Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 01211

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 13/1970

Methoden und Verfahren der mathematischen Physik

19. bis 25. April 1970

Die diesjährige Tagung über Methoden und Verfahren der mathematischen Physik war die zweite Veranstaltung unter diesem Thema in Oberwolfach und stand wieder unter der Leitung von B. Brosowski und E. Martensen. Erfreulich war, daß nicht nur die Zahl der Institute, aus denen die Teilnehmer gekommen waren, größer, sondern auch der Problemkreis, aus dem Vorträge gehalten wurden, erheblich breiter geworden ist. Beides darf wohl als Zeichen dafür gewertet werden, wie groß das Interesse und auch das Bedürfnis an einer diesem Thema gewidmeten Tagung ist.

Die engen Beziehungen zwischen physikalischen Gegebenheiten, der mathematischen Theorie und der Numerik wurdenwieder an vielen Stellen offenkundig. Ein bemerkenswerter Schwerpunkt der in diesem Jahr gehaltenen Vorträge bestand darin, allgemeine funktionalanalytische Konzepte für die Behandlung der einschlägigen Probleme bereitzustellen. Diese Methoden haben sich auch in der mathematischen Physik als besonders fruchtbar und für die weitergehenden Untersuchungen erfolgversprechend erwiesen, sei dies nun bei der Erfassung physikalischer Phänomene durch mathematische Modelle und deren Lösung oder der Untersuchung von Konsistenz und Konvergenz numerischer Methoden.

Der bewußt klein gehaltene Kreis der Teilnehmer (26 mit 18 Vorträgen) erlaubte eingehende Diskussionen und einen fruchtbaren Gedankenaustausch. Dem Institut und seinem Personal gebührt herzlicher Dank dafür, daß es den harmonischen Verlauf der Tagung ermöglichte.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Teilnehmer

G. Braunss, Darmstadt
B. Brosowski, Göttingen
H. Drehmann, Stuttgart
R. Gorenflo, Garching
N. Grieb, Stuttgart
A. Haimovici, Iasi
K.-H. Hauer, Göttingen
G. Hery, Berlin
H. Jeggle, Darmstadt
P. Kafka, München
K. Kirchgässner, Bochum
R. Kreß, München
N. Latz, Berlin
R. Leis, Bonn
E. Martensen, Darmstadt
E. Meister, Berlin
A. Müller, Göttingen
D. C. Pack, Glasgow
K. v. Sengbusch, München
W. Törnig, Jülich
H. L. de Vries, München
W. v. Waldenfels, Heidelberg
R. Wegmann, München
H. Weinitschke, Berlin
W. Wendland, Berlin
P. Werner, Stuttgart

Vortragsauszüge

G. BRAUNSS: Unstetigkeitsflächen bei Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Typ der Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik.

Ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung werde vom Typ der Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik oder kurz vom Typ MH genannt, wenn diejenigen Terme, die zugleich nichtlinear sind und Ableitungen enthalten, von der Gestalt fD_xg, $D'_x(fD_xg)$ sind; dabei seien D_x und D'_x lineare Differentialoperatoren 1. Ordnung und f,g reell- oder komplexwertige Funktionen. Mit Hilfe eines Regularisierungsprozesses läßt sich für Differentialgleichungen vom Typ MH ein Theorem über die Existenz von Lösungen mit Unstetigkeitsflächen beweisen, aus dem sich zugleich die Sprungbedingungen beim Durchgang durch diese Flächen ohne explizite Benutzung von Integralsätzen herleiten lassen. Als Beispiele werden die magnetohydrodynamischen Gleichungen sowie die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für ein sphärisch-symmetrisches Feld betrachtet.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. DREHMANN: Bemerkungen zum Dirichletschen Rand- und Anfangswertproblem für die Wellengleichung

In den letzten Jahren sind von verschiedenen Autoren Hilbertraummethoden zur Behandlung von gemischten Rand- und Anfangswertproblemen für hyperbolische Gleichungen, insbesondere die Wellengleichung, verwendet worden (Ladyzhenskaya, Vishik und Wilcox). Die in diesen Arbeiten benutzten Hilberträume bestehen aus Äquivalenzklassen von im Lebesgueschen bzw. Bochnerschen Sinn integrierbaren Funktionen. Wie Peter Werner *) zeigte, ist es auch möglich, einen Zugang zu diesen Räumen ohne Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs auf distributionentheoretischer Grundlage zu gewinnen. In dem Vortrag wird skizziert, wie sich mit Hilfe dieses Aufbaus ein Eindeutigkeits- und ein schwacher Existenzsatz für das Dirichletsche Rand- und Anfangswertproblem der Wellengleichung gewinnen läßt.

