MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 19/1970

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

7.6. bis 13.6.1970

Das weitgespannte Thema der Tagung, die unter der Leitung von Prof.Dr.Dr.h.c. L.Collatz und Prof.Dr. W.Wetterling stand, zog einen großen Kreis aus- und inländischer Mathematiker an, insgesamt 58 Teilnehmer aus 12 Ländern. Das Programm umfaßte 23 Vorträge und eine Diskussion über offene Fragen und praktische Erfahrungen mit numerischen Methoden.

Da heute, nicht zuletzt bedingt und ermöglicht durch die rasche Entwicklung auf dem Gebiet der Rechenanlagen, immer umfangreichere und kompliziertere Probleme aus den Anwendungsgebieten insbesondere auch nichtlineare Aufgaben numerisch zu lösen sind, ist man darauf angewiesen, hierfür geeignete neue Methoden aufzustellen und bekannte Methoden weiterzuentwickeln, beispielsweise Fehlerabschätzungen zu finden oder zu verbessern.

In den Vorträgen wurden etwa in gleichem Maße gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen behandelt. Die besprochenen Methoden waren zu unterteilen in approximierende und diskretisierende Verfahren.

	Anzahl der Vorträge über	
	approximierende Verfahren	diskretisierende Verfahren
bei gewöhnlichen Differentialgleichungen	3	5
bei partiellen Differentialgleichungen	6	4

In drei Vorträgen wurden Eigenwertaufgaben behandelt, in weiteren drei Vorträgen, allgemeine, jedoch für die numerische Behandlung von Differentialgleichungen wichtige Themen, wie Newton-Iteration, einseitige Tschebyscheff-Approximation und Spline-Funktionen. Eine weitere Gruppe von Vorträgen hatte zum Inhalt die numerischen Fragen, die bei der Lösung konkreter Probleme auftreten (Flugzeugschwingungen, Flachwasserwellen, Schlingerfrequenzen, Neutronentransportprobleme, nichtlineare Schwingungen). Es kam deutlich zum Ausdruck, daß die Anwendbarkeit bei Problemen der Praxis mit der wichtigste Maßstab für die Brauchbarkeit einer numerischen Methode sein sollte.

Die Gelegenheit zum persönlichen Gedankenaustausch nahmen alle Teilnehmer wahr. Ein geselliger Abend und eine Wanderung ließen auch den nichtwissenschaftlichen Teil nicht zu kurz kommen.

Teilnehmer

H.Ade, Mainz
J.Albrecht, Hamburg
R.Ansorge, Hamburg
P.Arminjon, Hamburg
C.Bandle, Genf
F.P.H. van Beckum, Enschede
W.Börsch-Supan, Mainz
E.Bohl, Hamburg
J.H.Bramble, Ithaca
B.Braunleder, Bonn
E.Bredendiek, Hamburg
B.Brosowski, Göttingen
H.Brunner, Halifax
J.Châbek, Brünn
L.Collatz, Hamburg
G.Cross, Waterloo
I.Galligani, Ispra
C.Geiger, Hamburg
P.K.H.Gragert, Enschede
G.Hämmerlin, München
K.P.Hadeler, Hamburg
R.Hass, Hamburg
P.Henrici, Rüschlikon
R.P.Hettich, Enschede
R.Jeltsch, Zürich
P. de Klerk, Enschede
W.Kolar, Stetternich
W.Krabs, Hamburg
K.Kubik, Delft

I.Legras, Nancy
M. van Maarle, Enschede
A.R.Mitchell, Dundee
F.Natterer, Hamburg
R.Nicolovius, Hamburg
W.Niethammer, Bochum
J.Nitsche, Freiburg
A.Ostrowski, Montagnola
E.Popoviciu, Cluj
T.Popoviciu, Cluj
L.B.Rall, Innsbruck
R.Reißig, Saarbrücken
B.Rosenberger, Bonn
E.Schock, Bonn
L.L.Schumaker, Austin
H.R.Schwarz, Zürich
A.Talbot, Richmond
W.Törnig, Jülich
B.Umberto, Bari
M. van Veldhuizen, Utrecht
A.C.Vliegenthart, Schiedam
R.J. de Vogelaere, Amsterdam
R.W. de Vries, Losser
H.Weinitschke, Berlin
H.Werner, Münster
J.Werner, Hamburg
W.Wetterling, Enschede
H.Wittmeyer, Linköping
K.Zeller, Tübingen

Vortragsauszüge

J.H.BRAMBLE: Least squares methods for elliptic equations

The classical Rayleigh-Ritz method for the numerical solution of the Dirchlet Problem for Poissons equation possesses the inherent practical difficulty that approximating function satisfying boundary conditions must be constructed. The least squares method has the property that the approximating function need not satisfy boundary conditions.

Let R be a bounded domain in E_N with smooth boundary ∂R and let u be the solution of $\Delta u = f$ in R and $u \equiv g$ on ∂R. Here f and g are given functions. Denote by S any finite dimensional subspace of $W_2^2(R)$. The least square (finite dimensional) problem is as follows: Find $w \in S$ such that

$$\int_R (f-\Delta w)^2 dx + \psi \int_{\partial R} (g-w)^2 d\tau = \inf_{\chi \in S} \left(\int_R (f-\Delta\chi)^2 dx + \psi \int_{\partial R} (g-\chi)^2 d\tau \right).$$

where ψ is a constant which depends on the subspace S. In a recent paper (Comm. Pure and Appl. Math. to appear) A.H. Schatz and I studied the behavior of the error $u - w$ relative to the approximation theoretic properties of S. An example of the results obtained is as follows: For each $h > 0$ let S_h be the restriction to R of cubic splines on a uniform mesh of width h. Taking $\psi = h^{-3}$ we obtain the estimate

$$\left(\int_R (u-w)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\, h^4 \left(\sum_{|\alpha| \leq 4} \int_R |D^{\alpha}(u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

where c does not depend on h or u.

H.BRUNNER: Optimale Mehrschrittverfahren: Elimination von schwacher Stabilität im Falle eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen

Der Verfasser hat in seinen früheren Arbeiten modifizierte lineare k-Schrittverfahren hergeleitet, deren Koeffizienten von der Schrittweite h und einem Parameter L abhängen und die (asymptotisch) die maximale Ordnung $p = k + 2$ besitzen. Es ist bekannt, daß die klassischen optimalen Verfahren für gewisse Klassen von Differentialgleichungen schwach (conditionally, marginally) stabil sind. Es wird gezeigt werden, daß das Auftreten von schwacher Stabilität durch eine geeignete Wahl von L, die im wesentlichen von den Wachstumsparametern des (klassischen) k-Schrittverfahrens und von der sog. logarithmischen Norm der Fundamentalmatrix des Systems abhängt, vermieden werden kann. Einige numerische Beispiele werden als Illustration dienen.

J.CHABEK: Der Einfluß der Quadraturfehler auf die numerische Lösung der Poissonschen Differentialgleichung bei der Anwendung der Variationsmethode

Wenn man die Ritzsche Methode zur Lösung der Randwertaufgabe

$$-\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

anwendet, muß man die Integrale, die bei dieser Methode vorkommen, häufig angenähert berechnen. Die dadurch entstehenden Fehler werden in der gegebenen Norm abgeschätzt, indem man die Approximationslösung dieser Randwertaufgabe in speziellen endlich dimensionalen Unterräumen des Sobolewschen Raumes $W_2^1(\Omega)$ sucht. Weiter wird die Frage beantwortet, wann beim Ritzschen Verfahren die Verfahrensfehler und Quadraturfehler miteinander verträglich sind.

L.COLLATZ: Einseitige Tschebyscheff-Approximation bei Randwertaufgaben

Die Approximationstheorie besitzt in vielen Fällen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen eine bequeme Möglichkeit, für Näherungslösungen exakte Fehlerabschätzungen aufzustellen. Dabei führen Randmaximumsprinzipien gewöhnlich zur zweiseitigen Tschebyscheff-Approximation und Monotoniesätze zur einseitigen Tschebyscheff-Approximation (kurz E.T.A.). Der Vergleich dieser beiden Möglichkeiten fällt häufig zu Gunsten der E.T.A. aus. Bei nichtlinearen Aufgaben hat man oft nur die Möglichkeit der E.T.A. zur Aufstellung angebbarer Schranken, aber selbst bei linearen Aufgaben verdient die E.T.A. oft den Vorzug, weil das Verhalten der Lösung, z. B. das asymptotische Verhalten bei Zeitabläufen, bei der E.T.A. besser erfaßt werden kann. Es wird ein Beispiel einer dreidimensionalen Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit zweifach zusammenhängendem Bereich (elektrisch geladene Kugel im Felde eines Plattenkondensators) gegeben.

In knappen Formeln: Es liege z. B. eine Randwertaufgabe monotoner Art vor mit der Differentialgleichung $Mu = 0$ in B und der Randbedingung $Su = 0$ auf Γ (Bezeichnungen: u unbekannte Funktion; M, S gegebene Differentialoperatoren; Bereich B mit Rand Γ). Für die Zusammenfassung $Tu = (Mu, Su)$ gelte: Aus $Tv \leq T\hat{v}$ folge $v \leq \hat{v}$ in $B + \Gamma$. Für die einseitige Approximation w von oben und $\hat{w}$ von unten für die Funktion u hat man dann die Optimierungsaufgabe:
$0 \leq \hat{w} - w \leq \delta$, $\delta = \min$ mit den Nebenbedingungen $Tw \leq 0 \leq T\hat{w}$.
Für das Vorliegen einer besten Approximation bei der E.T.A. wird ein einfaches, häufig sehr leicht nachprüfbares hinreichendes Kriterium angegeben, welches die Nullstellen und Extrema der Fehlerfunktion $\varepsilon = w - u$ benutzt.

K.P.HADELER: <u>Abschätzung des ersten Eigenwertes</u>

Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\, , \,)$ und Norm $\| \; \|$. Sei A ein selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich D_A und Spektrum $\sigma(A)$. Sei $x_0 \in D_A$, $\|x_0\| = 1$. Es gebe $\gamma \in \mathbb{R}_+$, so daß

$2\,\mathrm{Re}(Ax_o,y) \leq \gamma((Ay,y)-A(x_o,x_o)) \quad \forall\, y \in D_A,\ (y,x_o) = 0,\ \|y\| = 1.$

Dann gilt: $\lambda_1 = \inf \sigma(A)$ existiert und ist Eigenwert. Falls $\lambda_1 < (Ax_o,x_o)$ ist, ist λ_1 einfach. Es gibt einen Eigenvektor x_1, $\|x_1\| = 1$, zu λ_1 mit

$$(x_1,x_o) \geq \tau > 0,\ \tau^2 = \frac{1}{2}\left(1+ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right).$$

Für den Eigenwert λ_1 selbst gilt

$$(Ax_o,x_o) \geq \lambda_1 \geq (Ax_o,x_o) - \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau} \sqrt{(Ax_o,Ax_o)-(Ax_o,x_o)^2}\,.$$

Es werden verschiedene Anwendungen betrachtet und Verbindungen zur Theorie halbgeordneter Vektorräume hergestellt.

P.HENRICI: <u>Schlingerfrequenzen für einen Halbraum mit kreis- oder streifenförmiger Öffnung</u>

Es werden die Schlingerbewegungen einer einen Halbraum mit kreis- oder streifenförmigen Öffnung ausfüllenden idealen Flüssigkeit untersucht. Das mathematische Modell ist ein Eigenwertproblem, bei dem der Eigenwert in den Randbedingungen auftritt. Zufolge der Gebietsmonotonie der Eigenwerte sind die Werte für den Halbraum obere Schranken für die entsprechenden Werte beliebiger Behälter mit gleichartigen Öffnungen. - Die Methode besteht in der Zurückführung des Problems auf die Eigenwertaufgabe für einen selbstadjungierten, kompakten Operator in einem Hilbertraum, wodurch die Anwendung klassischer numerischer Verfahren der Eigenwertbestimmung (Ritz, Krylow-Bogoljubow, Temple) ermöglicht wird. Es wird ein vollständiges System von Koordinatenfunktionen für das Ritzsche Verfahren angegeben, und die erforderlichen Skalarprodukte werden analytisch berechnet. Bei der algebraischen Aufgabe ist eine lineare Nebenbedingung zu berücksichtigen. Das Verfahren ist numerisch effizient: Bei einer kreisförmigen Öffnung vom Radius 1 liegt der fundamentale Eigenwert im Intervall [2,75471; 2,75476].

W.KOLAR: Monotone Differenzapproximationen bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen

Es wird ein Satz formuliert, der als diskretes Analogon zum Lemma von Naganno-Westphal bezeichnet werden kann.

Man geht dabei von einem nichtlinearen, parabolischen ersten Randwertproblem von monotoner Art aus. Ein zugeordnetes diskretes Problem erhält man, wenn die Differentialoperatoren durch allgemeine, auch mehrstufige Differenzenoperatoren ersetzt und geeignete diskrete Randbedingungen angegeben werden. Für das so erklärte Differenzenverfahren ist es im Hinblick auf Fehlerabschätzungen von Bedeutung, ob die Eigenschaft "von monotoner Art" auch im diskreten Fall erhalten bleibt.

In dem Monotonie-Satz werden Bedingungen angegeben, die Differenzenverfahren von monotoner Art vollständig charakterisieren. Diese Bedingungen sind für die Monotonieaussage sogar notwendig und vervollständigen daher auch die bisher bekannten Ergebnisse für spezielle implizite Differenzenverfahren.

J.LEGRAS: Mise en oeuvre numérique de la méthode du potentiel

Il s'agit de la mise en oeuvre numérique de la méthode du potentiel, d'abord à des fonctions harmoniques ou biharmoniques, puis à l'équation de la chaleur.

L'étude porte essentiellement sur les difficultés numérique rencontrées, sur les techniques numériques développées, à cette occasion et sur la qualité des résultats obtenus.

Un cas particulier de thermo-élasticité a été developpé, alliant méthode du potentiel et méthode de collocation.

A.R.MITCHELL: Variational principles and the finite element method

The role of basis functions in the finite element method is a central one. Accordingly, basis functions are obtained in closed form for several classes of problems including piecewise polynomial approximation of degree n over a general triangulation of the plane. Suitable basis functions are linked with variational principles to solve two point boundary value and elliptic problems.

Evolutionary problems involving parabolic and hyperbolic equations in any number of space dimensions are then formulated in such a way that finite element methods, using a local basis, can be used to find approximate solutions. Examples are given in both the parabolic and hyperbolic cases.

F.NATTERER: Schranken für die Norm Greenscher Funktionen

I. Es werde der Differentialoperator $Ly = y' + Qy$ zusammen mit den Randbedingungen $Ry = Ay(a) + By(b) = 0$ betrachtet. Gesucht wird die Zahl

(1) $\gamma = \inf \{ \|Ly\| : \|y\| = 1, Ay(a) + By(b) = 0 \}$.

Existiert L^{-1}, so ist $\|L^{-1}\| = \frac{1}{\gamma}$, andernfalls ist $\gamma = 0$. Eine positive untere Schranke für γ ergibt daher eine obere Schranke für die Norm der Greenschen Funktion zu L und R.

II. Es werde die Maximum-Norm zugrunde gelegt und das obige Problem (1) durch das diskrete Problem

(2) $\Gamma = \inf \{ \max_i \| \frac{1}{h}(Y_{i+1}-Y_i)+F_iY_{i+1}+G_iY_i\| : \max_i \|Y_i\| = 1, AY_o+BY_n=0 \}$

mit gewissen Matrizen F_i, G_i ersetzt.

III. Einsetzen der Minimallösung von (1) in (2) führt zu einer Abschätzung von Γ durch einen Ausdruck in γ. Auflösen nach γ ergibt

$$\gamma \geq \frac{r(1-\frac{h}{2}\|Q\|)-\frac{h^2}{12}\|Q^2-Q'\|\,\|Q\|}{1+\frac{h}{2}r+\frac{h}{3}\|Q\|+\frac{h^2}{12}\|Q\|^2} \quad \text{oder} \quad \gamma \geq \frac{2}{h}-\|Q\|.$$

Ist diese untere Schranke für γ positiv, so ist insbesondere die Existenz von $\|L^{-1}\|$ gesichert.

A.OSTROWSKI: Die Newtonsche Methode in Banachräumen

Wird für einen Operator f $(X \to Y)$ nach dem Ansatz

$$x_{n+1} = x_n - f'^{-1}(x_n)\, f(x_n)$$

die Folge x_n von einem x_o aus gebildet, so erhält man eine hinreichende Konvergenzbedingung, wenn man die Größen $\beta_o := \|f(x_o)\|$, $\gamma_o := \|f'^{-1}(x_o)\|$, ein willkürliches $\alpha_o := 1 + \operatorname{Cos} \varphi_o \geq 2$ und $\operatorname{Sup} \|f''(x)\| =: M$ einführt und $M\alpha_o\beta_o\gamma_o^2 \leq 1$ in $[x_o,x_1] \wedge (\|x-x_1\| \leq e^{-\varphi_o}\beta_o\gamma_o)$ verlangt. Dann gibt es in der Kugel $\|x-x_1\| \leq e^{-\varphi_o}\beta_o\gamma_o$ genau eine Lösung $\bar{x}$ von $f(x) = 0$ und es gilt die (neue) präzise Abschätzung

$$\|x-x_{n+1}\| \leq e^{-2\varphi_o} \sin \varphi_o \,/\, \sin 2^n\varphi_o .$$

Der Unitätssatz läßt sich verallgemeinern, indem man allgemeine "Sternmengen" S betrachtet, die aus beliebigen in x_o beginnenden Strecken von der Länge $\leq (1-e^{-\varphi_o})\beta_o\gamma_o$, darunter auf jeden Fall $[x_o,x_1]$ bestehen. Dann ist die Vereinigungsmenge von jedem S mit der Kugel $\|x-x_1\| \leq e^{-\varphi_o}\beta_o\gamma_o$ ein Unitätsbereich.

Bei der Bestimmung von M läßt sich der Bereich $[x_o,x_1] \cup \{\|x-x_1\| = e^{-\varphi_o}\beta_o\gamma_o\}$ verkleinern, wenn eine offene zusammenhängende und lokale konvexe Teilmenge B von X bekannt ist, für die $\underline{\lim}\, \|f(x)\| \geq \beta_o$ $(x \to \partial B,\ x \in B)$ gilt. Dann kann man von jedem Bereich alle Punkte von B weglassen.

T.POPOVICIU: Das Restglied in einigen Formeln der numerischen Integration der Differentialgleichungen

Das Restglied R[f] der Formeln der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ist meistens ein lineares Funktional, definiert auf einer Menge von stetigen Funktionen in einem Intervall. Es werden Formeln, deren Restglied R[f] von einfacher Form ist, untersucht und es werden Fälle gezeigt, bei denen dieses Restglied nicht einfacher Form ist. Es werden auch einige Beispiele angegeben.
Das Funktional R[f] ist von einfacher Form, wenn es eine ganze Zahl $n \geq -1$ gibt, so daß $R[x^{n+1}] \neq 0$ und

$$R[f] = R[x^{n+1}][\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f],$$

wobei in der dividierten Differenz des zweiten Gliedes ξ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n+2$) $n+2$ verschiedene Punkte sind, welche im allgemeinen von der Funktion f abhängen.

E.POPOVICIU: Anwendungen des Konvexitätsbegriffs auf die numerische Integration von Differentialgleichungen

Bei qualitativen und numerischen Untersuchungen von Differentialgleichungen begegnet man der Idee der Konvexität. Es sei

$$(1) \quad y^{(n)} - F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) = 0$$

eine Differentialgleichung vom Typ $I_n\{[a,b]\}$ und $\mathfrak{F}$ die Menge der auf [a,b] definierten Lösungen von (1). Wenn $g^{(n)}$ existiert, dann folgt aus der Ungleichung

$$(2) \quad g^{(n)}(x) - F(x,g(x),g'(x),\ldots,g^{(n-1)}(x)) > 0 \text{ für } x \in [a,b]$$

die $\mathfrak{F}$-Konvexität auf [a,b] und aus der Ungleichung

$$(3) \quad g^{(n)}(x) - F(x,g(x),g'(x),\ldots,g^{(n-1)}(x)) < 0 \text{ für } x \in [a,b]$$

die $\mathfrak{F}$-Konkavität auf [a,b] von g. Es sei $f \in \mathfrak{F}$ und

$f(x_i) = y_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$, wobei $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Um die Werte von f approximativ zu berechnen, betrachtet man die beiden Folgen von Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \left(y^{(n)} - G_l(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) = 0\right)_{l=1}^{\infty}$$

und

$$(5) \qquad \left(y^{(n)} - H_l(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) = 0\right)_{l=1}^{\infty},$$

wobei jede Differentialgleichung vom Typ $I_n\{[a,b]\}$ ist. Es sei $\mathcal{G}_l$ die Menge der Lösungen der Gleichung mit Index l aus (4) und $\mathcal{H}_l$ die Menge der Lösungen der Gleichung mit Index l aus (5). Wir setzen voraus, daß

$$\mathcal{F} < \mathcal{G}_l, \quad \mathcal{H}_l < \mathcal{F}, \text{ und } \mathcal{G}_{l+1} < \mathcal{G}_l, \quad \mathcal{H}_l < \mathcal{H}_{l+1}, \quad l = 1,2,\ldots .$$

Dann sind die Folgen

$$(g_l)_{l=1}^{\infty}, \quad g_l(x_i) = y_i \ (i=1,2,\ldots,n), \quad g_l \in \mathcal{G}_l$$

$$\text{und} \quad (h_l)_{l=1}^{\infty}, \quad h_l(x_i) = y_i \ (i=1,2,\ldots,n), \quad h_l \in \mathcal{H}_l$$

unter recht weiten Bedingungen gleichmäßig konvergent und besitzen als gemeinsamen Grenzwert die Funktion f. Beispiele und Abschätzungen werden gegeben.

L.B.RALL: Experience with Lie series

The application of the Lie series method to the numerical solution of the initial-value problem for a system of ordinary differential equations requires various differentiations and numerical integrations. A Fortran program has been prepared for the UNIVAC 1108 which automatically calculates the required derivatives analytically, produces a specificed number of the Taylor series solution as a first approximation, and then produces a finite number of terms of the Lie series solution using Gaussian integration as the final approximation, orbit calculations show that this method is competitive with Runge-Kutta-Fealberg with respect to accuracy.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R.REISSIG: Anwendung eines Verfahrens von Leipholz zur Approximation periodischer Lösungen

Zur Berechnung von Selbstschwingungen in gewissen nichtlinearen Systemen wurde von Leipholz ein der Projektions-Iteration ähnliches Verfahren vorgeschlagen, das auf der Anwendung des Kontraktionsprinzips beruht. Man kann jedoch zeigen, daß die an das nichtlineare Glied der Grundgleichung zu stellende Bedingung die Existenz einer Ruhelage zur Folge hat und (wegen der Eindeutigkeit) keine andere stationäre Lösung zuläßt. Daher eignet sich die Methode nur für nicht-autonome Systeme $x' = Ax + g(t,x)$ $(g(t+T,x) \equiv g(t,x))$, bei denen die Matrix A des linearen Systemteils nicht-kritisch bezüglich T ist. Für die T-periodischen Lösungen gilt eine Hammersteinsche Integralgleichung $x(t) = Ux(t) = \int_0^T G(t-s)g(s,x(s))ds$. Zur Greenschen Matrix G(u) bildet man die Matrix $G_k(u)$ aus den ersten k Harmonischen der Elemente von G. Dabei wird $\varrho^2 - \varrho_k{}^2 =$ $T \cdot \int_0^T |G(u)-G_k(u)|^2du = T \cdot \int_0^T |G(u)|^2du - T \cdot \int_0^T |G_k(u)|^2du \to 0 \quad (k \to \infty)$ Sodann konstruiert man die Näherungsfolge $x_k(t) = U_k x_{k-1}(t)$ (U_k entsteht aus U, wenn man G durch G_k ersetzt). Wenn $|g(t,x)| \leq g_o$, $|g(t,x')-g(t,x'')| \leq l \cdot |x'-x''|$ und l genügend klein, dann konvergiert das Verfahren ($x_k(t) \longrightarrow x^*(t) = Ux^*(t)$ gleichmäßig für $0 \leq t \leq T$). Von der Beschränktheitsbedingung kann man sich noch befreien. In gleicher Weise kann die Konvergenz der Projektions-Approximation, $x_k(t) = U_k x_k(t)$, gezeigt werden. Die Methode läßt sich z. B. auf die Duffingsche Gleichung anwenden.

L.L.SCHUMAKER: Local bases and computation of Lg-splines

Algorithms for computing natural interpolating polynomial spline functions generally lead to ill-conditioned systems of equations unless basis functions with rather small support are employed. There are numerous generalizations of splines, but to date little attention has been devoted to their computation. Jerome and Schumaker (J. Appx. Th. 2,29-49 (1969)) discussed the rather general Lg-splines, and developed a basis and a computational algorithm. The purpose of this note ist to derive local bases for Lg-splines and to discuss the resulting algorithms. Methods for computing trigonometric, exponential, and g-splines result.

W.TÖRNIG: Differenzapproximation gewisser nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

Die Diskretisierung nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme führt stets auf große nichtlineare algebraische Gleichungssysteme bestimmter Struktur, die man in der Regel nur iterativ lösen kann. Es eignen sich hierfür besonders nichtlineare Overrelaxations-Verfahren, deren Konvergenz von den Eigenschaften der Funktionalmatrix des Gleichungssystems und von der Wahl des Relaxationsfaktors ω abhängt. Ist insbesondere die Funktionalmatrix symmetrisch und positiv definit, so konvergiert das Verfahren für $0 < \omega < 2$ analog wie im linearen Fall. Es ist bisher kaum untersucht worden, wie man das Dirichletproblem allgemeiner nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen zu approximieren hat, damit das resultierende Gleichungssystem durch Overrelaxation lösbar ist. Es läßt sich nun zeigen, daß es für das Dirichletproblem von solchen elliptischen Differentialgleichungen, die sich als Eulersche Gleichungen eines Variationsproblems

$$I[u] = \int_G F(x,u,u_{x_i})dg = \text{Extr.}$$

darstellen lassen, unter gewissen Nebenbedingungen stets Approximationen mit symmetrischer und positiv definiter Funktionalmatrix gibt. Diese Bedingungen sichern für halblineare Gleichungen z. B. die Gültigkeit des Randmaximumsatzes.

A.C.VLIEGENTHART: A finite-difference approximation to the Korteweg - de Vries equation

In the well-known publication by Korteweg and de Vries (1895) on long waves in hydrodynamics, the so-called Korteweg - de Vries (KdV) equation was derived, which describes one-dimensional shallow-water waves with smally but finite amplitudes.

More recently, the KdV equation appeared to describe wave phenomena in plasma physics and anharmonic crystals. The KdV equation is also relevant to the descussion of the interaction of nonlinearity and dispersion, like the well-known Burgers equation shows the features of the interaction of nonlinearity and dissipation.

In this lecture we discuss an explicit finite-difference scheme for solving the initial-value problem for the KdV equation. This scheme ist correctly centered in both space and time and does not exhibit numerical damping.

It has some features similar to the well-known leap-frog method, which is frequently employed in meteorological calculations. The scheme is conditionally stable; dispersion at high wave numbers is a serious shortcoming which is, however, common to all difference approximations, as has become increasingly evident.

R.J.VOGELAERE: New Runge Kutta type methods

Using formula manipulation procedures, the nonlinear algebraic equations satisfied by Runge Kutta type methods are obtained automatically for ordinary differential equations of order n with perhaps lower order derivatives missing, and withont or with memory. New methods are obtained and studied for stability.

H.WEINITSCHKE: Zur Lösung verallgemeinerter biharmonischer Gleichungen

Es ist bekannt, daß man bei biharmonischen Randwertproblemen mit Relaxationsverfahren zur iterativen Lösung der Differenzengleichungen im allgemeinen keine gute Konvergenz erhält. Die Young'sche "property A" läßt sich bei der biharmonischen Gleichung nicht erfüllen. Für gewisse verallgemeinerte biharmonische Gleichungen, die sich für eine große Klasse von Problemen dünner elastischer Schalen ergeben, werden das Verfahren der alternierenden Richtungen formuliert und die sich bei der Optimierung der Iterationsparameter ergebenden Probleme diskutiert. Die Grundgleichungen werden dabei zu einer komplexen Gleichung zusammengefaßt und die Eigenschaften der sich bei der Diskretisierung ergebenden komplexen Matrizen diskutiert. Die Konvergenz des Verfahrens wird an verschiedenen numerischen Beispielen illustriert, wobei auch nichtlineare Gleichungen mit biharmonischem Hauptteil gelöst wurden.

W.WETTERLING: Zur numerischen Behandlung von nichtlinearen Randwertaufgaben monotoner Art

Für Randwertaufgaben mit elliptischer Differentialgleichung $Mu = 0$ (in einem Gebiet B) und Randbedingung $u = f$ (auf dem Rand von B) wird gezeigt, daß monotone Art auch dann vorliegt, wenn längs Hyperflächen in B die Normalableitungen unstetig sind, und zwar einer Springbedingung mit passendem Vorzeichen genügen. Diese Eigenschaft kann bei der numerischen Behandlung solcher Aufgaben mit Approximations- und Optimierungsmethoden ausgenutzt werden.
Beispiel: Ein Minimalflächenproblem.

H.WITTMEYER: Zur experimentellen Ermittlung der Koeffizienten eines Differentialgleichungssystems, das die dynamischen Eigenschaften eines elastischen Körpers beschreibt

Um die Reaktion eines elastischen Körpers auf zeitlich veränderliche Belastung berechnen zu können, benötigt man seine dynamische Gleichung, d. h. ein ihm zugeordnetes lineares Differentialgleichungssystem mit geeigneten generalisierten Koordinaten als Unbekannten, mit deren Hilfe die Bewegungen und Deformationen des Körpers beschrieben werden können. Die (konstanten) Koeffizienten dieses Systems können dadurch bestimmt werden, daß man den Körper "geeignet" periodisch erregt. Das Problem ist: Mit was für Kraftgruppen und bei welchen Frequenzen muß man den Körper erregen, damit man die benötigten Koeffizienten hinreichend genau aus den Versuchsergebnissen bestimmen kann? Zur Lösung dieser Aufgabe stellt der Verfasser ein neues, experimentell durchführbares Iterationsverfahren auf. Die dadurch erhaltenen komplexen Funktionen werden als Ansatzfunktionen für ein Galerkinsches Verfahren benutzt, durch das man die gesuchte dynamische Gleichung erhält. Fehleruntersuchungen und numerische Beispiele zeigen die Brauchbarkeit des Verfahrens.

Allgemeine Diskussion:

Es stand vor allem die von Prof. Ostrowski gestellte Frage nach der vergleichenden Bewertung numerischer Verfahren im Vordergrund. Es herrschte Einigkeit darüber, daß auf diesem Gebiet noch zu wenige Untersuchungen vorliegen, um sagen zu können, welches Verfahren in welchen Fällen optimal ist. Angesichts der Tatsache, daß der Numeriker in irgendeiner Form immer wieder vor dieser Frage steht, wären derartige Untersuchungen sehr begrüßenswert. Prof. Collatz wies nochmals auf die Bedeutung guter Methoden zur Fehlerabschätzung hin, insbesondere bei den viel verwendeten Differenzenverfahren. Bei der Frage nach der Brauchbarkeit der Intervall-Arithmetik stieß man wieder auf das Problem, daß auch hier umfassende Vergleiche mit anderen Methoden fehlen. Es wurde u. a. darauf hingewiesen, daß bei Rechnungen mit mehrfacher Genauigkeit der zusätzliche Rechenaufwand bei der Fehlerschranken-arithmetik verhältnismäßig gering bleibt.

R. Hass (Hamburg)

R.P. Hettich (Enschede)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft