MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 14/1970

Spezialtagung über Statistik
(Verteilungsunabhängige Verfahren)

26.4. bis 2.5.1970

Die Verteilungsunabhängigen Verfahren stellen ein Arbeitsgebiet dar, auf dem neuere theoretische Forschung unmittelbarem praktischem Anwendungsinteresse begegnet. Das zeigt sich auch in der Themen- und Teilnehmerliste dieser Spezialtagung, die unter der Leitung von Prof. E.Walter (Freiburg) stand. Leider enthält die Liste nicht die Namen der ungarischen Kollegen E.Csaki, K.Sarkadi, G.Tusnadi und I.Vincze sowie I.Vaduva aus Rumänien. Sie hatten ihre Teilnahme zugesagt und bereits Vorträge eingereicht, mußten jedoch kurzfristig wieder absagen. Zu bemerken ist noch, daß das Wetter so schlecht war, daß sogar der traditionelle Spaziergang nicht stattfinden konnte.

Teilnehmer:

J.Bammert, Freiburg
P. van Beek, Bonn
W.Bühler, Heidelberg
M.Csörgö, Wien
F.Eicker, Freiburg
J.Fabius, Leiden
W.Fieger, Karlsruhe
F.Hampel, Zürich
B.Harris, Eindhoven
W.Hoeffding, Chapel Hill
P.J.Huber, Zürich
H.Klinger, Düsseldorf
J.Krauth, Düsseldorf
V.Kurotschka, Ann Arbor
G.A.Lienert, Düsseldorf
O.Ludwig, Bad Nauheim
D.Morgenstern, Freiburg
G.E.Noether, Storrs
D.Plachky, Münster
M.L.Puri, Bloomington
H.Rüst, Zürich
M.Schaefer, Münster
G.R.Shorack, Amsterdam
E.Sonnemann, Münster
K.Spicher, Aachen
H.Störmer, München
W.Vogel, Bonn
E.Walter, Freiburg
H.Witting, Münster
W.R. van Zwet, Oegstgeest

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

P. VAN BEEK : Die Konstante im Theorem von Berry-Esseen

Wir betrachten zufällige Größen $X_1,\dots,X_n$ mit den Verteilungsfunktionen $F_1,\dots,F_n$ und den charakteristischen Funktionen $f_1,\dots,f_n$, $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = \sigma_i^2$, $E(|X_i|^3) = \beta_i < \infty$ $i=1,\dots,n$.
$\sigma^2 := \Sigma\sigma_k^2$, $\varepsilon := (\Sigma\beta_k) / \sigma^3$

F sei $\mathcal{L}(\frac{X_1+\dots+X_n}{\sigma})$ und f die zugehörige charakteristische Funktion.

Nach dem Theorem von Berry-Esseen (1941/42) und Bergström (1949) gibt es ein $C \in R^+$, so daß für alle F, definiert wie oben,

$$\sup_x |F(x) - \phi(x)| \leq C\cdot\varepsilon$$

gilt. ϕ ist die N(0,1)-Verteilungsfunktion.

Zolotarev hat in einem fundamentalen Lemma eine Hilfsdichte

$$p(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$$

gefunden, deren charakteristische Funktion einen kompakten Träger hat. Wir betrachten die Intervalle

$0 < \varepsilon < 7\cdot 10^{-3}$ und $7\cdot 10^{-3} \leq \varepsilon \leq 1{,}11$ (I_1 und I_2).

Auf I_1 setzt man p(x) ein, auf I_2 eine Schar von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten und minimiert bezüglich der Scharparameter. Dadurch wird die Konstante verbessert.

M. CSÖRGÖ : <u>On the problem of replacing composite statistical goodness-of-fit hypotheses by equivalent simple ones</u>

Consider $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, an n-dimensional Euclidean space of points $X = (X_1, \ldots, X_n)$ with the σ-algebra $\mathcal{A}$ of Borel sets. Let $\mathcal{P}$ be a set of probability distributions defined on $\mathcal{A}$, having a specified product probability density $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \Theta)$. We discuss measurable mappings $Y = T(X)$, $X \in \mathcal{X}$, of $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ into $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$, another measurable space, with the specific property that T satisfies the following two conditions : (1) For every $P \in \mathcal{P}$, the distribution induced on $\mathcal{B}$ by T, Q_P^Y is that of k $(<n)$ ordered random variables of k independent uniformly distributed random variables on $[o,1]$. In this case we write $Q_P^Y = Q_{\mathcal{P}}^Y$. (2) If for some P' on $\mathcal{A}$ $Q_{P'}^Y = Q_{\mathcal{P}}^Y$, then $P' \in \mathcal{P}$. If $Y = T(X)$ is a statistic statisfying (1) and (2), then it is clear that the <u>composite</u> goodness-of-fit hypothesis that the distribution of X belongs to the class $\mathcal{P}$ is <u>equivalent</u> to the <u>simple</u> goodness-of-fit hypothesis that the distribution of Y is equal to $Q_{\mathcal{P}}^Y$.

