MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 24/1970

Grundlagen der Geometrie
12.7. bis 18.7.1970

Unter der Leitung der Herren Professoren F.Bachmann (Kiel), A.Barlotti (Perugia), H.Freudenthal (Utrecht) und E.Sperner (Hamburg) fand die Tagung über "Grundlagen der Geometrie" in diesem Jahr vom 12. bis 18. Juli statt.

Mit 52 Teilnehmern war diese Tagung besonders stark besucht; man hatte Gelegenheit, 27 Vorträge zu hören und zu diskutieren. Trotz dieser beachtlichen Teilnehmerzahl ließ die Organisation durch das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach keine Wünsche offen.

Die Referate und Diskussionen erstreckten sich in diesem Jahr - neben zahlreichen Einzelergebnissen - besonders auf die Gebiete der Kreis- und Hjelmslev-Geometrien zum einen und der metrischen Geometrien zum anderen.

Teilnehmer

J.André, Saarbrücken
H.J.Arnold, Bochum
B.Artmann, Gießen
F.Bachmann, Kiel
A.Barlotti, Florenz
Heike von Benda, Kiel
L.Bröcker, Kiel
Y.Chen, Waterloo
K.J.Dienst, Darmstadt
J.Diller, München
G.Dühl, Hamburg
G.Ewald, Bochum
H.Freudenthal, Utrecht
C.Garner, Ottawa
M.Götzky, Kiel
W.Heise, Hannover
C.Hering, Schwalbach
K.Johannsen, Hamburg
J.Joussen, Hamburg
W.Junkers, Bonn
G.Kaerlein, Bochum
K.-R.Kannenberg, Bochum
Petja Katzarowa, Sofia
P.Klopsch, Kiel

H.J.Kroll, Horst
R.Lingenberg, Darmstadt
H.Mäurer, Darmstadt
K.Mathiak, Braunschweig
U.Melchior, Bochum
K.Meyer, München
J.Misfeld, Hannover
J.Nalbach, Saarbrücken
W.Nolte, Darmstadt
U.Ott, Arheilgen
Irene Pieper, Hamburg
A.Prestele, München
P.Prohaska, Tübingen
W.Röck, München
L.A.Rosati, Florenz
E.Salow, Kiel
P.Scherk, z.Zt.Freiburg
A.Schleiermacher, Tübingen
J.J.Seidel, Eindhoven
W.Seier, Hamburg
St.L.Snover, Eindhoven
K.Sörensen, Hamburg
E.Sperner, Hamburg
K.Strambach, Tübingen
G.Tallini, Rom
Maria Tallini-Scafati, Rom
J.Timm, Hamburg
R.Wille, Bonn

Vortragsauszüge

J.ANDRÉ: Über verallgemeinerte Inzidenzstrukturen

Eine verallgemeinerte Inzidenzstruktur $J=(X,Y,Z)$ ist gegeben durch drei nichtleere Mengen X,Y,Z und eine Abbildung $\circ: X\times Y \rightarrow Z$. Die Dembowskischen Inzidenzstrukturen ergeben sich durch die Spezialisierungen $X\cap Y = \emptyset$ und $|Z| = 2$. Beispiele verallgemeinerter Inzidenzstrukturen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik werden gebracht. Jedem $z\in Z$ wird (unter der unwesentlichen Spezialisierung $X\cap Y = \emptyset$) eine Dembowskische Inzidenzstruktur $J_z=(X,Y,I_z)$ vermöge $x\ I_z\ y \Leftrightarrow xy=z$ zugeordnet. Es gilt $I_z\cap I_{z'} = \emptyset$ für $z \neq z'$ und $\bigcup_{z\in Z} I_z = X\times Y$; umgekehrt kann man aus einer Menge von Inzidenzstrukturen J_z mit diesen Eigenschaften eine verallgemeinerte Inzidenzstruktur J bilden.

B.ARTMANN: <u>Hjelmslev-Ebenen in projektiven Räumen</u>

Es sei $D_n = K[x]/_{(x^n)}$ ein Restklassenring von Polynomen mit Koeffizienten aus einem (Schief-) Körper K. D_n ist ein Hjelmslevscher (Schief-) Ring im Sinne von Klingenberg. Dann gibt es eine Abbildung der Hjelmslev-Ebene $\mathcal{H}$ über D_n in den Verband der Unterräume $\mathcal{L}\,K^{3n}$ des 3n-dimensionalen Vektorraumes über K derart, daß die Punkte von $\mathcal{H}$ in n-dimensionale Unterräume, die Geraden von $\mathcal{H}$ in 2n-dimensionale Unterräume übergehen und die Inzidenz in $\mathcal{H}$ durch die Ordnung in $\mathcal{L}\,K^{3n}$ gegeben ist.

HEIKE VON BENDA: <u>Das Zentrum der geraden Bewegungsgruppe in Hjelmslev-Ebenen</u>

Anstelle der Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden, die in den bekannten Ebenen der absoluten Geometrie verlangt werden, werden für Hjelmslev-Ebenen Existenz und Eindeutigkeit des gefällten Lotes gefordert. Dann kann das Zentrum der geraden Bewegungsgruppe, $Z(H_{ger})$, von der Identität verschieden sein. Ist $ab \in Z(H_{ger})$, so sind die Geraden a,b punktgleich.

Es wurden nun nichtelliptische Hjelmslev-Ebenen mit echtem Zentrum der geraden Bewegungsgruppe konstruiert. Zunächst Überlagerungen:

Sei (H,S) eine nichtelliptische Hjelmslev-Gruppe, D eine beliebige abelsche Gruppe ohne involutorische Elemente. Durch φ mit $\delta^{\varphi(\alpha)} = \delta^{-1}$ für $\alpha \in H_{ung}$ und alle $\delta \in D$, und $\delta^{\varphi(\alpha)} = \delta$ für $\alpha \in H_{ger}$ und alle $\delta \in D$ wird ein Homomorphismus von H in die Automorphismengruppe von D definiert. $S^* = \{(s,\delta) : s \in S, \delta \in D\}$ erzeugt das halbdirekte Produkt $H^* = H \times_{\varphi} D$, und (H^*,S^*) ist eine Hjelmslev-Gruppe mit $D \subseteq Z(H_{ger})$.

Es sind jedoch nicht alle Hjelmslev-Gruppen (bzw. Hjelmslev-Ebenen) von diesem Typ. Als Gegenbeispiel wurde ein Modell mit 900 Elementen über einer euklidischen Ebene über dem Primkörper der Charakteristik 5 konstruiert.

- 4 -

Folgender Satz liefert allgemeine Bedingungen:
Sei (H,S) eine nichtelliptische Hjelmslev-Gruppe und D eine beliebige Gruppe. $H^* = \{(h,\delta): h \in H, \delta \in D\}$ sei Erweiterung von H mit D zu dem Faktorensystem f, und der Abbildung φ von H in die Automorphismengruppe von D. Es gibt genau dann ein Erzeugendensystem S^* von H^*, so daß (H^*,S^*) eine nichtelliptische Hjelmslev-Gruppe ist, wenn folgendes gilt:

(1) $\delta^{\varphi(s)} = \delta^{-1}$ für alle $s \in S$ und alle $\delta \in D$. Daraus folgt, daß D abelsch und φ ein Homomorphismus ist.

(2) D besitzt keine involutorischen Elemente.

(3) $f_{s,s} = 1$ für alle $s \in S$.

(4) Zu jedem $P \in \mathcal{P}$ (involutorischen Element von S^2) gibt es ein $a \in D$ mit $f_{P,P}^{-1} = a^2$.

Dann ist S^* eindeutig bestimmt: $S^* = \{(s,\delta): s \in S, \delta \in D\}$.

L.BRÖCKER: <u>Lokal-desarguessche Flächen</u>

Unter einer lokal-desarguesschen Fläche verstehen wir eine reelle 2-Mannigfaltigkeit F mit einem System S von 1-Untermannigfaltigkeiten (alle Mannigfaltigkeiten zusammenhängend), so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder Punkt besitzt eine Umgebung, in der je zwei Punkte eindeutig verbindbar sind und der Desargues gilt, wenn alle Schnittpunkte eigentlich sind (zulässige Umgebungen).

(2) Sind Punkte $A, \{B_\nu\}$ gegeben, $B_\nu \to B$ und sind $A \circ B_\nu$ Strecken, so daß $A \circ B_\nu$ und $A \circ B_{\nu+1}$ eine gemeinsame zulässige Streifenumgebung besitzen für alle ν, so besitzt die Streckenfolge $\{A \circ B_\nu\}$ eine konvergente Teilfolge.

Es wurde gezeigt:
Die sämtlichen Modelle sind

a) reelle sphärische Geometrie $\to$ projektive Geometrie

b) konvexe Teilmengen K der reellen affinen Ebene $\to \Gamma \backslash K$, $\Gamma \subset PGL_2(\mathbb{R})$ operiert diskret und fixpunktfrei auf K.

Y.CHEN: <u>Eindeutigkeit einiger Kettengeometrien</u>

Es gilt: Die Möbius-, Laguerre-Ebenen im engeren Sinne und die pseudo-euklididschen Ebenen der Ordnungen zwei bis fünf sind bis auf Isomorphie eindeutig, wobei die Ordnung k bedeutet, daß eine (damit auch jede) Kette der Ebene k+1 Punkte besitzt. Zum Beweis weisen wir die Eigenschaften nach, die zur Kennzeichnung der Ebenen $(\mathfrak{K},\mathfrak{L})$ mit $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=2$, $\mathbb{D}(\mathfrak{K})$ und $\mathbb{A}(\mathfrak{K})$ (wobei $\mathfrak{K}$ die Galoisfelder GF(q) mit q=2,3,4,5 bezeichnet) hinreichend sind, nämlich daß die Ketten Kegelschnitte mit gleichem Anfangsstück sind. Den Beweis für die Eindeutigkeit der Möbius-Ebene der Ordnung fünf kann man anwenden für die Eindeutigkeit der pseudo-euklidischen Ebene der Ordnung sieben. Es wird nebenbei ein Axiomensystem angegeben für die oben genannten Geometrien.

J.DILLER: <u>Metrische Hüllen metrischer Ebenen mit Drehpunkt</u>

Die metrischen Ebenen mit Drehpunkt sind darstellbar als die zugehörigen metrischen Teilebenen $\mathfrak{Y}$ von projektiv-metrischen Ebenen $\mathfrak{E}$ über einem pythagoreischen Körper K mit einer Punktform $\varphi(a,b) = ka_1b_1 + ka_2b_2 + a_3b_3$, die den Nullpunkt (0,0,1)K enthalten. Es wird gezeigt: Die Vereinigung $F(\mathfrak{Y})$ aller Formwerte F(A) mit $A \in \mathfrak{Y}$ ist ein Q-Bereich, so daß es zu $x \notin F(\mathfrak{Y})$ stets eine Anordnung ω von K gibt mit $x \leq 0$ und $F(\mathfrak{Y}) > 0$ bei ω. Hieraus folgt: Jede nichtelliptische Ebene $\mathfrak{Y}$ mit Drehpunkt besitzt eine metrische Hülle $\mathfrak{Y}_\omega$, die eine angeordnete metrische Ebene mit $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_\omega \subseteq \mathfrak{E}$ ist. Ist $\mathfrak{Y}$ invariant, so ist $\mathfrak{Y}$ Durchschnitt der $\mathfrak{Y}$ umfassenden halb-elliptischen bzw. hyperbolischen Ebenen.