R. GORENFLO: Behandlung einer ebenen magnetohydrodynamischen Strömung mittels komplexer Analysis

Gegeben sei eine homogene Plasmaströmung durch einen Kanal mit parallelen isolierenden Wänden im ebenen Modell. Senkrecht zur Grundebene sei ein homogenes Magnetfeld gerichtet. In der Strömung befindet sich eine positive und eine negative Elektrode (senkrecht zur Grundebene). Es wird gefragt nach der Strömung $\vec{j}$ des von der positiven in die negative Elektrode fließenden elektrischen Stromes. Nach einer leichten Vereinfachung erweist sich das Vektorfeld $\vec{j}$ außerhalb der Elektroden als harmonisch, und $\vec{j}$ kann als Konjugiert-Komplexes einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden. Mittels der Technik der konformen Abbildung kann man $\vec{j}$ explizit in Form einer elementaren Funktion ermitteln und durch Variation der Lage der Elektroden physikalisch interessierende Fälle diskutieren. Dieses Problem trat auf bei der Entwicklung von MHD-Generatoren.

*) Vergleiche den Vortrag von P. Werner

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A. HAIMOVICI: Gleichungen mit Mengenfunktionen als Unbekannten

On considère l'équation:

(1) $$\frac{d\varphi}{d\mu}(P) = f(P,E_P) \quad ,$$

où: a) Ω est un domaine de R^n, $P \in \Omega$, b) f est une fonction continue de n+1 variables, lipschitzienne par rapport à la dernière, c) A est un σ-anneau de parties de Ω et $E_P \in A$ une partie attachée au point P, d) μ est la mesure de Lebesgue, e) l'inconnue φ est une fonction additive d' ensemble définie sur A. On étudie des problèmes d'existence, d'unicité et de comportement de la solution de (1).

G. HERY: Über eine ebene Gitterströmung mit Kavitation

Eine ideale, inkompressible Flüssigkeit strömt ein ebenes gestaffeltes Streckengitter an, dessen Einzelflügel unabhängig voneinander harmonische Schwingungen kleiner Amplitude und gleicher Frequenz ausführen. Die Ausströmung erfolge unter solchen Bedingungen, daß sich von den Vorderkanten der einzelnen Profile Kavitationsbereiche stromabwärts bis ins Unendliche ausbilden. Der Druck entlang der Kavitationsgrenzen wird als orts- und zeitabhängige Funktion vorgegeben.

Die mathematische Formulierung des Problems führt zu einem gemischten Randwertproblem der Funktionentheorie, das durch konforme Abbildung in ein gemischtes Randwertproblem für den Einheitskreis überführt wird. Diesem Problem wird ein Kopplungsproblem zugeordnet, dessen Lösung angegeben wird.

H. JEGGLE: Integralgleichungen auf unbeschränkten Mannigfaltigkeiten

Wichtige Integraloperatoren der mathematischen Physik, die in normierten Funktionenräumen auf nicht beschränkten Mannigfaltigkeiten operieren, sind dort nicht kompakt. Schränkt man den definierenden Kern jedoch auf eine kompakte Teilmannigfaltigkeit ein, ist der zugehörige Operator kompakt. Mit diesen Operatoren lassen sich die erstgenannten bezüglich der Norm des Raums in der Regel nicht approximieren. Versieht man den Raum jedoch mit einer schwächeren Topologie, kann man gewisse Aussagen der üblichen Näherungstheorie retten. — Von dieser Beobachtung ausgehend werden kollektiv-präkompakte Familien präkompakter Operatoren in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum E studiert. Wesentliches Resultat ist ein konstruktiver Existenzbeweis für die Gleichungen $\lambda f - Kf = g$, wobei K präkompakt in E sei.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

P. KAFKA: Gravitationswellen

Übersicht über die theoretische und experimentelle Situation.

Existenz von Gravitationswellen in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Eigenschaften. Meßbarkeit.

Lineare Näherung und ihre Schwächen. Fortschritte in den letzten Jahren (WKB-Näherung für kurze Wellen auf schwach gekrümmtem Hintergrund; Singuläre Störungsrechnung in der Näherung langsamer Bewegungen innerhalb der Quelle; Numerische Behandlung des in Quadrupolmoden pulsierenden Neutronensterns).

Webers Experiment und seine Ergebnisse. Diskussion möglicher Quellen. Hinweis auf das ungelöste Zweikörperproblem (Zusammenstoß von zwei "schwarzen Löchern").

K. KIRCHGÄSSNER: Singuläre Verzweigungsprobleme im Banachraum

Betrachtet werden nichtlineare Gleichungen der Form $\lambda u - S(u) = 0$ im reellen B-Raum X, wobei S ein kompakter analytischer Operator ist mit $S(\Theta) = \Theta_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Die F-Ableitung $S'(\Theta)$ sei der Nulloperator. Es interessieren insbesondere nichttriviale Lösungen in einer Umgebung von $(\Theta,0)$. Folgendes Resultat wird bewiesen: ist $S(u) = S_R(u) + S_{k+1}(u) + \ldots$, $k > 1$, und S_k der Gradient eines schwach stetigen Funktionals l mit $l > 0$ auf $\|u\| = 1$, so existieren abzählbar unendlich viele Lösungen der obigen Gleichung $u_\nu(\lambda)$ mit $\|u_\nu(\lambda)\| = o(|\lambda|^{1/k-1})$, in einer geeigneten Umgebung von $\lambda = 0$. Anwendungen auf klassische Verzweigungsprobleme werden aufgezeigt.

R. KRESS: Greensche Funktionen und Tensoren für verallgemeinerte harmonische Vektorfelder

In der Vereinigungsmenge endlich vieler dreidimensionaler Gebiete beliebigen topologischen Zusammenhangs als Definitionsbereich werden für die vektorielle Poissongleichung bei "elektrischen und bei "magnetischen" Randbedingungen Existenz und Eindeutigkeitssätze gewonnen sowie Greensche Tensoren konstruiert. Zusammen mit den Greenschen Funktionen zum klassischen Dirichletschen und Neumannschen Problem für die skalare Poissongleichung ermöglichen diese Greenschen Tensoren eine Darstellung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

der Lösungen des Dirichletschen und Neumannschen Problems für verallgemeinerte harmonische Vektorfelder.

N. LATZ: Über eine Integralgleichung vom Faltungstyp

Es sei G ein nicht notwendig beschränktes Gebiet im R^n, $n \in N$. Im Raum $L_2(G)$ wird folgende Integralgleichung untersucht:

$$\phi(x) + \lambda \int_G S_\alpha(|x-y|;\mu)\,\phi(y)\,dy = \Omega(x) \quad , \quad x \in G \ .$$

Die zugelassenen Kernfunktionen haben folgende spezielle Gestalt:

$$S_\alpha 1 = D_\alpha^n(\mu) \cdot |x|^{-\frac{n}{2}+\alpha} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-\alpha}(\mu|x|) \quad , \quad \alpha > 0 \ .$$

Es bezeichnet dabei $H_\nu^{(1)}$ die Hankelsche Funktion erster Art zum Index ν. Zur Behandlung der Aufgabe wird mit Hilfe der Fouriertransformation eine charakterisierende Gleichung hergeleitet. Deren Diskussion liefert die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung der Integralgleichung.

R. LEIS: Die Methode der Grenzabsorption in der Elastizitätstheorie

Außenraumaufgaben elliptischer Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe der Integralgleichungsmethode behandeln. Diese Methode setzt jedoch einen glatten Rand voraus und führt in der Elastizitätstheorie auf singuläre (nicht Fredholmsche) Integralgleichungen. Diese Schwierigkeit kann man vermeiden, wenn man statt dessen die Methode der Grenzabsorption benutzt. Es wird gezeigt, daß man mit dieser Methode sehr elegant Existenzbeweise in der Elastizitätstheorie führen kann, auch bei Differentialgleichungen vierter Ordnung (Plattengleichung).

E. MEISTER: Randwertprobleme aus der Theorie der Beugung ebener Wellen an einem Parallelplattengitter

Eine ebene zeitharmonische elektromagnetische Welle falle auf ein unendliches gestaffeltes Gitter aus ideal leitenden Platten der Länge l und unendlicher Breite. Das gestreute und transmittierte Feld können eindeutig berechnet werden nach Lösung des 1ten und 2ten Randwertproblems der Helmholtzschen Schwingungsgleichung im $\mathbb{R}^2$ für das Gitter, das durch Projektion auf die xy-Ebene entsteht. Nach Abspalten von endlich vielen Partialwellen vor bzw. hinter dem Gitter erhält man Randwertprobleme,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die mittels der zweiseitigen Laplace-Transformation bezüglich x und des "Dreiteil-Wiener-Hopf-Verfahrens" auf unendliche lineare Gleichungssysteme reduziert werden können, die für genügend große l eindeutig auflösbar sind. Die Amplituden der abgespaltenen Partialwellen können aus einer Holomorphieforderung auf der imaginären Achse der Bildvariablen s dann eindeutig bestimmt werden.

D. C. PACK: Die Wirkung des molekularen Wechselwirkungsgesetzes auf die Expansion eines Gases von einer Quelle

Bei der Strömung eines Strahles aus einer Düse in ein Vakuum geht die Temperatur längs der Stromlinien gegen einen konstanten Wert und nicht gegen Null, wie es von einer Lösung der gewöhnlichen Gleichungen der Gasdynamik zu erwarten ist. Dieses Resultat erklärten Hamel und Willis, als sie von einer theoretischen Untersuchung der Ausbreitung eines Gases von einer Quelle zeigten, daß die Temperatur nicht isotropisch bleibt, sondern mittels zwei partiellen Temperaturen, $T_{\parallel}$ und $T_{\perp}$, zu beschreiben ist. Die Methode von Hamel und Willis ist hier auf den Fall eines Plasmas angewendet worden. Man findet, daß die Strömung fast isotropisch bleibt, und vermutet, daß dieses Ergebnis auf die Stärke des Coulombschen Wechselwirkungsgesetzes zurückzuführen ist. Daher ist eine Abschätzung der Wirkung anderer Potenzgesetze $({}^1/r^s)$ vorgenommen worden. Es ist schließlich zu sehen, daß die Strömung eine starke Anisotropie nur dann erfährt, wenn $s > {}^{13}/_5$ ist. Dieses Resultat genügt, sowohl das Verhalten der für einen Plasmastrahl numerisch erhaltenen Lösung von Chu und Talbot als die Rolle des molekularen Wechselwirkungsgesetzes auf die Gültigkeit der Kontinuumslösung für einen Strahl irgendeines Gases zu erklären.

K. v. SENGBUSCH: Periodische nichtlineare Schwingungen von Sternatmosphären

In der Theorie der Sternentwicklung sucht man nach periodischen Lösungen der folgenden dynamischen Aufbaugleichungen für das Sterninnere:

$$(1)\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{GM_r}{r^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M_r} = 0\ ;\quad (2)\ \frac{\partial E}{\partial t} + p\,\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial L_r}{\partial M_r} = 0\ ;\quad (3)\ \frac{\partial r}{\partial t} - u = 0\ ;$$

$$(4)\ V - \frac{4\pi}{3}\frac{\partial r^3}{\partial M_r} = 0\ ;\quad (5)\ L_r + \frac{64\pi^2 acr^4T^3}{3\varkappa}\frac{\partial T}{\partial M_r} = 0\ .$$ Die Lösung wird in

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

den Lagrange-Variablen M_r und t diskretisiert und die Stützstellenwerte der gesuchten Funktionen und der Eigenwert π durch Lösung eines nicht-linearen Differenzengleichungssystems approximiert. Es wurde zunächst versucht, dieses System mit der Newton-Raphson-Methode iterativ zu lösen. Es stellte sich heraus, daß genügend gute Ausgangsnäherungen, die eine rasche Konvergenz ergeben würden, praktisch sehr schwer anzugeben sind, weil in gewissen Teilen des (M_r,t)-Gebietes ein außergewöhnlich nicht-lineares Verhalten der Lösungen beobachtet wird. Es gelingt aber durch Einschaltung von nichtlinearen Zwischeniterationen, diese Gebiete gesondert zu behandeln und dann aus praktisch leicht angebbaren Ausgangsnäherungen in 10-15 Iterationen Konvergenz zu erzielen.

W. TÖRNIG: Nichtlineare Gleichungssysteme und Diskretisierung des Dirichlet-Problems nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

Die bei der Diskretisierung linearer elliptischer Differentialgleichungen auftretenden linearen Gleichungssysteme werden fast ausschließlich iterativ mit Hilfe von "successive overrelaxation methods (SOR)" und "alternating direction implizit methods (ADI)" gelöst. Ähnliche Verfahren lassen sich auch für entsprechende nichtlineare Gleichungssysteme aufstellen. Es wird zunächst gezeigt, daß die für den linearen Fall bekannten Konvergenzsätze sich fast wörtlich übertragen lassen. Die Rolle der Matrix spielt dabei im nichtlinearen Fall die Funktionalmatrix. Wie auch bei anderen Iterationsverfahren für nichtlineare Probleme erhält man allerdings auch hier nur "lokale" Aussagen. Es wird dann untersucht, wann es Differenzapproximationen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen gibt, so daß die genannten Iterationsverfahren anwendbar sind.

H. WEINITSCHKE: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für nichtlineare Randwertprobleme der Schalentheorie

Es werden die Grundgleichungen für endliche Deformationen schwach gekrümmter Schalen mit beliebiger Schalenmittelfläche formuliert und über bisher vorliegende Existenz- und Eindeutigkeitssätze in speziellen Fällen berichtet. Für den Grenzfall einer rotationssymmetrisch belasteten Membran wird die Konvergenz einer für die Lösung benötigten Reihe bewiesen, ferner wird für diesen Grenzfall eine Eindeutigkeitsaussage auf elementarem Wege erhalten. — Für den allgemeinen Fall wird ein Existenzsatz für

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

beliebige Belastung angegeben, zu dessen Beweis ein Fixpunktsatz von Leray-Schauder herangezogen wird. Für kleine Belastungen ergibt sich ferner ein Eindeutigkeitssatz für hinreichend schwache Krümmung der Schalenmittelfläche. Die Resultate lassen sich auch auf spezielle Schalengleichungen für nicht notwendig schwach gekrümmte Schalen übertragen.

W. WENDLAND: Bemerkungen über die Fredholmschen Sätze

Bei außerordentlich vielen Problemen der Mathematischen Physik sind die Fredholmschen Sätze Grundlage von Existenzaussagen und Lösungsverfahren. Während sie von Fredholm für eine Integralgleichung zweiter Art allein im Funktionsraum der stetigen Funktionen bewiesen wurden, benötigt die Riesz-Schauder-Theorie neben der in einem Banachraum gegebenen Gleichung ihre adjungierte Gleichung im Dualraum. Damit ist der klassische Satz nicht in der funktionalanalytischen Formulierung enthalten. Bei vielen Anwendungen ist man aber ähnlich wie im klassischen Fall daran interessiert, die Fredholmschen Sätze für zwei formal adjungierte Gleichungen in vorgegebenen Räumen unter Verzicht auf die Dualräume benutzen zu können. Deshalb werden der Satz von Nikolski und die Fredholmschen Sätze auf Paare von Gleichungen und Räumen übertragen, die durch eine Sesquilinearform verknüpft sind. Außerdem können meromorphe Inversen von Operator-wertigen analytischen Funktionen charakterisiert werden.

P. WERNER: Eine distributionentheoretische Begründung der Theorie der L_p-Räume

Zur Behandlung von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik haben sich in den letzten Jahrzehnten vielfach Hilbertraum-Methoden als nützlich erwiesen. Hierzu war es erforderlich, die klassischen Funktionenräume in geeigneter Weise, etwa mit Hilfe des Lebesgueschen Integrals, zu vollständigen Räumen fortzusetzen. Es wird skizziert, wie sich eine derartige Fortsetzung in begrifflich sehr einfacher Weise mit Hilfe von Distributionen durchführen läßt. Hierdurch ergeben sich zahlreiche wesentliche Vereinfachungen, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll. In analoger Weise läßt sich eine elementare Theorie des Bochnerschen Integrals entwickeln, das vor allem in der Theorie zeitabhängiger Probleme (zum Beispiel Rand- und Anfangswertprobleme für die Wellengleichung) verwendet worden ist.

H. Jeggle (Darmstadt)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©