F. EICKER : <u>Ungleichungen für die finiten Verteilungsfunktionen von Statistiken vom Smirnoff'schen Typ</u>

Es werden obere und untere Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit angegeben, daß die empirische Verteilungsfunktion (VF) einer Zufallsstichprobe von der Rechtecksverteilung über $[o,1]$ unterhalb einer Geraden liegt. Damit läßt sich beispielsweise der Fehler für die Approximation der finiten VF von Statistiken vom Smirnoff'schen, Renyi'schen, Csörgö'schen Typ durch deren (einfache) asymptotische VF angeben. Andere Anwendungen sind:

Gewinnung der Bahadur-Kiefer-Darstellung von Stichproben-quantilen durch die empirische VF, ferner Verallgemeinerungen des Satzes vom iterierten Logarithmus auf Doppelfolgen von Zufallsvariablen; Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß die empirische VF unterhalb eines Polygonzugs oder unter allgemeineren Kurven liegt.

F. HAMPEL : Eine qualitative Definition der Robustheit von Schätzungen

Nach einer einleitenden Bemerkung über die Beziehung zwischen Vortrags- und Tagungsthema wird eine knappe Einführung in die bisherige Geschichte der robusten Schätzungen gegeben. Es wird dann die Motivation für eine allgemeine Definition der Robustheit einer Folge von Schätzfunktionen(mit Werten im R^k) dargelegt und gezeigt, daß sich die Prochorov-Distanz zu ihrer Formalisierung gut eignet. Die Definition selbst ist anwendbar auf eine Folge von Beobachtungen in einem beliebigen vollständigen separablen metrischen Stichprobenraum. Hinreichend für Robustheit ist im wesentlichen eine gewisse Stetigkeit der Folge von Schätzfunktionen. Als Beispiele können zunächst einige einfache klassische Schätzungen dienen; sodann werden Kriterien für Robustheit bei (M)-Schätzungen (im Sinne von Huber) und bei Schätzungen, die von 2-Stichproben-Rangtests abgeleitet sind, gegeben. Schließlich wird noch kurz das quantitative Verhalten einiger Schätzungen in Huber's "gross error model" besprochen.

B. HARRIS : The distribution of linear combinations of the sample occupancy numbers

Assume that a random sample of n observations has been taken from a multinomial distribution with N equiprobable cells. The sample occupancy numbers, s_i, $i=0,1,\ldots,n$ are the number of cells occurring i-times in the sample. Let $W = \Sigma w_i s_i$.
As $n,N \to \infty$, so that $n/N \to \alpha > 0$, $(W - E(W))/\sigma_W$ is shown to be asymptotically normal with mean zero and unit variance, given certain conditions on w_i, $i=0,1,\ldots,n$. This result has applications in "goodness-of-fit" testing.
Several tests of "goodness-of-fit" are shown to satisfy the required conditions on w_i. The main result is a generalization of a limit theorem of Sevastyanov and Chistyakov.

W. HOEFFDING : Remarks on linear rank statistics and Bernstein polynomials

Hájek (Ann.Math.Statist.1968) proved under mild conditions that a linear rank statistic S_N is asymptotically normal with mean ES_N and variance σ_N^2 (a certain approximation to var S_N). The problem was left open whether ES_N may be replaced by a certain approximation μ_N to ES_N which is easier to evaluate than ES_N. It has been found that the replacement is possible if one of Hájek's conditions is slightly strengthened. The estimation of $|ES_N - \mu_N|$ turns out to be related to the estimation of the L_1 norm of the difference between a function and the associated Bernstein polynomial, which leads to new results in the theory of Bernstein polynomials. These results can be extended to more general approximation operators, including splines.

J. KRAUTH : Pitman-Permutationstests bei Vorliegen diskreter Verteilungen

Es wird ein Analogon des einseitigen Zweistichproben-Pitman-Permutationstests bei Vorliegen diskreter Verteilungen hergeleitet. Sieht man gleiche Beobachtungswerte formal als verschieden an, ordnet die $\binom{n}{n_1}$ Tupel $(x_{1[\,]}, x_{2[\,]})$ nach fallenden Werten der Prüfgröße $T(x) = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$ an und weist jedem Tupel die Wahrscheinlichkeit $1/\binom{n}{n_1}$ zu, so erhält man, wenn man wie beim Pitman-Permutationstest vorgeht, einen unverfälschten Test zum Niveau α, der gleichmäßig bester Test gegen eine Klasse nicht-ausgearteter geeignet diskretisierter Normalverteilungen ist. Es wird auch die bedingte asymptotische Verteilung der Prüfgröße unter der Nullhypothese angegeben.

V. KUROTSCHKA : Suffiziente Zerlegungen des Stichprobenraumes und verallgemeinerte Bell-Pitman-Statistiken

Nichtparametrische Hypothesen lassen sich im allgemeinen durch Invarianz der hypothetischen Verteilungen bezüglich gewisser Transformationen des Stichprobenraumes $\mathfrak{X}$ beschreiben. Bilden diese Transformationen eine kompakte topologische Transformationen-Gruppe S, so stellen die S-Bahnen auf $\mathfrak{X}$ eine suffiziente Zerlegung von $\mathfrak{X}$ dar, die zur Konstruktion der bezüglich der Menge $\Omega(H_o)$ aller hypothetischen Verteilungen ähnlichen Mengen bzw. der $\Omega(H_o)$-verteilungsfreien Statistiken herangezogen werden können. Im Falle der S-Vollständigkeit von $\Omega(H_o)$ lassen sich $\Omega(H_o)$-ähnliche Mengen und $\Omega(H_o)$-verteilungsfreie Statistiken durch Bell-Pitman-Statistiken charakterisieren, die hier in verallgemeinerter Form definiert und dargestellt werden. Diese erlauben auch eine sehr einfache Charakterisierung mächtigster Tests gegen einfache Alternativen.

O. LUDWIG : Die obere Grenze der Erwartungswerte von Ranggrößendifferenzen

In "Metrika" 3 (1960) wurde auf S. 219-220 eine obere Schranke für $E(x_{(j)} - x_{(i)}) / \sigma$ für beliebige kontinuierliche Verteilungen hergeleitet, wobei $x_{(j)}$ und $x_{(i)}$ die Ranggrößen in einer Stichprobe vom Umfang n sind und σ die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist. Es wurde dazu die Schwarz'sche Ungleichung benutzt und bemerkt, daß es "im allgemeinen schwierig ist, anzugeben, ob bzw. unter welchen Bedingungen sich die Ungleichung verschärfen läßt". Diese Verschärfung gelingt jedoch mit Hilfe einer Modifikation der Schwarz'schen Ungleichung von S. Moriguti, die die "größte konvexe Minorante" benutzt. Man kann dann zeigen, dass die so gefundenen verbesserten Schranken tatsächlich Grenzen sind, die für gewisse — allerdings sehr sonderbare — Verteilungen wirklich angenommen werden.

G.E. NOETHER : Verteilungsunabhängige Konfidenzintervalle

Ein Test der Hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ mit Irrtumswahrscheinlichkeit α bestehe in folgendem : $u_1, \ldots, u_M$ seien "verallgemeinerte" Beobachtungsgrößen; S_1 = Anzahl $(u_i < \theta_0)$; S_2 = Anzahl $(u_i > \theta_0)$. Die Hypothese H_0 wird verworfen, falls $S_1 \leq c$ oder $S_2 \leq c$. Dann ist $u_{(c+1)} < \theta < u_{(M-c)}$ ein Konfidenzintervall mit Konfidenzinveau $1-\alpha$. Dieser Satz erlaubt uns, gewisse nichtparametrische Tests (wie die beiden Wilcoxon-Tests und den Mann-Trendtest) in Konfidenzintervalle für gewisse Lagegrößen und Regressionskoeffizienten zu verwandeln. Eine einfache Bedingung garantiert die asymptotische Normalität der Teststatistik S.

D. PLACHKY : Invariante strenge Tests und invariante ungünstigste Verteilungen

Es wird über folgendes Resultat berichtet: Sind die Klassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen von zwei dominierten Hypothesen invariant gegenüber einer (auflösbaren) Gruppe, so existiert ein invarianter und strenger Test und eine invariante und ungünstigste Verteilung. Handelt es sich bei der Nullhypothese um die Gleichverteilung des Einheitskreises und bei der Gegenhypothese um eine einfache, rotationsinvariante Alternative, die dominiert ist, so ist $\varphi \equiv \alpha$ ein invarianter und strenger Test und die Gleichverteilung der Schwerpunkt einer invarianten und ungünstigsten Verteilung.

M.L. PURI : Nonparametric Methods in Multivariate Analysis I

A class of rank order tests for the multivariate multisample location and scale problem is proposed and studied.

In view of the fact that for multivariate distributions the distributions of rank order statistics fail to be strictly distribution free even under the null hypothesis of the identity of different distribution functions, the principle of rank-permutations is developed to achieve the desired distribution freeness of the proposed class of tests. The asymptotic properties of these permutation rank order tests are studied and certain stochastic equivalence relations of these tests with the multivariate extensions of the tests proposed by Puri (Asymptotic Efficiency of a class of c-sample tests. Ann. Math. Statist. 35 (1964), 102-121) are established. The asymptotic relative efficiencies of these tests with respect to their parametric competitors are also discussed.

M.L. PURI : Nonparametric Methods in Multivariate Analysis II

Let $\underset{\sim}{x}_\alpha = (x_{1\alpha},\dots,x_{p\alpha})$, $\alpha=1,\dots,n$, be n independent and identically distributed random variables drawn from an absolutely continuous cdf $f(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x} \in R^p$. We partition each $\underset{\sim}{x}_\alpha$ into q subvectors with $p_1,\dots,p_q$ components respectively, that is $\underset{\sim}{x}_\alpha = (\underset{\sim}{x}_\alpha^{(1)},\dots,\underset{\sim}{x}_\alpha^{(q)})$, $\alpha=1,\dots,n$. Then for the problems of testing (i) independence of the q subsets, $1 < q \leq p$ and (ii) pairwise independence of $x_{1\alpha},\dots,x_{p\alpha}$, a class of strictly distribution free rank order tests is proposed and studied. To study this problem, we consider suitable measures of association which are analogous to the measures based on the classical product moment correlations. The tests for independence are based on the sample counterparts of these measures of associations. The asymptotic power properties of these tests vis-a-vis the likelihood ratio tests based on the normal theory assumptions are discussed. The main features of the test procedures are their robustness, their invulnerability to gross errors and their high asymptotic relative efficiency vis-a-vis normal theory procedures for various alternatives of interest.

H. RÜST : Maximum-Likelihood-Schätzungen von Parametern bei mehrfach gestutzten Stichproben

In der medizinischen Statistik stößt man auf das folgende Problem : N Patienten können während der Zeiten $t_1, t_2, \dots, t_N$ ab Behandlungsbeginn beobachtet werden. Falls nun die Überlebenszeit $x_i \leq t_i$, kann sie gemessen werden, sonst ist sie unbekannt, und wir wissen lediglich, dass $x_i > t_i$.
Es wird nun angenommen, daß $(g(x_i) - \mu)/\sigma$ die Verteilungsfunktion F(x) hat. Die ML-Gleichungen zur Schätzung der Standardisierungsparameter μ und σ werden aufgestellt und ihre Lösbarkeit diskutiert. Formeln für die Informationsmatrix werden aufgestellt und auf Normalverteilung und Extremwertverteilung angewandt.
Das asymptotische Verhalten im Fall der Normalverteilung wird diskutiert.

G.R. SHORACK : Viewing statistics as functionals on stochastic processes

There exist independent Uniform (0,1) random variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ and a Brownian bridge U on a probability space (Ω, P) that have certain nice properties. Namely $0 < \xi_{n1} < \dots < \xi_{nn} < 1$ for all $\omega \in \Omega$ where the ξ_{ni}'s are the ordered ξ_i's, and all sample paths of U are continuous. But especially useful is

$$(*) \qquad \rho_q(U_n, U) \xrightarrow{P} 0 \text{ as } n \to \infty$$

with $\rho_q(f,g) \equiv \sup_{0<t<1} |f(t) - g(t)|/|g(t)|$,

$U_n(t) \equiv n^{\frac{1}{2}} [\Gamma_n(t) - t]$, Γ_n is the empirical d.f. of $\xi_1, \ldots, \xi_n$, and q is any of a class Q of functions (which contains $q(t) = [t(1-t)]^{\frac{1}{2} - \delta}$ for any $\delta > 0$). Equation (*) says that the sample paths of the empirical process U_n converge to those of the limiting Brownian bridge in a certain strong sense. Many problems in nonparametric statistics can be phrased so that asymptotic normality follows ultimately from (*), with the choice of q influenced by the "scoring function" J. Illustration will be given.

E. SONNEMANN : Total beschränkt vollständige Wahrscheinlichkeitsfamilien

Bezeichnet $B(X,\mathcal{B})$ den Raum aller vollwertigen beschränkten meßbaren Funktionen über einem meßbaren Raum $(X,\mathcal{B})$, so heißt eine Familie $\mathcal{W}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen über $(X,\mathcal{B})$ total beschränkt vollständig, wenn gilt

(1) $\forall f \in B(X,\mathcal{B}): \quad (E_{\mathcal{W}} f \leq 0 \succ f \leq 0 \; [\mathcal{W}] \;)$

Die Bedingung (1) ist äquivalent damit, daß

(2) $\forall B \in \mathcal{B} - \mathcal{N}_{\mathcal{W}}: \quad \sup_{w \in \mathcal{W}} w(B) = 1$

erfüllt ist, wobei $\mathcal{N}_{\mathcal{W}}$ die Menge der $\mathcal{W}$-Nullmengen bezeichne. Mit Hilfe von (2) und des Dichtesatzes von Lebesgue läßt sich die totale beschränkte Vollständigkeit jeder dominierten Translations- und Skalenparameterfamilie folgern. Es sei bemerkt, daß (1) bzw. (2) gerade bedeutet, daß die schwach* abgeschlossene konvexe Hülle von $\mathcal{W}$ gleich der Gesamtheit aller durch $\mathcal{W}$ dominierten Wahrscheinlichkeitsmaße ist.

H. STÖRMER : Einige Bemerkungen zum Kolmogoroff-Smirnow-Test

1. Es seien $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ die Orderstatistics einer Gleichverteilung in $(0,1)$ und $F_n^*(x)$ die zugehörige empirische Verteilungsfunktion. Weiter sei $n(x) = nF_n^*(x)$. Dann gilt für

$$0 \leq a < b \leq 1, s > 0, \eta > 0, a+s+(k-1)\eta \leq b, 1 \leq k \leq n:$$

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{k}\left[n(a+s+(j-1)\eta)-n(a) \geq j\right] \,\middle|\, n(b)-n(a)=k\right\} = \frac{s}{s+k\eta}\left(\frac{s+k\eta}{b-a}\right)^k .$$

Diese Beziehung führt zu einem einfachen Beweis der Formel von M. Dwass (u.a.) für die Wahrscheinlichkeit

$$P\left\{\sup_x\left[\alpha\, F(x) - F_n(x)\right] \geq \bar{\mu}\right\}, \quad \bar{\mu} > 0, \quad \alpha \geq \bar{\mu} .$$

2. Es sei $0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} = 1$ und $n_k = n(\alpha_k)$,

$$q_k = \alpha_{k+1}^k \, P\left\{\bigcap_{j=1}^{k}(n_j \geq j) \,\middle|\, n_{k+1} = k\right\}, \quad k = 1,\ldots,n; \; q_0 = 1$$

Dann gilt die Rekursionsformel

$$q_k = t^k - \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}(t-\alpha_{i+1})^{k-i} q_i, \quad t \text{ bel. reell}, \; k=1,\ldots,n.$$

H. WITTING : Zur Theorie der Rangtests

Bekanntlich läßt sich für eine Reihe verteilungsunabhängiger Testprobleme ein Analogon zur Hoeffding-Formel und damit ein lokal bester Rangtest herleiten. Bezeichnet G die Gruppe unendlicher Ordnung, gegenüber der das Testproblem invariant ist, und q die Anzahl der nicht degenerierten G-Bahnen, so gibt es eine Gruppe Q der Ordnung q, unter der die Verteilungen des Randes der Hypothesen invariant sind und die transitiv auf den nicht-degenerierten G-Bahnen operiert. Die Tatsache ermöglicht eine einfache Herleitung einer verallgemeinerten Hoeffding-

Formel und damit unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen diejenige eines lokal besten Rangtests. Der Zusammenhang mit dem lokal gleichmäßig besten Rangtest, die Präzisierung der lokalen Optimalität zur asymptotischen Optimalität sowie die Verwendung parametrischer und nichtparametrischer Alternativen wird diskutiert. Schließlich wird die formale Analogie zur Herleitung der Permutationstests sowie die Reduktion durch Suffizienz diskutiert.

W.R. van ZWET : <u>Isotonic estimation in non-parametric problems</u>

Assume F and G are distribution functions on R' with densities f and g. We say that F is c-ordered with respect to G ($F \underset{c}{<} G$) if $G^{-1}F$ is convex on the interval where $0 < F < 1$. If $F \underset{c}{<} G$ then

$$r(x) = \frac{f(x)}{gG^{-1}F(x)}$$

is non-decreasing in x. We assume G known, $F \underset{c}{<} G$ and consider the problem of estimating r. For G uniform or exponential the problem reduces to estimating a monotone density or a monotone failure rate. A number of estimators are proposed and their asymptotic properties are investigated.

J. Bammert (Freiburg i.Br.)