M.GÖTZKY: Unitär-hyperbolische Geometrie

Die von den axialen Kollineationen Desarguesscher affiner Ebenen erzeugten Gruppen, die äquiaffinen Gruppen von Pappus-Ebenen, die Bewegungsgruppen von metrischen Ebenen und die (projektiv-) unitären Gruppen sind Beispiele von Gruppen, in denen der Satz von der dritten Quasispiegelung (kurz "QSp") gilt. Im Fall der ersten Klasse von Gruppen ist der QSp ein Äquivalent des Satzes von Desargues, im Fall der zweiten Klasse ein Äquivalent des Satzes von Pappus und im Fall der dritten Klasse erweist sich der QSp als Umformulierung des Satzes von den drei Spiegelungen, der bekanntlich zur abstrakten Kennzeichnung der Gruppen dieser Klasse herangezogen wird. Es wurde ein gruppentheoretisches Axiomensystem für die unitär-hyperbolische Geometrie angegeben, das unter anderen gewisse Transitivitätseigenschaften, eine den Lotensatz verallgemeinernde Aussage und den QSp enthält. Dieses Axiomensystem kennzeichnet die $PU_3(K,f)$ mit f hermitesch aber nicht bilinear, Rang f = 3 und Index f = 1, wobei K ein Schiefkörper von Charakteristik $\neq 2$ ist.

W.HEISE: Beispiele von Möbius-m-Strukturen

Ein Möbius-m-Raum $(P,\mathfrak{K})$ ist eine Inzidenzstruktur, in der durch m+2 verschiedene Punkte genau ein Kurve (Block) geht und in der jede Ebene eine Möbius-m-Struktur (im Sinne von R.Permutti) ist. In einer endlichen Möbius-m-Struktur der Ordnung n gilt

$$|\mathfrak{K}| = \prod_{i=1}^{m+2} \frac{n^2-2+i}{n-2+i}$$, d.h. es gibt für $m \geq 2$ und $n \geq 3$ nur wenige Möbius-m-Strukturen der Ordnung n. Die von Witt bestimmten zur Mathieuschen Gruppe M_{12} bzw. M_{11} gehörigen Inzidenzstrukturen sind Möbius-m-Strukturen. Durch transfinite Rekursion werden ovoidale Möbius-m-Räume von beliebiger transfiniter Kardinalität und beliebiger endlicher Dimension definiert. Insbesondere läßt sich die affine Ebene über

den komplexen Zahlen oder den Quaternionen durch einen Punkt zu einer ovoidalen Möbius-Ebene abschließen.

C.HERING: Die Nicht-Existenz von endlichen projektiven Ebenen vom Lenz-Typ III

Sei $\mathcal{P}$ eine endliche projektive Ebene und enthalte $\mathcal{P}$ eine Gerade r und einen Punkt $P \notin r$, so daß $\mathcal{P}$ (X,XR)-transitiv ist für alle $X \in r$. Dann ist $\mathcal{P}$ desarguessch. Offensichtlich folgt aus diesem Satz, daß keine endlichen projektiven Ebenen vom Lenz-Typ III existieren. Für Ebenen gerader Ordnung folgt der Beweis aus Sätzen von Lüneburg (MZ 85 (1964) 419-450) und Hering (MZ 105 (1968) 219-225), für Ebenen ungerader Ordnung aus der von Hering, Kantor und Seitz durchgeführten Klassifikation der endlichen Gruppen mit zerfallendem BN-Paar vom Rang 1.

J.JOUSSEN: Projektivitäten in endlichen Fastkörperebenen

Sei $F=F_{q,q^2}$ der zum Dicksonschen Zahlenpaar (q,2) gehörende endliche Dicksonsche Fastkörper (q eine Primzahlpotenz, q ungerade). Sei $\Pi=\Pi(F_{q,q^2})$ die projektive Ebene über F_{q,q^2}, und sei X eine Gerade von Π. Es bezeichne $\mathcal{P}_X$ die Gruppe aller Projektivitäten von X auf sich selbst.

Satz 1: $\mathcal{P}_X$ ist vierfach transitiv auf X.
Satz 2: $\mathcal{P}_X$ enthält ungerade Permutationen.
Satz 3: Ist q^2-2 eine Primzahl, so ist $\mathcal{P}_X = \mathcal{S}_X$
($\mathcal{S}_X$ die symmetrische Gruppe auf den Punkten von X).

W.JUNKERS: Eine Kennzeichnung der desarguesschen affinen Räume durch kennzeichnende Eigenschaften des affinen Teilverhältnisses

Das affine Teilverhältnis in einem desarguesschen affinen Raum einer Dimension ≥ 2 läßt sich auffassen als eine Abbildung τ

- 8 -

der Menge $\mathcal{T}$ aller geordneten Tripel kollinearer Punkte O,A,B von $\mathcal{R}$ mit $O \neq A,B$ in die (nicht notwendig kommutative) multiplikative Gruppe $\mathcal{K}^*$ eines Koordinatenkörpers $\mathcal{K}$ von $\mathcal{R}$. Diese Abbildung τ genügt drei einfachen Axiomen T1, T2, T3. Es wurde gezeigt: Ein affiner Raum $\mathcal{R}$ einer Dimension ≥ 2 ist genau dann desarguessch, wenn es eine Abbildung τ der (wie oben definierten) Menge $\mathcal{T}$ in eine Gruppe $\mathcal{G}$ so gibt, daß jene drei Axiome erfüllt sind; in diesem Falle ist jedes derartige τ sogar "äquivalent" zum affinen Teilverhältnis.

G.KAERLEIN: Der Satz von Miquel in pseudo-euklidischen und verwandten Geometrien

Für $\mathbb{K}=(\mathfrak{P},\Gamma,\in)$ mit $\mathfrak{P}=\{A,B,\ldots\}$, $\Gamma=\{a,b,\ldots\}$ und $\in\,\subset \mathfrak{P}\times\Gamma$ definieren wir:

$A \not\parallel B$ (A nicht parallel B): $\Longleftrightarrow$ $A \neq B$ und $A,B \in k$ für ein k.

$\mathbb{K}$ nennen wir eine pseudo-euklidische (Minkowskische) Geometrie, wenn gilt:

(I): Durch drei paarweise nicht parallele Punkte geht genau ein Kreis.

(II): $A\in k$, $B \notin k$, $A \not\parallel B$ $\Longrightarrow$ es gibt genau ein h mit $B \in h$ und $h \cap k = \{A\}$.

(III): a) Jeder Kreis enthält drei Punkt;

b) Es gibt A,k mit $A \notin k$.

(IV): a) Für $P \notin k$ gibt es genau zwei verschiedene Punkte $A,B \in k$ mit $P \parallel A,B$;

b) Aus $A,B \parallel C,D$ und $A \parallel B$, alle Punkte paarweise verschieden, folgt $C \parallel D$;

c) Für A,B,C paarweise verschieden und $A \parallel B$ existiert $D \parallel A,B,C$.

Modelle erhält man, wenn man die Geometrie der ebenen Schnitte eines einschaligen Hyperboloids (Tangentialebenen ausgenommen) über einem kommutativen Körper K betrachtet; eine hierzu isomorphe Geometrie nennen wir eine Minkowski-Geometrie über K.

Satz: Genau die Minkowski-Geometrien, in denen der Satz von Miquel gilt, sind Minkowski-Geometrien über einem kommutativen Körper.

$\mathbb{K}$ heißt eine ebene Kettengeometrie, wenn gilt: (I), (II) und

(III'): a) Jeder Kreis besitzt Punkte;

b) Für A,B gibt es endlich viele Punkte $C_1,\ldots,C_n$ mit $C_1=A$, $C_n=B$ und $C_i \nparallel C_{i-1}$ für $i=1,\ldots,n-1$.

Eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel von $\mathbb{K}$ [hierzu siehe Benz, JDMV, 63] heißt eine Winkelvergleichung (WV), wenn (1) bis (4) von [ ], S.25, erfüllt ist.

Satz: Gibt es in $\mathbb{K}$ eine Winkelvergleichung, so ist sie eindeutig bestimmt und $\mathbb{K}$ ist miquelsch. Ist $\mathbb{K}$ miquelsch und gilt (III')c), dann gibt es in $\mathbb{K}$ eine WV.

(III'): c) Für A,B,C,D gibt es ein E mit $E \nparallel A,B,C,D$.

P.KLOPSCH: Metrisch-euklidische Bewegungsgruppen

Jede nichtelliptische Bewegungsgruppe im Sinne des gruppentheoretischen Axiomensystems der n-dimensionalen absoluten Geometrie von Bachmann, Ahrens und Kinder läßt sich darstellen als eine von Symmetrien erzeugte Untergruppe einer orthogonalen Gruppe $O_n(K,f)$. Es wurde ein Durchschnittssatz bewiesen, welcher die metrisch-euklidischen Bewegungsgruppen mit Hilfe ihrer bewertungskonvexen Hüllen beschreibt, und eine vollständige Beschreibung aller metrisch-euklidischen Bewegungsgruppen angegeben.

H.-J.KROLL: Ordnungsfunktionen in ovoidalen Möbiusräumen

Der von Sperner eingeführte Begriff der Ordnungsfunktion wird auf ovoidale Möbiusräume angewendet. Ist der ovoidale Möbiusraum $\mathcal{M}$ in den projektiven Raum $\mathcal{P}$ eingebettet, so erhält man aus jeder Ordnungsfunktion von $\mathcal{P}$ durch einen Restriktionsprozeß eine Ordnungsfunktion von $\mathcal{M}$, und umgekehrt läßt sich jede Ordnungsfunktion von $\mathcal{M}$ durch eine Ordnungsfunktion von $\mathcal{P}$ induzieren. Eine Ordnungsfunktion von $\mathcal{P}$ induziert genau dann eine normale Ordnungsfunktion in $\mathcal{M}$, wenn das Ovoid bezüglich aller Tangentialhyperebenen h_W auf einer Seite von h_W liegt. Für jeden Punkt W des Möbiusraumes gilt: **Jede affine Ordnungsfunktion von $\mathfrak{M}(W)$ läßt sich zu einer** Ordnungsfunktion von $\mathfrak{M}$ fortsetzen.

K.MATHIAK: Homomorphismen projektiver Räume und Hjelmslevsche Geometrie

Es sei φ: $P \to P'$, $x \to \bar{x}$, ein Homomorphismus der projektiven desarguesschen Räume P und P'. h sei eine festgewählte Hyperebene in P. Es sei $H_0 = \{x \in P: \bar{x} \not\in \bar{h}\}$ und T_1 die Menge der Translationen mit h als Fixhyperebene, die H_0 invariant lassen. Die Menge $B = \{\alpha \in K: T_1 \alpha \subset T_1\}$ bildet, wie Klingenberg gezeigt hat, einen Stellenring des Koordinatenkörpers K. Es sei i ein Ideal von B und $T_i = T_1$ i. Die T_i bilden eine Filtration von T_1. Mit jedem T_i kann in H_0 eine Äquivalenzrelation definiert werden. Das System der Klassen H_i heißt die zu φ gehörige Hjelmslevsche Geometrie.
Die H_i erweisen sich als Halbordnungen mit Dimension. Es kann ein Verfahren angegeben werden, um explizit die Vereinigungsmenge bzw. Schnittmenge zweier Elemente zu ermitteln. Es ergibt sich hieraus ein Kriterium, wann zwei Elemente eine eindeutige Verbindung bzw. Schnitt besitzen.

H.MÄURER: Inversionen in der Möbius-Geometrie

Sei $\mathfrak{P}$ ein Ovoid in einem mindestens 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$ der Charakteristik $\neq$ 2 und $\mathfrak{K} := \{\mathfrak{P} \cap h$: h Hyperebene von $\mathfrak{R}$, $|\mathfrak{P} \cap h| \geq 2\}$.
Ein Automorphismus $\tau \neq 1$ der "Möbius-Geometrie" $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}, \in)$ heißt eine "Inversion" an $k \in \mathfrak{K}$, falls $\tau|_k = 1$ ist.
Satz: Existiert an jedem $k \in \mathfrak{K}$ eine Inversion, so ist $\mathfrak{R}$ endlichdimensional und $\mathfrak{P}$ das Nullstellengebilde einer quadratischen Form vom Index 1.

U.MELCHIOR: Lie-Geometrie und symplektische Geometrie

Gegeben sei eine symplektische Polarität σ in PG(3,K), char K $\neq$ 2. Die Geometrie der selbstpolaren Geraden ist dann ein Modell der ebenen Lie-Geometrie über K, wenn man das "Berühren" durch sich schneiden definiert.
Dieser Sachverhalt führt zu einer neuen Kennzeichnung dieser Lie-Geometrien und zum Beweis des Satzes, daß der Blockplan aus Punkten von PG(3,K) und der bezüglich σ selbstpolaren Geraden für char K $\neq$ 2 nicht selbstdual ist.

K.MEYER: Singuläre orthogonale Transformationen

V sei ein halbeinfacher n-dimensionaler Vektorraum über einem (kommutativen) Körper K beliebiger Charakteristik. Es gelte $q(\xi+\eta)=q(\xi)+q(\eta)+f_q(\xi,\eta)$ für alle $\xi,\eta\in V$.
$Q=\{\xi\in V:\ q(\xi)=0\}$ sei die Quadrik der singulären Vektoren.
$U_1\in O_n(K,q)$ heißt dann singuläre orthogonale Transformation, wenn gilt: $B(U_1)=(U_1-1)V\subset Q$.

$S_\alpha\xi=\xi-\alpha\dfrac{f_q(\alpha,\xi)}{q(\alpha)}$ für alle $\xi\in V$ sei die Spiegelung längs $\alpha\notin Q$.

Es gilt: $B(S_\alpha U)$ ist dann und nur dann singulär, wenn $\alpha\in B(U)$ nichtsingulär ist und die Gleichung $f_q(U\bar{\xi},\alpha)f(\bar{\xi},\alpha)=0$ für alle $\bar{\xi}\in\bar{H}_1\cup\bar{H}_2$ erfüllt, wobei $(U-1)\bar{H}_1\cup(U-1)\bar{H}_2=B(U)\cap Q$.

J.NALBACH: Über Verbände linearer Unterräume in Pickertschen Inzidenzstrukturen

Ein Verband L ist genau dann isomorph zum Unterraumverband einer regulären Pickertschen Inzidenzstruktur, wenn L vollständig, relativ-atomar, M-stetig und verbindlich ist. Dabei heißt ein Verband L mit n und $P_L\neq\emptyset$ verbindlich, wenn für die "Verbindungshülle" $\bar{Q}$ jeder Punktmenge Q (definiert durch

$$\bar{Q}:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \text{ mit } N_1:=Q,\ N_i:=\bigcup_{\substack{p_1,p_2\in N_{i-1}\\ p_1\neq p_2}} R(p_1\cup p_2)\ )$$

gilt: $R(\cup Q)=\bar{Q}$, $(R(a)=\{\text{Atom}\leq a\}$ für $a\in L)$.

- 12 -

Die Kategorie aller vollständigen, relativ-atomaren, M-stetigen und verbindlichen Verbände mit $h(p_1 \cup p_2)=2$ für verschiedene Atome p_1, p_2 ist isomorph zur Kategorie aller echtregulären Pickertschen Inzidenzstrukturen (echtregulär: jede Gerade inzidiert mit mindestens 2 Punkten und jeder Punkt inzidiert mit mindestens 2 Geraden).

IRENE PIEPER: Über die endlichen zweiseitigen geschlitzten Inzidenzgruppen

Alle endlichen zweiseitigen desarguesschen geschlitzten Inzidenzgruppen (für die Definition vergleiche H.Karzel und I.Pieper, Bericht über geschlitzte Inzidenzgruppen, Jahresbericht des DMV, erscheint demnächst) mit kommutativem affinen Kern wurden explizit angegeben.

J.J.SEIDEL: Line geometry in PG(3,2)

Projective geometry PG(3,2) of dimension 3 over GF(2) is presented in terms of the Steiner System (24,8,5). This facilitates the investigation of certain systems of lines, such as Kirkman systems, and comlexes (systems of 15 lines with 3 lines on each point). There is an analogous relation between the 4-cube and the Golay code.

W.SEIER: Gleichmächtigkeit der Basen von Quasimoduln über $\mathcal{F}$-Systemen

Sei $VS = \{a\alpha, b\beta, \dots\}$ ein Quasimodul, $V=\{a,b,\dots\}$, $S=\{\alpha,\beta,\dots\}$. Wir definieren $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ rekursiv durch $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = (\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha_i) + a_n \alpha_n$. Ist J eine geordnete Indexmenge, so heißt eine Familie $\{a_i\}_{i\in J}$ Basis von VS, wenn es zu jedem $b\beta \in VS$ eindeutig bestimmte $\alpha_i \in S$ gibt, fast alle $\alpha_i = 0$ und $b\beta = \sum_{i\in J} a_i \alpha_i$.

Mit Familien von $\mathscr{V}$-Systemen (das sind spezielle Fastringe) wurde eine Klasse von Quasimoduln konstruiert, in denen eine Basis existiert und je zwei Basen gleichmächtig sind.

K.SÖRENSEN: Projektive Ebenen mit einem pascalschen Oval

Für den Satz von Buekenhout "Eine projektive Ebene mit einem pascalschen Oval ist pappussch" wird ein neuer Beweis angegeben: Auf dem Oval wird, wie in der Endenrechnung, der Körper K konstruiert. Jedem Punkt der Ebene ordnet man die Klasse von gebrochen linearen Transformationen zu, die dieselbe Wirkung auf K hat wie die zugehörige Punktspiegelung.

K.STRAMBACH: Quasigruppen auf Mannigfaltigkeiten

Es wurden auf Mannigfaltigkeiten solche Produkte betrachtet, die mit Ausnahme des Assoziativgesetzes allen Gruppenaxiomen genügen.

MARIA TALLINI-SCAFATI: Graphic curves on a Galois plane

In a Galois plane $S_{2,q}$ we define graphic curve of order n, a pair consisting of a $\{k,n\}$-arc K and a map $\mu: K \to N^+$ (N^+, set of positive integers) such that $\sum_{P \in K \cap C^m} \mu(P) \leq mn$, where C^m is an algebraic curve of order m of $S_{2,q}$, $m \leq n-1$.

The properties of such graphic curves are studied and for some of them it is shown that they coincide with suitable algebraic curves.

G.TALLINI: Ruled systems

Let S be a not empty set whose elements we call points and $\mathscr{R}$ a family of parts of S whose elements we call lines.

- 14 -

The pair $(S,\mathcal{R})$ is called ruled system if it injois the following axioms:

a) for all $r,s \in \mathcal{R}$: $r \neq s \Rightarrow |r \cap s| \leq 1$;

b) for all $P \in S$, for all $r \in \mathcal{R}$: $P \notin r \Rightarrow$ there exist one and only one $r' \in \mathcal{R}$: $P \in r'$, $|r \cap r'| = 1$;

c) if P_1 and P_2 are two distinct points belonging to a line, there exist a point Q such that there is no line joining Q either with P_1 or with P_2;

d) it exists a point contained in three distinct lines.

Such systems are studied particularly in the finite case in order to characterize, in a intrinsic way, the linear complexes of lines of a Galois space $S_{3,q}$, the not singular hermitian surfaces of $S_{3,q}$, the not singular quadrics and not singular hermitian hypersurfaces of $S_{4,q}$, the elliptic quadrics of $S_{5,q}$. Results in this way are obtained.

R.WILLE: Rahmenaussagen und direkte Produkte

Γ sei der Funktor der jeder (universellen) Algebra ihre Kongruenzklassengeometrie zuordnet (siehe Springer Lecture Notes 113). Nach Ergebnissen von G.A.Fraser und A.Horn kann man die Produkttreue von Γ auf einer gleichungsdefinierten Klasse durch eine Bedingung vom Mal'cev Typ charakterisieren. Dieses Ergebnis läßt sich aus einem allgemeinen Satzschema über Rahmenaussagen auf direkten Produkten gewinnen. Für eine starke primitive Klasse $\mathfrak{A}$ mit $F(\emptyset,\mathfrak{A})=\{0\}$ erhält man dabei folgenden

Satz: Γ ist genau dann produkttreu auf $\mathfrak{A}$, wenn eine achtstellige, algebraische Operation $\bar{r}$ von $\mathfrak{A}$ existiert, für die gilt:

$$\bar{r}(x_1,x,x,x_4,\ldots,x_8)=x_1,$$
$$\bar{r}(x_1,x_2,x_3,x_2,x_3,x_1,0,0)=x_1,$$
$$\bar{r}(x_1,x_2,x_1,0,0,0,x_2,x_1)=x_2.$$

K.Johannsen (Hamburg)