MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 23/1970

Arbeitstagung Professor Baer

5. 7. - 11. 7. 1970

Aus aller Welt kamen die Schüler von Reinhold Baer für eine Woche zur traditionellen Arbeitstagung zusammen. Als Gäste waren außerdem Hanna und B.H. Neumann aus Canberra (Australien) sowie Hans Schneider aus Madison (Wisconsin) anwesend. Die Vortragsthemen zeigen, welch weites Gebiet der Mathematik die Interessen der Baerschen Schüler (und deren Schüler) umspannen. Hauptsächlich wurden Ergebnisse und Fragen aus Gruppentheorie, Geometrie und Ringtheorie behandelt. Nach den Vorträgen fanden rege Diskussionen statt, die in einigen Fällen zu Verbesserungen der Resultate führten. Daneben gab die Tagung Gelegenheit zum Austausch der an den Universitäten verschiedener Länder gesammelten Erfahrungen.

Teilnehmer

Amberg, B. - Austin
Baer, R. - Zürich
Betten, Angelika - Tübingen
Betten, D. - Tübingen
Blasig, V. - Bielefeld
Dembowski, P. - Tübingen
Faltings, K. - Austin
Felgner, U. - Utrecht
Fleischer, K.-J. - Bielefeld
Groh, H. - Port Arthur
Hausen, Jutta - Houston
Held, D. - Mainz
Heineken, H. - Erlangen
Hering, Ch. - Chicago
Kappe, Luise-Charlotte - Binghamton

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Kappe, W. - Binghamton N.Y.
Kurzweil, H. - Tübingen
Lüneburg, H. - Mainz
Mäurer, H. - Darmstadt
Mehl, W. - Aachen
Michler, G. - Tübingen
Neumann, Hanna - Canberra/Austr.
Neumann, B.H. - Canberra/Austr.
Newell, M.L. - London
Plaumann, P. - Tübingen
Polley, C. - Tübingen
Prieß, S. - Tübingen
Ringel, C.M. - Tübingen
Salzmann, H. - Tübingen
Schleiermacher, A. - Tübingen
Schmidt, R. - Kiel
Schneider, H. - Madison/Wisconsin
Schoenwaelder, U. - St.Louis
Stellmacher, B. - Bielefeld
Strambach, K. - Tübingen
Tamaschke, O. - Tübingen
Timmesfeld, F.G. - Coventry
Wille, R. - Bonn

Vortragsauszüge

B. AMBERG, Gruppen, die sich als Produkt zweier abelscher Untergruppen darstellen lassen.

Der folgende Satz wurde bewiesen: Es sei P eine Primzahlmenge und G eine Gruppe mit G = AB für abelsche Untergruppen A und B. Ist A das direkte Produkt einer Torsions-P-minimax-gruppe und einer endlich erzeugbaren Gruppe und B eine Torsions-P-minimaxgruppe, so ist G = AB Erweiterung einer P-minimax-

-3-

gruppe durch eine P-minimaxgruppe.

K. FALTINGS, Semidualitäten primärer abelscher Gruppen.

Sei A eine abelsche, reduzierte, p-primäre Gruppe. Dann sind die folgenden Eigenschaften von A äquivalent: (1) A ist residuell endlich, torsion-vollständig und alle Ulm-Invarianten von A sind endlich. (2) A ist isomorph zur maximalen Torsionuntergruppe von $\mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty))$. (3) Der Verband aller endlichen oder coendlichen Untergruppen von A besitzt einen Verbands-Antiautomorphismus.

Ist weiter $p \neq 2,3$ und ist A entweder unbeschränkt oder besitzt A zwei unabhängige Elemente maximaler Ordnung, so ist auch die folgende Bedingung zu (1) - (3) äquivalent: (4) Ist Π die Automorphismengruppe von $\Gamma = \mathrm{Aut}\, A$, ist Λ die Gruppe aller inneren Automorphismen von Γ und ist Δ der Centralisator von $\Gamma/\mathfrak{z}\Gamma$ in Π, so ist $\Delta\Lambda \neq \Pi$.

