MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 21/1970

# Ausgewählte Probleme der Variationsrechnung

21.6. - 26.6.1970

Die diesjährige Tagung über Variationsrechnung stand unter der Leitung von E.Heinz (Göttingen), S.Hildebrandt (Mainz) und W.Jäger (Göttingen). Sie knüpft an eine Tagung mit gleicher Thematik vom Sommer 1968 an, auf der vornehmlich über ältere Arbeiten, und über neue Ergebnisse, z.B. Regularität am Rande, referiert wurde. Einige der damals noch offenen Probleme wurden inzwischen gelöst. Während der diesjährigen Tagung wurden folgende Themenkreise behandelt:

I Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen

II Flächen vorgegebener mittlerer Krümmung mit freien Rändern

III Existenz und Eindeutigkeit für das Plateausche Problem bei Flächen vorgegebener mittlerer Krümmung

IV Regularitätssätze

Die Vorträge wurden auf Vormittag und Abend beschränkt, um am Nachmittag Gelegenheit zur persönlichen Kontaktaufnahme zu geben.

Teilnehmer:

H.W.Alt, Göttingen
R.Böhme, Göttingen
H.F.Böttger, Mainz
R.Courant, New York
J.Frehse, Frankfurt
C.Gerhardt, Mainz
E.Giusti, Pisa
G.Goldhorn, Mainz
F.P.Harth, Mainz
Haverkamp, Münster
E.Heinz, Göttingen
S.Hildebrandt, Mainz
E.Hölder, Mainz
W.Jäger, Göttingen
H.Kaul, Mainz
M.Miranda, Ferrara
J.C.C.Nitsche, Minneapolis
C.Schäfer, Mainz
B.Schmidt, Mainz
R.Schneider, Frankfurt
U.Staude, Mainz
K.Steffen, Mainz
F.Tomi, Göttingen
W. von Wahl, Göttingen
H.Werner, Münster
K.O.Widman, Uppsala

Vortragsauszüge:

MARIO MIRANDA : Minimal surfaces with obstacles

The following Theorem has been illustrated:

"For $\Omega \subset R^n$ open, $L \subset R^n$ with $\partial L \cap \Omega \in C^1$, $E \subset R^n$ measurable and $E$, $L \cap \Omega$ and $\partial E \cap \Omega$ minimal with respect to the condition $E \supset L \cap \Omega$ ; Then there exists an open set $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 \supset \partial L \cap \Omega$ such that $\partial E \cap \Omega_0 \in C^1$."

ENRICO GIUSTI : Minimal surfaces with thin obstructions

Let $\Omega$ be a uniformly convex set in $\mathbb{R}^n$ and let $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ and $\psi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ be two upper semicontinuous (u.s.c.) functions such that $\psi(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

For u.s.c. functions $u(x)$ we define the "area"-functional

$$\mathcal{A}(u) = \inf \Big\{ \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \sqrt{1 + |Du_k|^2}\, dx ; \; u_k \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) , \; u_k \downarrow u \Big\}$$

($u_k \downarrow u$ means i) $u_k \geq u_{k+1}$ and ii) $u_k \longrightarrow u$ pointwise). Let $S = \{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} / u$ is u.s.c. ; $u = \varphi$ on $\partial\Omega$ ; $u \geq \psi$ . Then:

Theorem 1 : There exists $u \in S$ such that $\mathcal{A}(u) \leq \mathcal{A}(v)$ $\forall v \in S$. If $\varphi \in L_1(\partial\Omega)$, then $\mathcal{A}(u) < +\infty$ .

Suppose now, that $\Omega$ intersects the hyperplane $x_n = 0$, and let $f(\tilde{x}) = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ be a $C^2$-function such that $f(\tilde{x}) \leq 0$ if $(\tilde{x}, 0) \in \partial\Omega$ . The function

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(\tilde{x}) & \text{if } x_n = 0 \\ -\infty & \text{if } x_n \neq 0 \end{cases}$$

is u.s.c. in $\bar{\Omega}$ and $\hat{f}(x) \leq 0$ $\forall x \in \partial\Omega$ .

