MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18 /1970

Anwendungen der Kohomologietheorie auf die Gruppentheorie

31.5. bis 6.6.1970

Die diesjährige Tagung über Gruppentheorie stand unter der Leitung von R. Baer, Zürich, W. Gaschütz, Kiel und K. Gruenberg, London. Dieses Mal wurde der Zusammenhang von Kohomologietheorie und Gruppentheorie eingehend untersucht. Das Zusammentreffen dieser beiden sich gegenseitig fruchtbar beeinflussenden Theorien fand seinen Ausdruck in zwanzig Referaten, die genügend Anlaß zu einer vertiefenden Diskussion unter den Tagungsteilnehmern boten.

Teilnehmer

Baer, R., Zürich
Bieri, R., Zürich
Blessenohl, D., Kiel
Cohen, D.E., London
End, W., Heidelberg
Evens, L., Evanston, Ill.
Gaschütz, W., Kiel
Green, J.A., Coventry
Griess, R., Cambridge, Ch.
Gross, F., Kiel
Gruenberg, K., London
Heineken, H., Erlangen
Hirsch, K.A., London
Huppert, B., Mainz
Hurley, T.C., London
Jacobinski, H., Floda
Johnsen, K., Kiel
Johnson, D.L., Nottingham
Johnson, R., London
Klaiber, B., Mainz
Leedham-Green, C.R., London
Leicht, Heidelberg
Levin, Colombus
Martens, G., Heidelberg
Mitchell, B., Dalhousie
Moore, J.C., Princeton
Neumann, B.H., Cambridge
Neumann, Hanna, Cambridge
Prezel, O., London
Ritter, J., Heidelberg
Roquette, P., Heidelberg
Sandling, R., St. Louis, Miss.
Schmidt, R., Kiel
Scimemi, Tübingen
Stammbach, U., Zürich
Ulmer, F., Zürich
Wielandt, H., Tübingen
Zassenhaus, H., Ohio State

Vortragsauszüge

Cohen, D.E., Ends and Cohomological Dimension of Groups

The number of ends of a finitely generated infinite group G is $\dim_{Z_2} H^o(G,\overline{Z_2G}/Z_2G)$ where $\overline{Z_2G} = \mathrm{Hom}_{Z_2}(Z_2G,Z_2)$. A subset E of G is almost invariant if $Eg \triangle E$ is finite for all g , $\triangle$ being symmetric difference.

G has one end iff any infinite almost invariant set has finite complement.

Th^m: G has 1, 2 or ∞ ends. G has 2 ends iff G has an infinite cyclic subgroup of finite index. If G has ∞ ends eiter $G = G_1 *_K G_2$ or $G = \langle G_1,x;\ k^x=k^\alpha$ for some monomorphism α of K ($\subset G_1$) to $G_1\rangle$, where K is finite. Any group of this kind has 2 or ∞ ends.

Prop.: If G has 1 end, $H^1(G,RG) = 0$ for any ring R.

Evens, L., The Schur Multipliers of certain p-groups

If G is a p-group of odd order and $G = K\cdot A$, semidirect product with A a normal abelian subgroup, then

$$H_2(G,\mathbb{Z}) \cong H_2(K,\mathbb{Z}) \oplus H_1(K,A) \oplus H_1(A,\mathbb{Z})_K .$$

This formula can be used to compute the Schur multipliers of the maximal unipotent subgroups of some of the classical linear groups over finite fields.

Gaschütz, W., Bemerkungen zur Kohomologie von $F_p(G)$-Moduln

Es wurde auf die Bedeutung des Einsblocks für die Kohomologie von $F_p(G)$-Moduln hingewiesen und eine Beschreibung von $H^1(G,A)$ für endliches und auflösbares G und irreduziblen $F_p(G)$-Modul A angegeben, die sich auf die Hauptreihenstruktur von G stützt.

Green, J.A., Axiomatic Representation Theory for Finite Groups

This theory studies, for a given finite group G and commutative ring k (with 1), the G-functors over k. Such a G-functor is

composed of a family (A_H) of k-algebras, families of maps of three types, (1) $T_{H,K}: A_H \to A_K$, (2) $R_{K,H}: A_K \to A_H$, (3) $C_{H,g}$: $A_H \to A_H g$; here the indices H, K run over all subgroups of G, such that $H \leqslant K$; for the maps $C_{H,g}$, H is any subgroup of G and g any element of G. The maps $R_{K,H}$ and $C_{H,g}$ are k-algebra homomorphisms, $T_{H,K}$ is only a k-module homomorphism. These maps satisfy a certain collection of axioms, too long to give here.
Examples of G-functors come from (i) character theory ($A_H = X(H)$, the character ring of H) (ii) cohomology theory ($A_H = \hat{H}(H,k)$) (iii) Grothendieck rings (this generalizes (i)) (vi) G-algebra theory. From the last example come applications to modular representation theory:
Each G-functor has a defect base, a set $\underline{\underline{D}}$ of subgroups of G, closed by taking subgroups and conjugates in G, and minimal among such sets with respect to the property $\sum_{D \in \underline{\underline{D}}} A_D T_{D,G} = A_G$.

Special cases give defect groups of blocks in Brauer's sense, and also vertices of indecomposible kG-modules (k a field).
A transfer theorem gives connections between 'segments' of A_H, A_G where $H \leqslant G$, $N(D) \leqslant H$ and D a given subgroup of G. A special case provides a proof of Brauer's 'lst Main Theorem' on blocks.

Griess, R., Schur muliplicators of finite groups

The theorems of R. Steinberg on projective representations of Chevalley groups in characteristic p give a nearly complete description of their Schur multiplicators. These theorems leave open the complete description of the p-part ($p > 0$) of the Schur multiplicator, although they imply that only a finite number of Chevalley groups (all finite) have a nontrivial p-part in their Schur multiplicator. Most of these exeptions have been worked out by Steinberg and others, and the lecturer has completed the list.
In another paper, Steinberg proves similar theorems for the so-called twisted groups of Lie type. The lecturer has shown that there are

a finite number of Steinberg variations for which p divides the order of the Schur multiplicator, and has nearly determined this list of exeptions.

Gruenberg, K.W., Some uses and properties of R/R'.

Let $1 \to R \to F \to G \to 1$ be a free presentation of a group G. The aim of this survey talk was to show how the cohomology of G can be deduced from the abelianized form of this presentation. As an example, G has finite cohomological dimension if, and only if, , the cohomology class of $1 \to R/R' \to F/R' \to G \to 1$, is nilpotent. The structure of the abelianized presentation of a finte group G was discussed. (All the details will appear in a volume of the Springer Lecture Notes.)

Hurley, T.C., Schur Multipliers of some Infinite Groups

From $H_2(F/R,\mathbb{Z}) = R \wedge F'/[R,F] = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{f}/\mathfrak{f}\mathfrak{r} + \mathfrak{r}\mathfrak{f}$ we get

$H_2(F/F_n,\mathbb{Z}) = F_n/F_{n+1}$.

$F_n/F_{n+1} \cong \mathfrak{a}_n + \mathfrak{f}^{n+1}/\mathfrak{f}^{n+1}$, by Magnus' Theorem, (where $\leqslant \mathfrak{f}^n/\mathfrak{f}^{n+1}$ $\mathfrak{a}_n = \mathrm{Ker}\ \mathbb{Z}F \to Z(F/F_n)$),

and hence is free abelian,

$H_2(F/F'',\mathbb{Z}) = F''/[F'',F] = \mathfrak{a}^{(2)} + \mathfrak{f}\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}$, where

$\mathfrak{a}^{(2)} = \mathrm{Ker}\ \mathbb{Z}F - \mathbb{Z}(F/F'')$, and hence is free abelian.

$H_2(F/[F'',F],\mathbb{Z}) = [F'',F]/[F'',F,F] \cong \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}^2/\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}^2$

and hence is free abelian, where $\mathfrak{r}_0 = \mathrm{Ker}\ \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}(F/[F'',F])$.

Conjectures for Schur multipliers of free soluble groups are given and suggestions for other free groups in a 'reasonable' variety.

Johnson, D.L., Minimal relations for finite p-groups

Let G be a finite group having a presentation π with n generators and r relations; define

$$\mathrm{def}(G) = \max_{\pi}(n-r), \quad d(G) = \min_{\pi} n$$

Denoting by $\bar{G}$ the Schur multilicator of G, it is well-known that

$$\mathrm{def}(G) \leqslant - d(\bar{G}).$$

We are interested in those groups for which this bound is achieved (in particular at a presentation with d(G) generators - call the class of p-groups with this property $\mathcal{G}_p$). Then

1. It is unknown whether there are p-groups outside $\mathcal{G}_p$ -
   $\langle x,y,z \mid [x,y]=x^p \ , \ [y,z]=y^p \ , \ [z,x]=z^p \ , \ x^{p^2}y^{p^2}z^{p^2} = 1 \rangle$
is a likely one. Examples of p-groups in $\mathcal{G}_p$ given.
2. $\mathcal{G}_p$ is closed under direct products and under standard wreath
products when p is odd an the second factor has trivial multiplicator.

Leedham-Green, C., Homology in Varieties of groups

A brief account of the triple (co-)homology of groups in a variety was given. One has a universal coefficient theorem and integral duality. The bad behaviour of the theory is illustrated by examples due to K.W. Johnson.
There are two ways of constructing Tor and Ext to approximate to the triple (co-)homology. These theories were compared; a satisfactory way of doing this would be to construct a 3-dimensinal spectral sequence.
For a variety of exponent 0 one gets a good varietal version of Schur multipliers. These were used to prove that two covering groups of a fixed group generate the same variety if they are of the same exponent. This result can be generalized.

Levin, F., Some varieties of soluble groups

Let G be a group satisfying a left-normed commutator identity $[x_1,\ldots,x_n] = [x_{1\sigma},\ldots,x_{n\sigma}]$ for some non identity permutation σ of $\{1,\ldots,n\}$. The following is then true:

Theorem: (a) G is nilpotent-by-nilpotent. In particular, if $n\sigma \neq n$, then G is abelian-by-nilpotent.
(b) If $\{1,2\} \neq \{1\sigma,2\sigma\}$, then G is nilpotent of class $\leqslant n+1$.

This improves on a result of Kikodze (Moscow, 1966) that if G is finitely generated, then G is soluble and is nilpotent if $\{1,2\} \neq \{1\sigma,2\sigma\}$

The results of the theorem are still true if the identity is replaced by $[x_1,\ldots,x_n] = [x_{1\sigma},\ldots,x_{n\sigma}]^d$, $d \in \mathbb{Z}$, if $n > 2$ and $\sigma \neq (12)$.

Martens, G., Endliche Gruppen mit periodischer Kohomologie

$0 \neq q \in \mathbb{Z}$ heißt eine (kohomologische) Periode einer endlichen Gruppe G, wenn $H^q(G,\mathbb{Z})$ zyklisch ist von der Ordnung (G:1). Dies ist gleichbedeutend mit der Tatsache: $H^i(G,A) = H^{i+q}(G,A)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, G-Moduln A. Eine Periode q von G ist stets gerade, und es ist G genau dann zyklisch, wenn die kleinste positive Periode Per(G) von G gleich 2 ist. Die Sylowstruktur periodischer Gruppen (im obigen Sinne) ist bekannt; die Periode selbst kann mit einem Satz von Swan bestimmt werden. Beispiele periodischer Gruppen bilden die SL(2,p) (p Primzahl) und Frobeniuskomplemente; beiden Klassen gemeinsam sind lediglich SL(2,3) und SL(2,5). Zu vorgegebener gerader Zahl lassen sich unendliche viele periodische Frobeniusgruppen und unendlich viele Frobeniuskomplemente konstruieren mit eben dieser Zahl als Periode. Mittels zweier Theoreme von Zassenhaus bzw. Suzuki kann man leicht alle periodischen Gruppen mit 2-Potenzperiode klassifizieren; ebenso die periodischen Gruppen Gruppen mit Periode 2p (p Primzahl). Für alle nichtauflösbaren periodischen Gruppen lassen sich einfache Formeln für die Periode angeben.

Mitchell, B., Some Categories of Cohomological Dimension $\leq$ 2.

In this talk we indicated how certain problems connected with low dimensional groups can be considered in the more general context where groups are replaced by categories. Certain categories (described in terms of the existence of certain presentations) were shown to have cohomological dimension $\leqslant$ 2, and for one class of categories (containing locally finite partially ordered sets as a subclass) this characterization turns out to be necessary as well as sufficient for cohomological dimension $\leqslant$ 2. This suggests that dimension 2 for groups may also be characterized in this way.

Moore, J.C., Algebraic categories

A pointed category $\mathcal{A}$ is algebraic if it is finitely bicomplete, has the property that every morphism in $\mathcal{A}$ can be decomposed into a normal epimorphism followed by a monomorphism, and the following additional properties:

1) Cartesian squares reflect normal epimorphisms
2) the nine lemma is valid, and
3) $\mathcal{A}$ satisfies the commutator criterion for normal monomorphisms.

Examples of such categories are

1) groups,
2) compact topological groups,
3) supplemented algebras over a commutative ring R,
4) cocomplete cocommutative Hopf algebras over a field k,

ie. monoids in the category of cocomplete supplemented commutative coalgebras over k.

Passi, I.B.S., Induced Central Extesions

Let $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots$ denote the lower central series of a group G and A_g the augmentation ideal of $\mathbb{Z}G$. Then the dimension conjecture (DC) states $G \cap (1+A_G^{n+1}) = G_n$.

Let T be the additive rationals mod 1 as trivial G-module. Then $\xi \in H^2(G,T)$ has degree $\leqslant$ n if ξ has a representing cocycle $f\colon G \times G \to T$ so that, for every x in G, f_x vanishes on A_G^{n+1} (where $f_x(y) = f(x,y)$).

Let G be nilpotent of class n and suppose we have

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_n & \to & \pi & \to & G & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{=} & & \\ 0 & \to & T & \to & E & \to & G & \to & 1 \end{array} .$$

Then the lower extension is called an induced central extension.

Theorem: DC is equivalent to: every element of $H^2(G,T)$, G a finite p-group, which corresponds to an induced central extension is of degree $\leqslant$ class of G.

Some consequences and characterisations of induced central extensions are discussed. (This material will appear in the Journal of Algebra.)

Ritter, J., Charaktere und Kohomologie

Im Zusammenhang mit der Atiyah'sche Spektralfolge $H(G,\mathbb{Z}) \Rightarrow R(G)$ werden Idealfiltrierungen des Charakterrings R(G) untersucht, die multiplikativ, funktoriell und verträglich mit der Induzierung von

Darstellungen sind. Diese sind eindeutig bestimmt durch die Filtrierungen auf den $R(S)$, S die Sylowuntergruppen von G; und erzeugen alle die Augmentationsidealtopologie. Der mit einer solchen Filtrierung gebaute graduierte Ring zeigt einige Ähnlichkeiten zum geraden Kohomologiering (er entspricht dem E_∞-Term in obiger Spektralfolge); genauer: für die Gruppen mit abelschen Sylowuntergruppen gibt es eine Filtrierung, so daß der graduierte Ring homomorphes Bild eines Teilringes des geraden Kohomologieringes ist. Ein solcher Zusammenhang beider Ringe besteht immer dann für eine Gruppe G, wenn er für die jeweiligen Ringe der Sylowuntergruppen erfüllt ist. Die allgemeine Lösung für eine beliebige p-Gruppe ist allerdings noch nicht gefunden.

Sandling, R., Fixed-point-free actions upon finite p-groups

G. Higman has established the theorem that Frobenius actions of groups of prime order on p-groups bound the class. I will provide examples which show this theorem to be the best possible in the sense that any finite group, which is not an extension of a group of prime order by a p-group, acts without fixed points on p-groups of unbounded class.

Stammbach, Urs, Homologie und absteigende Zentralreihe

Es sei G eine Gruppe in der Varietät $\underline{V}$ und $F_{\underline{V}} \twoheadrightarrow G$ eine $\underline{V}$ - freie Präsentierung von G. Man definiere $SG = \operatorname{coker}(H_2F_{\underline{V}}) \to H_2(G))$.

Dann ist für einen surjektiven Homomorphismus $\varphi: G \twoheadrightarrow Q$ mit $\operatorname{Ker}\varphi = N$ die folgende Sequenz exakt:

$$SG \to SQ \to N/[G,N] \to G_{ab} \to Q_{ab} \to 0 .$$

Damit läßt sich das folgende Resultat beweisen:

Satz: Es sei $f: H \to G$ ein Homomorphismus in $\underline{V}$. Es sei $f_*: H_{ab} \cong G_{ab}$ und $f_*: SH \twoheadrightarrow SG$ epimorph. Dann induziert f Isomorphismen $f_*: H/H_n \cong G/G_n$, $n \geq 0$ und einen Monomorphismus $f_\omega : H/\bigcap H_i \to G/\bigcap G_i$.

H_n, G_n bezeichnen dabei die n-ten Glieder der absteigenden Zentralreihen. Dieses Resultat wird dann dazu benützt, um Sätze von Hall-Mostowski, Baumslag, P. Neumann über freie Untergruppen von $\underline{V}$ freien Gruppen, sowie einen Satz von P. Hall über 'splitting groups' zu beweisen. Schließlich lassen sich die Resultate auf den Begriff der Difizienz von Gruppen anwenden.

Zassenhaus, H. und Olga Taussky-Todd: Über die 1-Kohomologietheorie der adjungierten Darstellung der Chevalleygruppen.

Sei $G = SL(n,F)$ die spezielle lineare Gruppe vom Grade n über dem Körper F, die sich auf dem Modul $M = DLF^{n\times n}$ der Matrizen n-ten Grades über F von verschwindender Spur gemäß

(1) $\quad g(u) = g\, u\, g^{-1} \qquad (g \in G,\ u \in M)$

darstellt. Die 1-Kozyklen von G auf M sind als Abbildungen f von G in M durch die Funktionalgleichung

(2) $\quad f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1(f(g_2)) \qquad (g_1, g_2 \in G)$

gekennzeichnet und bilden einen F-linearen Raum $C^1(G,M)$. Er enthält den Teilraum $B^1(G,M) = \partial_G(M)$ der durch

(3) $\quad \partial_G : M \to C^1(G,M)\ ,\quad \partial_G\, u(g) = g(u) - u \quad (g \in G,\ u \in M)$

erklärten 1-Koränder von G auf M. Der Faktorraum $H^1(G,M) = C^1(G,M)/B^1(G,M)$ ist die zu bestimmende 1-Kohomologie.

Satz: $H^1(G,M) = \mathrm{Der}^* F \dotplus \mathrm{Log}^* G \dotplus \bar{\partial} F$,

wobei $\mathrm{Der}^* F$ als monomorphes Bild von

$$\iota^* : \mathrm{Der}\ F \to H^1(G,M)$$
$$d(g) = (d(g_{ik}))g^{-1} \qquad (g = (g_{ik}) \in G,\ d \in \mathrm{Der}\ F)$$
$$\iota^* d = \iota d \,/\, B^1(G,M)$$

der Derivationen von F in $H^1(G,M)$ bestimmt ist, ferner $\mathrm{Log}^* G$ als Lösungsraum der logarithmischen Funktionalgleichung

$$\log : G \to M \wedge FI_n$$
$$\log(g_1 g_2) = \log(g_1) + \log(g_2) \qquad (g_1, g_2 \in G)$$
$$\log^* = \log / B^1(G,M); \quad \text{und} \quad \bar{\partial} F = \partial_G F^{n\times n} / \partial_G M .$$

Hier stellt G sich gemäß (1) auf $F^{n\times n}$ dar.
Als Hilfsmittel werden eine konstruktive Fassung der Inflations-Restriktionssequenz sowie ein dem Satze über die Kohomologie von Komplexen analoger Satz der Gruppentheorie benutzt.

Bernd Klaiber (Mainz)