# MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

## T a g u n g s b e r i c h t 15/1970

## Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Anwendungen

3.5. bis 9.5.1970

Im Mai 1970 wurde in Oberwolfach (unter der Leitung von H.-W. Knobloch, Berlin und R.Reißig, Saarbrücken) die zweite Tagung über Anwendungen gewöhnlicher Differentialgleichungen abgehalten, nachdem im Oktober 1968 (von H.-W. Knobloch, Berlin und P. Sagirow, Stuttgart) zum ersten Mal der Versuch gemacht worden war, die an diesem sehr aktuellen und mathematisch vielseitigen Gebiet interessierten deutschen Wissenschaftler zu versammeln. Allerdings hat bereits im März 1958 ein Kolloquium über Nichtlineare Mechanik stattgefunden, das allen daran Beteiligten noch in guter Erinnerung ist; danach wurde aber in der Bundesrepublik zehn Jahre lang keine mathematische Tagung mit dieser oder ähnlicher Thematik durchgeführt.

Bei der diesjährigen Tagung zeigte es sich nun wieder, daß die Forschung über dynamische Systeme - trotz ihrer zunehmenden Bedeutung, zum Beispiel im Hinblick auf Fragen der Regelung und Steuerung - in Deutschland immer noch in den Anfängen steckt und einer systematischen Förderung bedarf. Auch in der Ausbildung sollte dieses Fachgebiet wenigstens an einigen Universitäten oder Technischen Hochschulen berücksichtigt werden.

Das ursprüngliche Vortragsprogramm mußte infolge der Absagen einiger ausländischer Wissenschaftler (z.B. I.Vrkoč, Prag, ČSSR und C.Corduneanu, Jassy, RPR) eingeschränkt werden; dadurch fielen wichtige Fragestellungen weg (etwa die stochastischen Differentialgleichungen), oder sie wurden zu knapp behandelt (z.B. die optimale Steuerung). Auf der nächsten Tagung, die im Herbst 1971 geplant ist, soll sich eine Vortragsreihe mit den Grundzügen stochastischer Systeme befassen und dabei auch auf neuere Arbeiten der Fachliteratur eingehen.

Da ein Teil der angekündigten Vorträge kurzfristig ausfiel, brauchte man die Vortrags- und Diskussionsdauer nicht zu begrenzen. Das wirkte sich recht günstig aus, und man hatte den Eindruck, daß alle von den Referenten angeschnittenen Fragen auf lebhaftes Interesse stießen. Auch außerhalb der Vortragsveranstaltungen fanden - in kleineren oder größeren Gruppen - zahlreiche Diskussionen statt, aus denen sicher mancher Teilnehmer Anregungen für seine weitere wissenschaftliche Arbeit gewonnen hat. Die relativ geringe Teilnehmerzahl förderte die persönlichen Kontakte und war ein Grund für die gute Tagungsatmosphäre. Das schöne Wetter (nach langer Regenzeit) und ein gelungener Ausflug in die frühlinghafte Schwarzwaldlandschaft trugen zum Gelingen der Tagung bei.

Im Tagungsprogramm waren die folgenden Problemkreise erkennbar: Periodische Lösungen nicht-autonomer Systeme mit den Berichten von H.-W. Knobloch - R. Reißig - J. Mawhin, die sich gegenseitig ergänzten und geometrische, analytische bzw. funktionalanalytische Methoden sowie ihre Anwendung auf Beispiele aufzeigten. - Stabilitätsuntersuchungen im klassischen Sinn, vertreten durch die Beiträge von A. Huaux - I. Barbalat (wobei der zweite in Abwesenheit des Verfassers in etwas modifizierter Form referiert wurde), und eine Ausdehnung von Stabilitätsbegriffen und - methoden (insbesondere des Invarianzprinzips von La Salle) auf Gleichungen mit Nachwirkung (Funktionaldifferentialgleichungen) im Referat von F. Kappel. Der Vortrag von Fräulein I. Troch gehörte - zumindest teilweise - zu den Anwendungen der Stabilitätstheorie; er beschäftigte sich mit der Möglichkeit, die Beantwortung qualitativer Fragen im Zusammenhang mit gewissen Regelungsdifferentialgleichungen durch passende Variablentransformationen zu vereinfachen. - Näherungsverfahren zur Konstruktion quasiperiodischer bzw. periodischer Lösungen in den Referaten von E. Brommundt - K. Nixdorff, wobei die Diskussion zeigte, daß gerade auf diesem Teilgebiet noch zahlreiche Probleme ungelöst sind. - Dynamische Systeme in einer abstrakten topologischen Formulierung, allerdings mit dem Ausblick auf gewisse Anwendungen, die von G. Szegö - G. Treccani dargelegt wurden. - Optimierungsfragen , einmal im Zusammenhang mit der Steuerung von