We have the following

Theorem 2 : Let $\varphi = 0$ and $\psi = \hat{f}$ . Then the minimum problem in $S$ has a Lipschitz-continuous solution in $\bar{\Omega}$ .

WOLF VON WAHL : Regularität der Lösung einer Variationsungleichung I

Es wurde der erste Teil einer Arbeit von H.Lewy und G.Stampacchia vorgetragen, in der folgendes Theorem bewiesen wird: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einem Rand von der Klasse $C^2$ . $a_{ij} = a_{ji}$ , $1 \leq i,j \leq n$ seien aus $C^1(\bar{\Omega})$ , der Operator $L = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$ sei gleichmäßig elliptisch. $\psi$ sei eine Funktion aus $C^1(\bar{\Omega})$, die auf $\partial\Omega$ negativ ist und für die $L\psi$ in $L^p(\Omega)$ , $p > n$, liegt. Dann existiert genau ein $u \in H^{2,p}(\Omega)$ , das den Ausdruck $\sum_{i,j} (a_{ij} v_{x_i}, v_{x_j})$ unter der Nebenbedingung $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ , $v \geq \psi$ , zum Minimum macht.

REINHOLD BÖHME : Regularität der Lösung einer Variationsungleichung II

Es wurde der zweite Teil der im vorigen Vortrag genannten Arbeit behandelt. Es sei $\Omega$ ein konvexes Gebiet mit glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ , es sei $-\psi$ strikt konvex und $C^2$ in $\bar{\Omega}$ ; für ein $x_0 \in \Omega$ sei $\psi(x_0) > 0$ , für alle $x \in \partial\Omega$ sei $\psi(x) < 0$ .
Es sei $u$ die Lösung des Variationsproblems

$$D[u] = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \min_{v \in V} D[v] ,$$

$V := \{ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) , v \geq \psi \}$ . Dann sind die Mengen $J := \{ x \in \Omega \,/\, u(x) = \psi(x) \}$ und $K := \{ x \in \Omega \,/\, u(x) > \psi(x) \}$ zusammenhängend. Ist $\psi$ analytisch in $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ , so ist $\partial J$ als analytische Kurve darstellbar.

F. TOMI : Zum Plateauschen Problem für Flächen, die über einem Hindernis liegen

Es sei $J \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Jordankurve endlicher Länge und $g$ eine reellwertige, auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion. Es wird dann das Problem betrachtet, unter allen Flächen $z : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ( $B$ = Einheitskreisscheibe des $\mathbb{R}^2$ ), welche $\partial B$ monoton auf $J$ abbilden und deren Koordinatenfunktionen $z^1, z^2, z^3$ die Ungleichung $z^3 \geq g(z^1, z^2)$ erfüllen, eine solche mit kleinstem Dirichletintegral zu bestimmen. Das folgende Resultat wird formuliert und sein Beweis angedeutet:

Falls $g \in C^1$ und $\sup |\nabla g| < \infty$ , so existieren Flächen $z_o \in C^o(\overline{B})$ mit minimalem Dirichletintegral. Falls $g \in C^3$ gilt, so hat man $z_o \in C^{1+\alpha}(B)$ .

Ein entsprechendes Problem für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung kann in analoger Weise behandelt werden.

E.HEINZ : Interior gradient estimates for surfaces of prescribed mean curvature

Let $H = H(z)$ $(z = x + iy)$ be a real valued function satisfying a Lipschitz-condition in the disk $|z-z_o| < R$, i.e.

$$|H(z') - H(z'')| \leq M\,|z' - z''| \,. \tag{1}$$

Consider the differential equation

$$L(f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 2\,H \tag{2}$$

Then we have the following

Theorem Let $f = f(x,y)$ be a solution of the equation (2) in the disk $|z-z_o| < R$ , where $H$ satisfies (1).

