ind}_t = j_!^{-1} \circ i_!$, wobei $i : X \longrightarrow E$ eine G-Einbettung $X \longrightarrow E$, E = reeller G-Modul, ist, und $j : P \longrightarrow E$ die Inklusion des Ursprungs.

B. HAIN und H. REITER: <u>Die Axiome für den topologischen Index</u>

Sei G eine kompakte Liegruppe und $\mathcal{X}$ die Kategorie der kompakten differenzierbaren G-Mannigfaltigkeiten. Zu $X \in \mathcal{X}$ sei eine Indexfunktion

$$\mathrm{ind}_G^X : K_G(TX) \longrightarrow R(G)$$

gegeben, die folgenden Axiomen genügt

A 1 : $X = \text{Punkt} \Rightarrow \mathrm{ind}_G^X = \mathrm{id}_{R(G)}$

A 2 : ind_G^X ist mit $i_!$ vertauschbar.

Dann folgt: $\mathrm{ind}_G^X = \mathrm{ind}_t$.

Die Axiome A 1, A 2 sind, falls nicht $\mathrm{ind}_G^X = 0$ für alle X äquivalent zu

B 1: Für offene Einbettungen $i : U \longrightarrow X$, $j : U \longrightarrow X'$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
& K_G(TX) \arrow[dr, "\mathrm{ind}"] & \\
K_G(TU) \arrow[ur] \arrow[dr] & & R(G) \\
& K_G(TX') \arrow[ur, "\mathrm{ind}"'] &
\end{tikzcd}$$

B 2: Ist $j : P \longrightarrow R^n$ die Inklusion des Ursprungs, so gilt

$$\mathrm{ind}_{O(n)}^{R^n}\, j_!(1) = 1$$

B 3: ind ist multiplikativ für Faserprodukte.

R. KIEHL: Pseudodifferentialoperatoren

Es wurde eine Klasse P_0^m von Pseudodifferentialoperatoren auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit eingeführt. Das sind gewisse stetige lineare Abbildungen

$$f : D(X,E) \longrightarrow \mathcal{E}(X,F)$$

des Raumes der C^∞-Schnitte mit kompaktem Träger eines glatten Bündels E in den Raum der C^∞-Schnitte eines glatten Bündels F. Einen solchen Operator wird eine Bündelabbildung $\sigma(f)$: $\pi^*E \longrightarrow \pi^*F$, das Symbol von f, zugeordnet. Dabei ist π: $T(X)-0 \longrightarrow X$ die Projektion des Kotangentenbündels $T(X)$ auf X. f heißt elliptisch, wenn $\sigma(f)$ außerhalb des Nullschnitts isomorph ist. Für kompaktes X und elliptisches f sind ker(f) und koker(f) endlichdimensional. Der analytische Index wird (bei äquivarianter Verallgemeinerung) als $[\ker f]-[\operatorname{koker} f] \in R(G)$ erklärt, und hängt nur von der Klasse des Symbols $K(TX)$ ab.

J. MENNICKE: Der Lokalisierungssatz der äquivarianten K-Theorie

Sei G kompakt abelsch und $\gamma \in G$; sei X^γ die Fixpunktmenge von γ. Zu γ gehört das Primideal

$$p = \{r \in R(G) \mid r(\gamma) = 0\} \subset R(G).$$

Die Einbettung i : $X^\gamma \longrightarrow X$ induziert einen $R(G)$-Homomorphismus

$$i^* : K_G(X) \longrightarrow K_G^*(X^\gamma) .$$

Man betrachtet den lokalisierten Homomorphismus

$$i_p^* : K_G^*(X)_p \longrightarrow K_G^*(X^\gamma)_p$$

Satz: i_p^* ist isomorph.

8. W. Fischer

Folgender Satz wurde gezeigt:
Sei G kompakt, topologisch zyklisch mit Erzeugendem g, und sei N das Normalenbündel der Inklusion i: $X^g \longrightarrow X$. Sei E ein elliptischer Komplex über X mit G Aktion, und $u \in K_G(TX)$ die Symbolklasse von E. Dann ist

$$L(g,E) = (\mathrm{ind}_1^{X^g} \otimes 1_C) \left\{ \frac{i^*u(g)}{\lambda_{-1}(N \otimes C)(g)} \right\}.$$

Dabei ist L(g,E) die Lefschetzzahl.

K. LEGRADY: Anwendungen des LEFSCHETZschen Fixpunktsatzes

Folgende Anwendungen der Fixpunktformel wurden besprochen:

(i) Hat $g \in G$ nur endlich viele Fixpunkte, so gilt:

$$L(g,E) = \sum_{p \in X^g} \frac{\Sigma(-1)^k \mathrm{Spur}(g|E_p^k)}{\det(I-g|T_p)} .$$

(ii) Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, V ein holomorphes Vektorbündel und G eine endliche Automorphismengruppe des Paares (X,V). Der zugehörige Dolbeaultkomplex $A^{\cdot}(X;V) = \Gamma(X,\Omega^{0,\cdot}(V))$ ist elliptisch, und für $g \in G$ ist

$$L(g,A^{\cdot}(V)) = \Sigma(-1)^k \ \mathrm{Sp}\ (g|H^k(X;\mathcal{V})).$$

F. LORENZ: CHERNsche Klassen und die kohomologische Formulierung des Indexsatzes

Es wurde über charakteristische Klassen $K(-) \longrightarrow H^{**}(-;\mathbb{Q})$ berichtet und der Cherncharakter ch definiert.
Durch Vergleich des Thomisomorphismus in K-Theorie und Kohomologie wurde folgende Formel abgeleitet:

$$\mathrm{ind}_t(u) = (-1)^n \{ch(u)\ \mathcal{T}(X)\}[TX],$$

X ist kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, $\mathcal{T}(X) := \mathcal{T}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ die Toddklasse.

K. KIYEK: Die kohomologische Formulierung der Fixpunktformel

Es wurde, ausgehend von der Gleichheit von topologischem und analytischem Index, die kohomologische Formulierung der Indexformel in eine Formulierung der Lefschetz-Formel übersetzt, in der Chern-Klassen des Normalenbündels auftreten.

M. KNEBUSCH: Die Signatur

Sei X eine kompakte reelle C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 l, die orientiert ist. Wir betrachten einen elliptischen Operator

$$D^+ : \Lambda_+(TX \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda_-(TX \otimes \mathbb{C}),$$

der aus $d + \partial$ durch Einschränkung auf die Eigenräume $\Lambda_{\pm}(TX \otimes \mathbb{C})$ einer kanonischen Involution ι auf $\Lambda(TX \otimes \mathbb{C})$ entsteht. Man verifiziert mit Hodge-Theorie: $\mathrm{ind}_a D^+ = 0$ für ungerades l, und $\mathrm{ind}_a = \mathrm{Sign}(X)$ für gerades l.
Andererseits findet man: $\mathrm{ind}_t D^+$ = L-Geschlecht von X. Eine äquivariante Version wurde mitgeteilt.

T. tom DIECK: Invarianten freier Aktionen

Ausgehend von einer Erläuterung des G-Signatur Satzes wird die Invariante $\sigma(g,X)$, für G-Mannigfaltigkeiten X und $g \in G$ ohne Fixpunkte auf X, eingeführt. Beweis der Analytizität dieser Funktion nach Atiyah-Singer. Anwendung auf freie Involutionen auf Sphären.

W. D. GEYER: Der Satz von RIEMANN-ROCH

Die Eulercharakteristik eines analytischen Vektorbündels V auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist der analytische Index eines elliptischen Komplexes, des Dolbeault-Komplexes, dessen Symbol gerade das Bild von V unter dem Thom-Isomorphismus ist.
Nach Atiyah-Singer läßt sich der analytische Index topologisch berechnen; die kohomologische Formulierung ergibt Hirzebruchs Riemann-Roch-Formel

$$\chi(X,V) = \{ch(V) \cdot \mathcal{T}(X)\}[X].$$

Spezialisierung auf kleine Dimension. Analoge Aussage für G-Operationen mit Anwendungen.

W. END: Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Mit Hilfe des Index eines Operators kann man folgende Sätze beweisen:

(i) Gibt es auf einer kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit X ein Vektorfeld ohne Nullstellen, so ist $\chi(X) = 0$.

(ii) Gibt es auf einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X^{4q} ein 2 dimensionales orientiertes Feld von Tangentenebenen, so ist $\chi(X) \equiv 0 \bmod 2$ und $\chi(X) \equiv \mathrm{Sign}(X) \bmod 4$.

(iii) Gibt es auf einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X^{4q} r unabhängige Tangentenebenen $V_1, \dots, V_r$ mit $\dim V_i \equiv 1 \bmod 4$, dann ist $\mathrm{Sign}(X)$ durch $2a_r$ teilbar, wobei a_r gegeben ist durch

r:	1	2	3	4	5	6	7	8
a_r:	1	2	4	4	8	8	8	8

$a_{r+8} = 16\, a_r$.

Th. Bröcker (Heidelberg)