Systemen und der Ausdehnung des Pontrjaginschen Maximumsprinzips (Frau G. Plate) und zum anderen bezüglich der Entwicklung von Strategien bei Zweipersonenspielen vom Typ der Differentialspiele (J. André). - Rein analytische Fragen wurden in einem Bericht über komplexe Differentialgleichungen von L. Reich aufgeworfen. - Wie schon angedeutet wurde, muß auf künftigen Veranstaltungen versucht werden, das Spektrum der behandelten Probleme auszuweiten.

In mehreren öffentlichen Diskussionen wurde unter der Leitung von P. Sagirow (Vorsitzender der Kommission für Regelungstheorie der GAMM) und in Anwesenheit von J. Dörr (Schriftführer der GAMM) ein Programm zur Förderung der Regelungstheorie in Forschung und Lehre der Bundesrepublik behandelt. Die Initiative zu dem Plan der GAMM, an das Wissenschaftsministerium mit diesbezüglichen Vorschlägen heranzutreten, geht auf J. Dörr zurück. Seitens der Mathematiker wurde bereits ein detaillierter Entwurf zum Ausbau der mathematischen Regelungstheorie vorgelegt. Mathematiker und Regelungstechniker besprachen nun die Situation der Regelungstheorie, wobei der Name als nicht sehr glücklich empfunden wurde; besser wäre die Bezeichnung "dynamische Systeme", die jedoch nicht eindeutig ist, da sie neuerdings für einen topologischen Problemkreis verwendet wird. Man erörterte ein gemeinsam durchzuführendes Arbeitsprogramm hinsichtlich der Forschung und Ausbildung in einem Zentrum, das an einer Universität oder Technischen Hochschule gegründet werden soll. Dabei gliederte man die Aufgaben nach folgendem Schema: Regelung und Steuerung technischer Systeme - Entwurf mathematischer Modelle - Nichtlineare Differentialgleichungen (sowie andere Funktionalgleichungen, die zur Beschreibung selbsttätig arbeitender Systeme herangezogen werden) - Kontrolle von Systemen (Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit) - Optimierung. Auf der Grundlage schon vorliegender und z.T. in den GAMM-Mitteilungen veröffentlichter Vorschläge soll eine Kommission, die sich aus Mathematikern und Regelungstechnikern zusammensetzt, noch vor Ende dieses Sommersemesters einen konkreten Maßnahme - und Tätigkeitsplan ausarbeiten, der allen maßgebenden Fachleuten zur Unterschrift vorgelegt werden kann. Der GAMM-Vorstand wird diesen Entwurf dem Wissenschaftsministerium übermitteln, und es besteht durchaus Hoffnung, daß ein solcher Entwurf in den Grundzügen realisiert wird.

Teilnehmer

J. André , Saarbrücken
M. Breger , Berlin
E. Brommundt , Darmstadt
J. Dörr , Saarbrücken
L. Fischer , Saarbrücken
W. Götz , Würzburg
F. Hartmann , Berlin
E. Hofer , Stuttgart
A. Huaux , Alsemberg (Belgien)
F. Kappel , Graz (Österreich)
H. Kiendl , Bochum
H.-W. Knobloch , Berlin
J. Mawhin , Liège (Belgien)
K. Nixdorff , Bochum
Frau G. Plate , Berlin
L. Reich , Bonn
R. Reißig , Saarbrücken
P. Sagirow , Stuttgart
G.P. Szegö , Mailand (Italien)
M. Thoma , Hannover
G. Treccani , Mailand (Italien)
Frau I. Troch , Wien (Österreich)

Vortragsauszüge

L.REICH: Singularitäten analytischer Differentialgleichungen mit holomorph einmündenden Integralen

Briot und Bouquet haben gezeigt, daß eine Differentialgleichung $z\frac{dw}{dz} = aw + bz + Q(z,w)$ - Q eine konvergente Potenzreihe, ord Q $\geq 2$ - ein eindeutig bestimmtes Integral $w = a_1z + a_2z^2 + \ldots$, also $w(0) = 0$, besitzt, das konvergiert, wenn $a \notin \mathbb{N}$. Es gilt der Satz also für "fast alle" Differentialgleichungen des Typus. Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es nun, mit modernen Methoden ähnliche Fragen zu behandeln für eine möglichst große Klasse analytischer Differentialgleichungen mit einer Singularität, d.h. holomorphe, an dieser Singularität mündende Integrale zu suchen, und als Hauptergebnis, eine "Häufigkeitsaussage" für die Differentialgleichungen des Typus mit solchen holomorphen Integralen zu gewinnen. Die Beweismethoden sind z.T. aus der lokalen Funktionentheorie mehrerer Variablen und der Eliminationstheorie.

H.-W.KNOBLOCH: Existenz periodischer Lösungen bei Systemen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

Gegeben eine Vektor-Differentialgleichung
(+) $x'' = f(t,x,x')$ , $x = (x^1,\dots,x^n)$ , $f = (f^1,\dots,f^n)$ ,
welche einer Nagumo-Bedingung genügt. Nach dem Muster entsprechender Untersuchungen für Randwertprobleme der Form $x(0) = a$ , $x(1) = b$ werden Kriterien dafür angegeben, daß eine Lösung $x(t)$ mit $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$ existiert. Zentrales Hilfsmittel ist ein Analogon zum Lemma von Scorza-Dragoni. Einfachste hinreichende Bedingung: Es ist $x\cdot f \geq 0$ auf der Menge $\{(t,x,x'): \|x\| = R , x\cdot x' = 0\}$. Verfeinerung der analytischen Technik führt zu einem für die Anwendungen flexibleren und geometrisch interpretierbaren Satz: $p_i(t,x)$ seien endlich viele in x lineare, in t periodische Funktionen mit (1) $E(t) = \{x: p_i(t,x) \leq 0, i = 1,\dots,N\}$ sei nicht-leer und kompakt; (2) $p_i''(t,x) \geq 0$, falls $p_i(t,x) = 0$ , $p_i{}' = 0$ und $x \in E(t)$. Dann existiert eine Lösung des oben angegebenen Randwertproblems mit $x(t) \in E(t)$ für alle t.

R.REISSIG: Periodische Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen

Bei der Vektordifferentialgleichung $x' = A(t)\, x + g(t,x)$, deren rechte Seite in t $\omega$-periodisch sei, kann man die Existenz $\omega$-periodischer Lösungen für eine recht allgemeine Klasse nichtlinearer Störglieder $g(t,x)$ durch einfache Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes nachweisen. Dazu eignet sich die Methode der Integralungleichungen, die von Vergleichssätzen her bekannt ist. Man bezeichnet die allgemeine Lösung mit $x(t,c)$, $x(0,c) = c$, und hat für sie die Darstellung

$$x(t,c) = Y(t)\, c + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, g(\tau,x(\tau,c))\, d\tau \;;$$

dabei ist $Y(t)\,[\,Y(0) = E\,]$ die Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems. In der Annahme, daß $Y(\omega) - E$ nichtsingulär sei, läßt sich die Randbedingung $x(\omega, c) = c$ als Fixpunktproblem $c = \Theta(c)$ im $R_n$ ($\Theta$ ein stetiger Operator) formulieren. Man setzt eine Abschätzung $|\,g(t,x) - g(t,0)\,| \leq p(t)q(|\,x\,|)$ voraus und entwickelt Bedingungen für die Funktion $q(r)$, unter denen für ein $\varrho_0 > 0$ die Beziehung $|\,\Theta(c)\,| \leq \varrho_0$ für $|\,c\,| \leq \varrho_0$ gilt.

J.MAWHIN: The use of integral equations and a priori bounds in the study of periodic and bounded solutions of nonlinear differential equations

This report is devoted to the use of Leray-Schauder's degree to prove the existence of periodic and bounded solutions in strongly nonlinear differential systems. The basis of the method is the reduction of this problem to the existence of fixed points for a completely continuous operator F in a suitable space of periodic functions. Such an approach has already been used by some authors but the method proposed here seems new in that the operator F does not depend upon the Green function of the periodic solutions problem for an "associated" non-critical linear system.
As applications of this approach we obtain in a very easy way generalizations or new proofs of results obtained by different authors.

I.BARBALAT: Anwendung von Frequenzkriterien zum Nachweis von Beschränktheit und Stabilität

Man befaßt sich mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Typ $x'' + 2p\,x' + \nu^2 x - \gamma(x) = e(t)$ bei beschränkter Erregerfunktion $e(t)$; als Beispiel erwähnt man den Fall $p = \nu = 1$, $\gamma(x) = x - \operatorname{Arc\,tg} x$. Die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen genau eine (für alle t) beschränkte Lösung auftritt sowie je zwei Lösungen zueinander exponentiell stabil sind, wird durch Anwendung des Frequenzkriteriums von Jakubovič angestrebt. Das vorgeschlagene Verfahren besteht darin, die künftig gleichmäßige Beschränktheit aller Lösungen auszunutzen und zum Studium der Stabilität die Nichtlinearität durch eine solche mit Begrenzung zu ersetzen. Jedoch würden die Lösungen der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung der Ersatzgleichung nicht in einem einheitlichen Zeitintervall $t \geq t_0$ gehorchen. Aus diesem Grunde scheint das Resultat eine Modifikation zu erfordern: Es wurde in den Satz abgeändert, daß bei periodischer Erregung unter den in der Arbeit genannten Bedingungen extreme Stabilität herrscht (d.i. die Existenz einer global asymptotisch stabilen erzwungenen Schwingung).

A.HUAUX: Über die Stabilität der Ruhelage für ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung

Man studiert die Stabilität der Ruhelage
1. für eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der Liénardschen Ebene,
2. für ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung in einem Liénardschen Raum, das heißt, in einem verallgemeinerten Phasenraum. Man erhält auf diese Weise hinreichende Bedingungen für asymptotische Stabilität oder Instabilität der Ruhelage.
In beiden Fällen wird die direkte Methode von Ljapunov benutzt, die sich nicht auf eine Linearisierung des Problems stützt.

C.CORDUNEANU: Stability of some non-linear feedback systems

Consider a non-linear feedback system described by the following system of differential equations:

$$(S) \quad \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,y(t), \quad \dot{y}(t) = c(t,x) + D(t)\,y(t).$$

We assume that x is an n-vector, y is an m-vector, $A(t)$, $B(t)$ and $D(t)$ are matrices and $c(t,x)$ is an m-vector. It turns out that $x(t)$ satisfies an integro-differential system of the form:

$$(S_1) \quad \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + \int_0^t E(t,u)\,c(u,x(u))\,du + f(t,y_0).$$

Under suitable conditions involving the data of the problem, several criteria of stability are found. Frequency techniques and methods of functional analysis are used in the investigation of stability properties of (S).

F.KAPPEL: Das Invarianzprinzip bei autonomen Funktional-Differentialgleichungen

Bekanntlich kann im Falle autonomer Differentialgleichungen bei Existenz einer positiv-definiten Ljapunov-Funktion v mit negativ semidefiniter Ableitung $\dot{v}$ auf asymptotische Stabilität der Ruhelage geschlossen werden, wenn die Ruhelage die einzige invariante Teilmenge der Punktmenge $\dot{v} = 0$ bildet. Diesem Satz liegt die Invarianz und Kompaktheit der Grenzmengen von Lösungen autonomer Differentialgleichungen zugrunde.

In diesem Vortrag wird gezeigt, wie dieses Invarianzprinzip auf autonome Funktional-Differentialgleichungen übertragen werden kann. Beispiele zeigen, daß es Fälle gibt, wo das verwendete Ljapunov-Funktional zwar längs der Lösungen stetig ist (als Funktion der Zeit) jedoch nicht im verwendeten Lösungsraum (im Sinne der eingeführten Metrik bzw. Norm). Diese Schwierigkeit kann behoben werden, wenn die zweite Ableitung des Ljapunov-Funktionals zur Verfügung steht. Die angegebenen Sätze werden an Hand eines Beispieles (kinetische Gleichungen eines Kernreaktors) illustriert.

FRÄULEIN I. TROCH: Über den Einfluß konstanter Parameter auf Übergangsvorgänge, Grenzzykel und Stabilitätsgrenzen

Es wird zunächst der Begriff der quasihomogenen Funktion eingeführt und anschließend gezeigt, daß für Differentialgleichungssysteme, die aus solchen Funktionen aufgebaut sind, die Untersuchung der Systeme mit Parametern auf die Untersuchung eines gewissen "Vergleichssystems" zurückgeführt werden kann. Diese Zurückführung geschieht mit Hilfe einer Maßstabtransformation, unter alleiniger Ausnützung der Quasihomogenitätseigenschaften und kann unabhängig davon durchgeführt werden, ob das betreffende System autonom, nichtautonom, von erster oder höherer Ordnung, explizit oder implizit gegeben ist, jedoch zeigen die Untersuchungen, daß sich in Abhängigkeit von der speziellen Bauart des Systems eine Beschränkung hinsichtlich Art und Zahl der auftretenden Parameter ergibt. Anhand von Beispielen wird die Reichweite der Methode illustriert.

E.BROMMUNDT: Näherungslösungen quasiperiodischer Differentialgleichungen

Ordnet man einer quasiperiodischen Differentialgleichung in geeigneter Weise eine periodische Gleichung zu, und besitzt die periodische Gleichung eine asymptotisch stabile periodische Lösung, $p(t)$ , so läßt sich mit Hilfe von $p(t)$ eine Näherungslösung der quasiperiodischen Differentialgleichung aufbauen und der Fehler abschätzen.

K.NIXDORFF: Die Leipholz'sche Erweiterung der harmonischen Balance

Das Verfahren der harmonischen Balance wurde von H. Leipholz dahingehend erweitert, daß eine Integralgleichung angegeben wird, die unter gewissen Bedingungen eine iterative Ermittelung periodischer Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen ermöglicht. Der Vortrag gibt die wesentlichen Teile der Leipholz'schen Arbeit an sowie Erweiterungen. Der Leipholz-sche Gedankengang wird auf die Bewegungsgleichung von Abraham-Lorentz angewendet, um für periodische Lösungen eine Formulierung dieser Gleichung als Integralgleichung zu erhalten, der die üblichen Nachteile dieser Bewegungsgleichung nicht anhaften.

G.SZEGÖ: An abstract formulation of Minimization Problems

The problem of the minimization of real-valued functions $\varphi(x), \varphi : R^n \to R$ is investigated by introducing the concept of discrete semidynamical systems without uniqueness. This concept allows to prove that convergence properties of various minimization algorithms are asymptotic stability properties of the rest point of the induced semidynamical system. The Liapunov function used in the analysis of the system is the real-valued function $\varphi(x)$ itself.

G.TRECCANI: A gradient type differential equation and the critical points of continuously differentiable real-valued functions

The argument of our report is the study of differential properties of real valued, continuously differentiable functions on $R^n$, by means of a gradient-type ordinary differential equation, whose solutions are not in general unique.
This gradient-type equation generates a semigroup of multivalued mappings, for which stability properties are investigated by means of Liapunov second method: these stability properties are closely related with differential properties of the real-valued function.

FRAU G.PLATE: Das Pontrjagin'sche Maximumprinzip im Falle eingeschränkter Zustandsvariablen

Es wird das Optimierungsproblem

$\dot{x} = f(x,u)$, $u \in U$, $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$ für ein $t_1 \geqq t_0$,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,u)\,dt \quad \text{minimal,}$$

unter Einschränkungen der Gestalt $G(x,u) \leqq 0$ und $g(x) \leqq 0$ betrachtet. Probleme dieser Art werden in vielen Veröffentlichungen behandelt, teils mit den Mitteln der Variationsrechnung, teils von der Theorie der Differentialgleichungen her. Hier wird der letztere Zugang gewählt und im wesentlichen über die Arbeiten von Anorov ("Maximum principle for processes with constraints of general form") und Ichikawa und Tamura ("Optimization problem with bounded state variable") berichtet und ihre Tragweite diskutiert.

J.ANDRÉ: Über Differentialspiele

Bericht über die "First International Conference on the Theory and Applications of Differential Games", die vom 29.9. bis 1.10.1969 von der University of Massachusetts veranstaltet wurde.

I.VRKOČ: Ito stochastic equations, stability and averaging method

In the lecture there will be delivered the definition and basic properties of Wiener integral. Ito equations will be introduced in the manner that they can describe not only the white noise perturbations but also discontinuous perturbations. In the general part following properties of solutions of Ito equations will be discussed: the dependence on a parameter and on initial conditions, the connection of Ito equations with partial equations of parabolic type, Ito formula, etc. The main part of the lecture will be devoted to the stability theory of Ito equations and to the extension of the averaging method to Ito equations.

R. Reißig, Saarbrücken