Furthermore let

$$\iint\limits_{|z-z_o|<R} \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy \leq A \,.$$

Then we have an estimate of the form

$$|\nabla f(x_o,y_o)| \leqslant \Theta(M,A,R) < +\infty \quad .$$

This theorem generalizes a result previously established by Serrin (Proc.London Math.Soc.) in the case $H$ = const. .

E.HEINZ : Unstable surfaces of constant mean curvature

Let $\Gamma$ be a closed rectificable Jordancurve and let $\mathfrak{Y}(\Gamma)$ denote the set of vector functions $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(w)$ ($w = u + iv$) of class $C^2(B) \cap C^o(\overline{B})$ $(B = \{|w| < 1\})$ having a finite Dirichlet integral and mapping $\partial B$ monotonically onto $\Gamma$, such that $|\mathfrak{x}(w)| \leqslant 1$ and $\mathfrak{x}(e^{\frac{2\pi i}{3}k}) = \mathfrak{y}_k$ $(k = 0,1,2)$. Let $H$ be a real parameter and consider the set $\mathfrak{Y}^*(\Gamma)$ of functions $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Y}(\Gamma)$, which satisfy the differential equation

$$\Delta\mathfrak{x} = 2H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \quad \text{and}$$

$$\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 , \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0 .$$

$\mathfrak{Y}^*(\Gamma)$ is the critical point set of the functional

$$E(\mathfrak{x}) = \iint_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 + \frac{4H}{3}(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_u,\mathfrak{x}_v))\,du\,dv .$$

Introduce the metric

$$|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| = \max_{\overline{B}} |\mathfrak{x}_1(w) - \mathfrak{x}_2(w)| \quad \text{on } \mathfrak{Y}(\Gamma).$$

Then we have the following

<u>Theorem</u> Suppose that $|H| < \frac{1}{2}$ and that $\Gamma$ satisfies a chord arc condition. Assume further that $\mathfrak{x}_1$ and $\mathfrak{x}_2$ are two surfaces in $\mathfrak{Y}^*(\Gamma)$ each furnishing a strict relative minimum for $E(\mathfrak{x})$ . Then $\Gamma$ also bounds an unstable surface $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{Y}^*(\Gamma)$ .

JOHANNES C.C. NITSCHE : Das Verhalten von Minimalflächen mit freien Rändern

Es sei eine Konfiguration vorgegeben, die aus einer Fläche $T$ und einem Jordanbogen , welcher mit $T$ nur seine Endpunkte gemeinsam hat, besteht. Der Vortrag beschäftigt sich mit dem Verhalten einer von dieser Konfiguration (oder Kette $\langle\Gamma,T\rangle$) berandeten Fläche $S$

kleinsten Inhaltes, insbes. mit der Eigenschaft ihres Ortsvektors $\mathfrak{x}(u,v)$ auf dem "freien Rand", mit dem $S$ auf der Berandungsfläche $T$ aufsitzt. Für Ebenen, analytische Mannigfaltigkeiten und "zulässige" Flächen der Klasse $C^m$, $m \geq 2$, lagen Resultate in der Literatur vor (Courant, Ritter, Lewy, Hildebrandt, Jäger, Nitsche). Nunmehr wird der Fall einer Berandungsfläche betrachtet, welche lediglich einer CA ( = chord arc)- Bedingung genügt. Schon dann ist der freie Rand eine Hölder-stetige Kurve. Im Falle einer Berandungsfläche der Klasse $C^1$ läßt sich jeder Hölder-Exponent $\beta < 1/2$ erreichen. Wenn sich $\Gamma$ in geeigneter Weise von $T$ abhebt, lassen sich entsprechend präzise Aussagen über das Verhalten von $S$ in der Nähe der Endpunkte von $\Gamma$ machen.