U. FELGNER, Ein Unabhängigkeitsresultat in der axiomatischen Mengenlehre.

Betrachte die folgenden Aussagen:

(KA) Kurepa's Antiketten Prinzip: Jede teilgeordnete Menge enthält maximale Antiketten,

(LW) Jede linear geordnete Menge kann wohlgeordnet werden,

(PW) Potenzmengen wohlgeordneter Mengen können wohlgeordnet werden, und sei (AC) das übliche Auswahlaxiom. In der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ZF^0 (ohne Fundierungsaxiom) ist (AC) $\longrightarrow$ (KA) (Kurepa), (KA) $\longrightarrow$ (LW) (Felgner) und (LW) $\longrightarrow$ (PW) (offenbar) beweisbar. H.Rubin zeigte, daß in $ZF = ZF^0$ + Fundierungsaxiom

-4-

(PW) $\longrightarrow$ (AC) beweisbar ist. Es stellt sich das Problem, ob (PW) $\longrightarrow$ (LW), (LW) $\longrightarrow$ (KA) oder (KA) $\longrightarrow$ (AC) bereits in ZF^o beweisbar sind. J.D.Halpern zeigte 1962, daß (KA) $\longrightarrow$ (AC) nicht in ZF^o und Mostowski 1939, daß (PW) $\longrightarrow$ (LW) nicht in ZF^o beweisbar ist. Die verbleibende Frage haben wir wie folgt beantwortet:

Satz: (LW) $\longrightarrow$ (KA) ist nicht in ZF^o beweisbar.

Zum Beweis wurde ein Permutationsmodell konstruiert, das eine abzählbare Menge von Atomen $x = \{x\}$ enthält, so daß zwischen den Atomen eine homogene, $\aleph_0$-universelle Teilordnung erklärt ist. Die Existenz solcher Teilordnungen folgt aus einem Satz von B.Jónsson (Math. Scand. 8 (1960)).

J. HAUSEN, Automorphismen abelscher Torsionsgruppen.

Eine Gruppe heißt artinsch, wenn sie der Minimumbedingung für Untergruppen genügt.

Bewiesen wurde die folgende Charakterisierung abelscher Torsionsgruppen mit artinschen Primärkomponenten durch ihre Automorphismengruppe.

Satz: Genau dann sind alle Primärkomponenten der abelschen Torsionsgruppe T artinsch, wenn ihre Automorphismengruppe $A(T)$ residuell endlich ist und der Zentralisator eines jeden primären Normalteilers Γ von $A(T)$ endlichen Index in $A(T)$ hat.

H. HEINEKEN, Zwei Probleme über Gruppen mit Normalisatorbedingung.

Nach der Arbeit von Heineken und Mohamed gibt es für jede Primzahl p eine Gruppe mit Normalisatorbedingung und trivialem

Zentrum. Das Problem, ob dies vielleicht die einzige sei, führte zu folgendem Ergebnis: Zu jeder Primzahl p gibt es eine Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ von p-Gruppen, die metabelsch sind, triviales Zentrum besitzen und die Normalisatorbedingung erfüllen, so daß das direkte Produkt je zwei verschiedener Gruppen aus der Menge wieder die Normalisatorbedingung erfüllt. - Insbesondere besitzen je zwei Gruppen keine isomorphen nicht-abelschen epimorphen Bilder.

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und G/N' erfüllt die Normalisatorbedingung, so braucht G/N_3 die Normalisatorbedingung nicht zu erfüllen (es wird dazu ein Gegenbeispiel angegeben). Dies zeigt einmal mehr, wie anders sich Gruppen mit Normalisatorbedingung verhalten verglichen mit hyperzentralen und lokal nilpotenten Gruppen.

C. HERING, <u>Kollineationsgruppen von endlichen projektiven Ebenen, die von involutorischen Elationen erzeugt werden.</u>

Durch eine Verallgemeinerung einer Arbeit von Shult erhält man den folgenden Satz:

Sei G eine transitive Permutationsgruppe auf einer endlichen Menge Ω. Für jeden Punkt $\alpha \in \Omega$ enthalte G_α einen Normalteiler Q von gerader Ordnung, der auf $\Omega - \alpha$ halb-regulär operiert. Dann enthält G einen Normalteiler H, der eine der beiden folgenden Eigenschaften hat: (i) H hat einen Normalteiler ungerader Ordnung vom Index 2; (ii) $H \cong PSL(2,q)$, $Sz(q)$ oder $PSU(3,q)$ für eine geeignete Potenz q von 2.
Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Struktur der im Titel angegebenen Gruppen weitgehend bestimmen.

-6-

LUISE-CHARLOTTE KAPPE, Variationen über ein Thema von Szász.

Sei F eine Menge von Worten, G eine Gruppe und $V = \{f \in F \mid f(G) \subset G\}$. Die Gruppe G ist in $\mathfrak{R}_F$, falls $\bigcup_{f \in V} f(G) \subset G$ ist. Es wird bewiesen: Jede Gruppe G ist in $\mathfrak{R}_F$ für eine endliche Menge F, insbesondere sind endliche Gruppen in $\mathfrak{R}_F$. Im allgemeinen folgt aus $G/X \in \mathfrak{R}_F$ und $X \in \mathfrak{R}_F$ nicht $G \in \mathfrak{R}_F$. Unter Zusatzannahmen über die Struktur der Faktoren folgt jedoch $G \in \mathfrak{R}_F$. Im Falle einer Menge P von Potenzen ist dies besonders einfach zu formulieren: Hat G eine endliche Kette von Normalteilern mit Faktoren, die endlich erzeugt auflösbar sind oder der Minimalbedingung genügen, so ist G in $\mathfrak{R}_P$.

Die oben angeführten Ergebnisse lassen sich auf die folgende Frage anwenden, die für die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ = zyklisch zuerst von F.Szász beantwortet wurde. Gesucht werden Eigenschaften $\mathfrak{E}$ mit: Ist $G = \bigcup G^n$ und jedes G^n eine $\mathfrak{E}$-Gruppe, so ist auch G eine $\mathfrak{E}$-Gruppe.

WOLFGANG P. KAPPE, Einbettungsfragen bei Formationen.

Alle Eigenschaften sind untergruppenerbliche gesättigte Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, die $\mathfrak{N}$= Nilpotenz umfassen. Eine $\mathfrak{E}$-Überdeckung ist eine normale Menge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{E}$-Untergruppen, deren mengentheoretische Vereinigung die Sylowgruppen von G enthält. Sei $\mathfrak{F}_{\mathfrak{E}}$ die Menge der $\mathfrak{E}$-maximalen Untergruppen von G und $N_G(\mathfrak{F}) = \{y \in G \mid H^y = H \text{ für } H \in \mathfrak{F}\}$. Die Gültigkeit der Aussagen (I) Für jede Gruppe G und jede $\mathfrak{E}$-Überdeckung $\mathfrak{F}$: $N_G(\mathfrak{F}) \subseteq N_G(\mathfrak{F}_{\mathfrak{E}})$ (II) Für jede Untereigenschaft

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$: $N_G(\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}) \subseteq N_G(\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}})$ (III) Für jede $\mathfrak{F}$-Überdeckung $\mathfrak{T}$ ist $N_G(\mathfrak{T})$ ein $\mathfrak{F}$-Normalteiler läßt sich auf minimale nicht-$\mathfrak{F}$-Gruppen zurückspielen. So ist gleichwertig (I) mit $L/F(L)$ primär zyklisch, (II) mit $L/F(L)$ primär, (III) mit L/L' zyklisch, jeweils für alle minimalen nicht-$\mathfrak{F}$-Gruppen L. Für $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ im allgemeinen und $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ im Falle (I) lassen sich diese Bedingungen in explizite Forderungen an eine lokale Erklärung $\{f(p)\}$ für $\mathfrak{F}$ umformen.

H. MÄURER, Inversionen in der Möbius-Geometrie.

Sei $\mathfrak{P}$ ein Ovoid in einem mindestens 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$ der Charakteristik $\neq 2$ und $\mathfrak{K} := \{\mathfrak{P} \cap h \mid h$ Hyperebene von $\mathfrak{R}, |\mathfrak{P} \cap h| \geq 2\}$. Ein Automorphismus $\tau \neq 1$ der "Möbius-Geometrie" $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}, \in)$ heißt eine "Inversion" an $k \in \mathfrak{K}$, falls $\tau|_k = 1$ ist.

Satz: Existiert an jedem $k \in \mathfrak{K}$ eine Inversion, so ist $\mathfrak{R}$ endlich-dimensional und $\mathfrak{P}$ das Nullstellengebilde einer quadratischen Form vom Index 1 .

G. MICHLER, Blöcke.

Der folgende Satz wurde von R.Brauer (Math.Zeitschrift 1956) für Zerfällungskörper bewiesen. Mittels der von A.Rosenberg (Math. Zeitschrift 1961) entwickelten Beweismethode und Ergebnissen aus der Theorie der lokalen kommutativen Ringe wird hier ein charakterfreier Beweis für alle Körper angegeben.

Satz: Sei G eine endliche Gruppe, deren Ordnung durch die Charakteristik $p > 0$ des Körpers F teilbar ist. Sei D eine Untergruppe von G mit Ordnung p^d und sei

$H = N_G(D)$, $K = DC_G(D)$, $\bar{H} = H/D$, $\bar{K} = K/D$.

Dann existiert eine bijektive Abbildung von der Menge aller Blöcke $B \longleftrightarrow e \longleftrightarrow \lambda$ von FG mit Defektgruppe $\delta(e) \underset{G}{=} D$ auf die Menge aller $\bar{H}$ - Konjugiertenklassen von Blöcken $\bar{b} \longleftrightarrow \bar{f} \longleftrightarrow \bar{\mu}$ von $F\bar{K}$ mit Defekt 0 derart, daß

$$p \nmid |T_{\bar{H}}(\bar{f}) : \bar{K}| .$$

Hierbei bezeichnet man mit $T_{\bar{H}}(\bar{f})$ die Trägheitsgruppe des Blockes $\bar{b} \longleftrightarrow \bar{g} \longleftrightarrow \bar{\mu}$ von $F\bar{K}$ unter $\bar{H}$.

B.H. NEUMANN, <u>Endliche Gruppen mit versteckten Primzahlen</u>.

Dies ist ein Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit L.G.Kovács und J. Neubüser, die von einer von M.B. Powell gestellten Frage ausgeht, nämlich ob es endliche Gruppen G gäbe, deren Ordnung durch eine Primzahl p teilbar sei, aber kein Element eines minimalen Erzeugendensystems von G habe durch p teilbare Ordnung. Wird "minimal" hier als unverkürzbar aufgefaßt, so ist die Antwort nach Gaschütz verneinend; faßt man "minimal" aber strenger als von kleinster Mächtigkeit auf, so gibt es Beispiele solcher Gruppen G , die eine Primzahl p "verstecken". Alle bisher bekannten Beispiele sind zerfallende Erweiterungen einer Gruppe A mit einer Gruppe B . Die dabei auftretenden Gruppen können nichtauflösbar oder aber auch nilpotent sein; und insbesondere gibt es Gruppen B , die von Primzahlpotenzordnung sind, und zwar zu jeder Primzahl unendlich viele. Anwendungen auf charakteristische Gruppen freier Gruppen kommen dabei auch heraus.

Hanna NEUMANN, <u>Produkte von Hopfgruppen</u>.

Eine Gruppe G wird Hopfgruppe genannt, wenn jeder Ependomorphismus $\Theta : G \longrightarrow G = G\Theta$ ein Automorphismus von G ist. Es gibt endlich erzeugte (e.e.) nicht-Hopfgruppen. Das führt zu der Frage: Ist eine Gruppe, die in bestimmter Weise von zwei e.e.Hopfgruppen konstruiert ist, wieder eine Hopfgruppe? Für das direkte Produkt ist dies ein ungelöstes Problem. Aber kürzlich haben I.M.S.Dey und die Vortragende für das freie Produkt bewiesen, daß die Antwort positiv ausfällt. Der Vortrag beschrieb die zum Beweis nötigen Hilfsmittel und gab eine Zusammenfassung des Beweises.

M.L. NEWELL, A group theoretic result for Lie algebras.

We gave an elementary proof of the following theorem:

Let L be a finite dimensional Lie algebra.

Suppose $A \trianglelefteq B \trianglelefteq\trianglelefteq L$, $A \subseteq \phi(L)$ and that B/A is nilpotent.

Then B is nilpotent.

In a similar manner we established the analogous result for the class of supersoluble Lie algebras.

Cl. POLLEY, Lokale Eigenschaften 2-dim. topologischer Geometrien.

Sei $\mathfrak{G} = (P, \mathcal{L})$ eine topologische Geometrie, deren Punktmenge P homöomorph ist zur Punktmenge

(a) der reellen projektiven Ebene oder

(b) der reellen affinen Ebene oder

(c) des Möbiusbandes.

Jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ sei zusammenhängend und lokal homöomorph zur reellen Zahlengeraden. Zu jedem Punkt $p \in P$ gebe es eine offene, bzgl. $\mathcal{L}$ konvexe Umgebung $U(p)$, in der die drei - in projektiven Ebenen miteinander äquivalenten - Formen der dreifachen Ausartung des desarguesschen Satzes gelten. Dann ist $\mathfrak{G}$ lokal desarguessch,

-10-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

d.h. zu jedem $p \in P$ gibt es eine offene, konvexe Umgebung $V(p)$, in der der volle desarguessche Satz gilt. Nach einem früher bewiesenen Satz folgt dann: $\mathfrak{G}$ ist global desarguessch.

Cl.M. RINGEL, Reflexive Unterkategorien von Modulkategorien.

$\underline{M}_R$ sei die Kategorie der Moduln über dem Ring R. Ist $\underline{Y}$ eine Objektklasse in $\underline{M}_R$, so sei $1\underline{Y} = [X \mid \mathrm{Hom}(X,Y)=0$ für alle $Y \in \underline{Y}]$ der Linksannullator von $\underline{Y}$.

Es gilt der folgende Satz: SATZ: Ist $1\underline{Y}$ subobjekt-abgeschlossen, so besitzt $\underline{Y}$ eine reflexive Hülle (also eine kleinste reflexive Unterkategorie, die $\underline{Y}$ enthält).

Wählt man insbesondere für $\underline{Y}$ eine Klasse injektiver Objekte, so erhält man auf diese Weise die Lokalisierungen im Sinne von Gabriel.

H. SALZMANN, 4-dimensionale Ebenen.

Eine zusammenhängende, 9-dimensionale Kollineationsgruppe Δ einer kompakten, 4-dimensionalen topologischen projektiven Ebene $(P, \mathfrak{L})$ läßt (bis auf Dualität) eine Gerade L fest. Operiert Δ transitiv auf L, so ist $(P, \mathfrak{L})$ desarguessch.

R. SCHMIDT, Charakterisierung der einfachen Gruppe der Ordnung 175560 durch ihren Zentralisatorverband.

Sei J die von Janko in Journal of Algebra $\underline{3}$ beschriebene einfache Gruppe der Ordnung 175560, und für jede Gruppe G sei $\mathcal{L}(G) = \{C_G(U) \mid U \leq G\}$ der Zentralisatorverband von G.

Es wurde der folgende Satz bewiesen:

Satz. Ist G eine endliche Gruppe mit $\mathcal{L}(G) \simeq \mathcal{L}(J)$, so ist $G = A \times G_1$ mit A abelsch und $J \simeq G_1$. Der Beweis benutzt die Jankosche Charakterisierung von J und frühere Ergebnisse des Vortragenden über Gruppen mit modularem Zentralisatorverband.

H. SCHNEIDER, Kegel, Flächen Perron - Frobenius.

Es sei V ein halbgeordneter Vektorraum über einem voll geordneten Körper R, mit Positivitätsbereich K. Sätze werden bewiesen für Kegel mit Maximum Bedingung für Flächen. Die Sätze werden dann angewendet, um eine andere algebraische Version des Satzes von Perron-Frobenius über positive Matrizen zu erhalten.

K. STRAMBACH, Rechtdistributive Quasigruppen auf Mannigfaltigkeiten.

Es wurden auf Mannigfaltigkeiten stetige Produkte „o" betrachtet, für die gilt:

1.) $(a \circ b) \circ c = (a \circ e) \circ (b \circ e)$

2.) Die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ ist für beliebige a und b eindeutig lösbar.

F.G. TIMMESFELD, $\{3,4\}$ - Transpositionen in endlichen Gruppen.

Es wurde über den Beweis des folgenden Satzes gesprochen. Sei G eine endliche Gruppe die von einer Konjugiertenklasse D von $\{3,4\}^+$-Transpositionen erzeugt wird.
Sei $O_2(G) = Z(G) = 1$. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen: $GL(n,2)$ $n \geq 3$; $Sp(2n,2)$ $n \geq 3$, $SO^{\pm}(2n,2)$ $n \geq 4$; $G_2(2)'$; $3D_4(2)$; falls nicht folgende Bedingungen erfüllt sind.

1.) $\langle \mathfrak{C}_D(d) \rangle$ ist D-maximal

2.) $\mathfrak{C}_D(d)\ \langle X_d\rangle / \langle X_d\rangle$ ist eine Konj.klasse von $\{3,4\}$ ± Trp. in $\langle \mathfrak{C}_D(d)\rangle / \langle X_d\rangle$; wobei $X_d = \{e \in D \mid ed \in D\}$ ist.

3.) Sei $A_d = \{e \in D \mid O(ed) = 3\}$. Dann ist $\langle X_d\rangle$ trans. und regulär auf A_d.

$F_4(2)$, $E_6(2)$, $E_7(2)$, $E_8(2)$ erfüllen 1.) - 3.)

R. WILLE, Versuch einer axiomatischen Musiktheorie.

Es wurde ein deduktiver Aufbau einer tonalen Musiktheorie gegeben; dabei wurden folgende Begriffe behandelt: Tonsystem, Ton, Tonhöhe, h-Klang, geordneter h-Klang, Größe eines geordneten 2-Klanges, tonales Tonsystem, Transposition, Spiegelung, Morphismus, Temperierung, Konsonanzgrad, vollständiges tonales Tonsystem, Klangform, Spiegelbild einer Klangform, Harmonie, Harmonieform, Spiegelbild einer Harmonieform, Klangschritt, Harmonieschritt, harmonische Distanz, harmonische Konsonanz, harmonische Funktion, Klangvertretung, Tonsprache, Klangsprache, Grammatik, Entscheidbarkeit.

P. PLAUMANN (TÜBINGEN)