WILLI JÄGER : Über das Randverhalten von H-Flächen mit freien Rändern I

Sei $B$ ein Gebiet des zweidimensionalen, euklidischen Raumes $R^2$ und $H : R^3 \longrightarrow R^1$ eine $C^m$-Funktion $(m \geq 1)$. Es werden Abbildungen $x : B \longrightarrow R^3$ (H-Flächen) betrachtet, die dem System

$$\Delta x = 2H\, x_u \wedge x_v \ ,$$
$$x_u \cdot x_v = 0 \ , \ |x_u| = |x_v| \ .$$

in $B$ genügen, über einem Teil des Randes von $B$ frei in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $S \subset R^3$ sind und dem Funktional

$$E(x) = \int_B \left\{ |\nabla x|^2 + Q(x)\,(x_u \wedge x_v) \right\} du\, dv$$

mit $1/4 \operatorname{div} Q = H$ in einer Klasse von zulässigen Vergleichsfunktionen ein absolutes Minimum verleihen (E-Minimalität). Unter geeigneten Voraussetzungen an $Q$ und $S$ können dann Regularitätssätze gezeigt werden, welche die Regularität der E-minimalen H-Flächen bis zum freien Teil des Randes sichern.

S.HILDEBRANDT : Über das Randverhalten von H-Flächen mit freien Rändern II

Für die in Teil I dargestellten Regularitätssätze wurde eine Skizze des Beweises gegeben. Dieser besteht in folgendem: 1. Herleitung einer "Morreybedingung", d.h. einer Wachstumsbedingung für das Dirichletintegral am freien Rand. 2. Aufstellung von $L_2$-Schranken für die höheren Ableitungen mit Hilfe einer Differenzentechnik und gewissen Einbettungssätzen. 3. Angabe scharfer Regularitätssätze mittels der allgemeinen Regularitätssätze von Agmon-Douglas-Nirenberg und Morrey.

HELMUT KAUL : Eine isoperimetrische Ungleichung in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

$G$ 2-dim., kompakte, zushgde, orientierte Riemannsche $C^2$-Mannigfaltigkeit mit zushgdem Rand $\partial G \neq \emptyset$, $M$ vollständige Riemannsche $C^3$-Mannigfaltigkeit, dim $M \geq 3$, $f : G \longrightarrow M$ Isometrie. Für ein $p_o \in \partial G$ gelte

$f(G) \subset M - C(f(p_o))$ ( $C(q) \subset M$ der Schnittort von $q \in M$),

dann ist das Radialfeld $X : G \longrightarrow TM$ durch $X(p) := g_p(1)$ erklärt, $g_p : [0,1] \longrightarrow M$, das geodätische Segment von $f(p_o)$ nach $f(p)$. $A$ sei der Flächeninhalt von $G$, $L$ die Länge von $\partial G$,

$$B(p_o) := \int_G \langle X,H \rangle \, do ,$$

wobei $H$ der Krümmungsvektor von $f$. Dann gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\pi(A + B(p_o)) + P(p_o,G) + P(p_o,\partial G) \geq 0 ,$$

wobei die $P$-Glieder abgeschätzt werden können:
Für $p \in G$ sei $\ell(p)$ die Länge von $g_p$,

$$r_\pm(p) := \ell(p) \cdot \sqrt{\max_\sigma(0, \pm K_\sigma)}$$

(Schnittkrümmungen $K_\sigma$ von $M$ längs $g_p$ genommen),

$$k(p) := \frac{\sinh r_-(p)}{r_-(p)} \cdot \frac{r_+(p)}{\sin r_+(p)} \cdot \max( r_+(p)^2, r_-(p)^2 ) .$$

Gilt $r_+(p) < \pi$ für alle $p \in G$, so

$$|P(p_0, G)| \leq 4\pi \int_G k(p)\, do$$

$$|P(p_0, \partial G)| \leq L \int_{\partial G} k(p) \cdot (2 + \tfrac{2\pi}{L} \mathcal{C}(p) + k(p))\, ds$$

KLAUS STEFFEN : Ein Existenzsatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Es wird ein Satz von H.Wente (J.Math.Anal.Appl. 1969) verallgemeinert:
Sei $\Gamma$ eine rektifizierbare Jordankurve in $E^3$ und $h_\Gamma : \overline{B} — E^3$ eine von $\Gamma$ berandete Minimalfläche, $B$ := Einheitskreisscheibe im $E^2$. Sei $\varrho > 0$ und

$$1 < \alpha \leq \inf \left\{ \frac{D(h)}{D(h_\Gamma)} \;/\; h \in C^0(\overline{B}) \cap H_1(B) \text{ harmonisch, } h : \partial B \longrightarrow \Gamma \text{ monoton, } D(h - h_\Gamma) = \varrho^2 \right\}.$$

Ist $H$ eine reelle Zahl mit $|H|^2 \leq \dfrac{\pi}{\alpha D(h_\Gamma)}$ und

$$|H|^2 \leq \frac{18(\alpha - 1)^2}{(\alpha+1)^3 D(h_\Gamma)},$$

so existiert eine Fläche $x = h + \varphi : \overline{B} \longrightarrow E^3$ der Klasse $C^0(\overline{B}) \cap C^\omega(B)$ mit $\Delta x = 2H\, x_u \wedge x_v$, $x_u^2 = x_v^2$ und $x_u \cdot x_v = 0$ auf $B$, $x : \partial B \longrightarrow \Gamma$ monoton und $D(h - h_\Gamma) \leq \varrho^2$, $D(\varphi) \leq D(h) < \alpha D(h_\Gamma)$. Speziell existiert für hinreichend grosse $\varrho$ ein solches $x$, falls $|H|^2 < \dfrac{c_0^2 \pi}{D(h_\Gamma)}$, wobei $0{,}52 < c_0 < 0{,}53$.

JENS FREHSE : Zur Beschränktheit der Lösungen nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme höherer Ordnung

Betrachtet wird die allgemeine, nichtlineare partielle Differentialgleichung 2m -ter Ordnung in Divergenzform. Es wird angenommen, daß die üblichen Wachstums- und

Koerzivitätsbedingungen erfüllt sind, aus denen man geläufigerweise schließt, daß die Lösung $u$ im Sobolevschen Funktionenraum $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, liegt. Es folgt dann, daß die Lösung $u$ beschränkt ist, sofern $mp = n$ ist. Im Fall $mp < n$ ist das Resultat i.a. nicht richtig, wie eine Verallgemeinerung eines Gegenbeispiels von de Giorgi zeigt. Für den Beweis des genannten Resultats über die Beschränkheit wird eine Methode benutzt, die die aus der Theorie der Gleichungen zweiter Ordnung bekannte Abschneidetechnik vermeidet, welche bei Gleichungen höherer Ordnung nicht anwendbar ist.

Zum Schluß der Tagung wurden u.a. folgende Probleme vorgetragen:

1. Regularity of the touching set in higher dimensions
2. $\Omega$ open bounded, $\partial\Omega$ Lipschitz, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \ll f$ good, $\lambda > 0$,

   $$G := \left\{ g \,/\, g = f \text{ on } \mathbb{R}^n - \Omega \,,\ \int_\Omega g \, dx = \lambda \,,\ g \geq 0 \right\}.$$

   Then $\inf\limits_G \left\{ \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g|^2} + \int_{\partial\Omega} |g - f| \, dH_{n-1} \right\}$

   has a weak solution $g \in L^1(\Omega)$ with $\nabla g$ measurable. Regularity of $g$ on $\Omega$? $g = f$ on $\partial\Omega$?
3. Free boundary value problems with obstacles
4. Prove the Lewy-Stampacchia result for general boundary data.
5. Investigate the branch points of surfaces of constant (bounded) mean curvature near the trace.
6. Improve the regularity results to $C^{1+\alpha}$.
7. Estimate the length of the trace in terms of the data.
8. Systems of minimal surfaces

H.W.Alt (Göttingen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft