MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 1/1971

Arbeitstagung Professor Baer

2.1. bis 6.1.1971

Unter der Leitung von H. Salzmann (Tübingen) fand die traditionelle Tagung des Baerschen Kreises statt. Sie sollte den zahlreichen Schülern Reinhold Baers die Möglichkeit zu intensivem Gedankenaustausch geben. Dem dienten in erster Linie die Vorträge, in denen die Teilnehmer über ihre jüngsten Ergebnisse aus den Gebieten Geometrie, Gruppentheorie, Verbandstheorie und Logik berichteten. Die enge Verwandtschaft der angeschnittenen Themen gab jedoch darüber hinaus vielfältig Anlaß zu fruchtbaren Gesprächen über die Grenzen der Disziplinen hinweg. Wie schon oft nahmen auch junge Mathematiker die Gelegenheit wahr, erste Ergebnisse vorzutragen und mit ihren älteren Kollegen in Kontakt zu treten.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer:

M.Aigner, Tübingen
B.Amberg, Frankfurt
R.Baer, Zürich
B.Baumann, Bielefeld
Th.Bedürftig, Tübingen
D.Betten, Tübingen
V.Blasig, Bielefeld
Th.Buchanan, Tübingen
J.Cofman, London
P.Dembowski, Tübingen
U.Felgner, Heidelberg
B.Fischer, Bielefeld
K.-J.Fleischer, Bielefeld
H.-R.Halder, Tübingen
H.Heineken, Erlangen
O.H.Kegel, London
H.Kurzweil, Tübingen
R.Löwen, Tübingen
W.Meißner, Tübingen
H.-M.Meyer, Tübingen
F.Pfrommer, Tübingen
C.Polley, Tübingen
H.Pommer, Tübingen
S.Prieß, Tübingen
O.Prohaska, Tübingen
H.Salzmann, Tübingen
A.Schleiermacher, Tübingen
R.Schmidt, Kiel
U.Schoenwaelder, Aachen
R.-H.Schulz, Tübingen
M.Seib, Tübingen
B.Stellmacher, Bielefeld
T.G.Stoeckel, Bielefeld
T.G.Timmesfeld, Bielefeld
H.Walter, Frankfurt

M. AIGNER: Verbandstheoretische Kennzeichnung vertauschbarer Äquivalenzrelationen.

Sei P_n der Verband der Äquivalenzrelationen über einer n-Menge S. $\pi, \sigma \in P_n$ heißen k-kommutativ, wenn $\pi \cdot \sigma \cdot \ldots = \sigma \cdot \pi \cdot \ldots = \pi \vee \sigma$, wobei die beiden Produkte k Faktoren enthalten. Sei C_k die Menge der Kopunkte aus $[\pi \wedge \sigma, \pi \vee \sigma]$ über den modular von $C_\pi \cup C_\sigma$ erzeugten Elementen des Ranges $r(\pi \vee \sigma) - k$, dann gilt

Satz 1: π, σ sind k-kommutativ $\Longleftrightarrow C_k \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i$.

Korollar: π, σ sind vertauschbar $\Longleftrightarrow C_\pi \cup C_\sigma$ lineare Klasse.

π , σ heißen abbildungsvertauschbar, wenn es Kontraktionen f,g gibt mit $f \circ g = g \circ f$.

Satz 2: π , σ sind abbildungsvertauschbar

$\Longleftrightarrow \varphi : \rho \longrightarrow (\rho \wedge \sigma) \vee \pi, \quad \psi : \rho \longrightarrow (\rho \wedge \pi) \vee \sigma$

für $\rho \in [\pi \wedge \sigma, \pi \vee \sigma]$ sind ranganhebend.

Satz 3: π, σ sind abbildungsvertauschbar $\Longleftrightarrow \exists$ minimales π-Komplement $\pi' \leq \sigma$, minimales σ-Komplement $\sigma' \leq \pi$, so daß $(\pi, \pi') \subseteq M_\pi$, $(\sigma, \sigma') \subseteq M_\sigma$.

B. AMBERG: Faktorisationen von Gruppen.

Satz: Ist die Gruppe $G = AB$ durch eine abelsche Min-by-max-Untergruppe A und eine abelsche Untergruppe B faktorisiert, die artinsch oder zyklisch ist, so ist G eine Erweiterung einer divisiblen artinschen abelschen charakteristischen Untergruppe C durch eine fast-torsionsfreie noethersche Gruppe G/C ; C ist eine π-Gruppe, wenn die maximalen divisiblen Untergruppen von A und B π-Gruppen sind.

B. BAUMANN: Überdeckungen von Konjugiertenklassen endlicher Gruppen.

Ist D eine Teilmenge der endlichen Gruppe G , so sei

$$m(D) = \begin{cases} \min\{n \mid \exists U_1, \ldots, U_n << D> \mid D \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n\}, & \text{falls es existiert} \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$$

Wird G von einer Konjugiertenklasse D erzeugt, so ist $m(D) \neq 2$.

Weiterhin gilt:

Satz: Sei $G = <D>$ und D eine Konjugiertenklasse von G mit $m(D) = 3$. Dann gibt es einen echten Normalteiler N von G mit $N \neq G'$, so daß G/N isomorph zu einer der folgenden Gruppen ist

$$\Sigma_n \text{ , } Sp(2n,2) \text{ , } O(2n,2) \text{ , } GL(n,2) \text{ .}$$

D. BETTEN: 4-dimensionale Translationsebenen.

Jede 4-dimensionale Translationsebene entsteht, indem man eine geeignete Partition $\mathfrak{L}$ des R^4 in 2-dimensionale Teilräume nimmt, diese Partition starr im R^4 verschiebt und die so entstehende affine Ebene topologisch projektiv abschließt. Jede solche Partition kann mit Hilfe einer "transversalen" Homöomorphismus τ der reellen Ebene konstruiert werden, und die zugehörige Geometrie $P(\tau)$ ist genau dann desarguessch, wenn τ linear ist.

Der Kern einer 4-dimensionalen Translationsebene ist isomorph zu C oder zu R je nachdem die Geometrie desarguessch ist oder nicht. Dies liefert, daß zwei nicht desarguessche Partitionen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ genau dann linear isomorph sind, wenn sie isomorphe Ebenen erzeugen, und hieraus folgt, daß man die Standgruppe Γ_o der vollen Kollineationsgruppe Γ auf einem eigentlichen Punkt als lineare Gruppe des R^4 auffassen kann.

Ist Γ transitiv auf der Translationsachse oder gilt $\dim \Gamma \geq 9$ (Γ ist Lie-Gruppe), so ist die Geometrie desarguessch. Es wird eine dreiparametrige Schar nicht desarguesscher 4-dimensionaler Translationsebenen mit $\dim \Gamma = 8$ angegeben. Sie ist bestimmt durch: Γ_o läßt keinen uneigentlichen Punkt fest und wirkt reduzibel auf dem R^4.

J. COFMAN: Baer-Unterebenen in endlichen projektiven Ebenen.

Satz 1: Sei Π eine projektive Ebene der Ordnung $n = m^2$ mit Baer-Unterebenen, die die folgenden Eigenschaften haben:

a) jedes Viereck in Π ist in genau einer Baer-Unterebene enthalten;

b) je zwei Baer-Unterebenen, die genau 3 verschiedene kollineare Punkte gemeinsam haben, schneiden sich in mindestens $m + 1$ kollinearen Punkten;

Dann ist Π desarguessch.

Satz 1 kann man aus dem folgenden Satz ableiten:

Satz 2: Sei α eine affine Ebene der Ordnung $n = m^2$ mit affinen Baer-Unterebenen, so daß

a) jedes Dreieck in genau einer Baer-Unterebene enthalten ist;

b) je zwei Baer-Unterebenen, die mindestens 2 gemeinsame

Punkte besitzen, sich in genau m Punkten schneiden; Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Translationsebene und ihre Baer-Unterebenen sind desarguessch.

U. FELGNER: Borel-Hierarchien in ZF-Modellen.

Sei $Bo(\mathbb{R})$ die Menge der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$, der Menge der reellen Zahlen, und sei ZF die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre, AC das Auswahlaxiom. Wenn $P(\mathbb{R})$ die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ ist, dann gilt bekanntlich $ZF + AC \vdash Bo(\mathbb{R}) \neq P(\mathbb{R})$. Es stellt sich die Frage, ob bei Verzicht auf AC, die Annahme "Alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Borelsch" mit ZF konsistent ist. Diese Frage haben wir positiv beantwortet und gezeigt:

Satz: Jedes abzählbare standard Modell $\mathfrak{M}$ von $ZF + V = L$ kann zu einem abzählbaren standard Modell $\mathfrak{N}$ von $ZF + \neg AC$ erweitert werden, in dem ω_1 mit ω_o konfinal ist und $\mathbb{R}$ abzählbare Union abzählbarer Mengen ist.

Der Beweis verwendet die Forcing-Methode von P.J.Cohen: zu $\mathfrak{M}$ werden "collapsing-functions" $\varphi_n : \omega_o \longrightarrow \omega_n^{\mathfrak{M}}$ und eine Menge $B = \{\varphi_n ; n \in \omega\}$ generisch adjungiert. Ich hörte, daß auch Azriel Lévy dieses Ergebnis erzielt hat (unpubliziert).

B. FISCHER: Die Held-Gruppe in M(24) ?

Sei H die einfache Held-Gruppe. Sei $G = M(24)$ und D die Klasse konjugierter 3-Transpositionen in G. Ist H zu einer Untergruppe von G isomorph, so hat H genau 3 Bahnen auf D. Die Stabilisatoren haben die Ordnung $2^8.3^2.5.7$, $2^9.3^2.5^2.17$, $2^6.3^2.5^2$.

H.-R. HALDER: a) Über Bahnen lokal kompakter Gruppen auf Flächen.
b) Über Dimension einer Bahn.

Wir zeigen, daß jede lokal kompakte zusammenhängende Gruppe, die auf einer Fläche ungleich dem Torus wirkt, eine topologisch abgeschlossene Bahn besitzt.

Weitere Ergebnisse sind:

Auf den Kleinschen Flächen - mit Ausnahme des Torus - sind alle Bahnen Mannigfaltigkeiten.

Die Existenz einer nicht überall auf der Fläche dichten Bahn garantiert schon das Vorhandensein einer top. abgeschlossenen Bahn.

Die Wirkung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G auf einem zusammenhängenden lokal kompakten Raum M läßt sich in natürlicher Weise zu einer Wirkung der universellen Überlagerungsgruppe F von G auf einem beliebigen Überlagerungsraum N von M hochliften.

Wirkt eine lokal kompakte Gruppe G mit abzählbarer Basis auf einem metrisch separablen Raum M als Transformationsgruppe, dann gilt für jede endlich-dimensionale Bahn Gx und die Standgruppe G_x eines Punktes x aus M die Gleichung:
$\dim Gx = \dim G/G_x$.

H. HEINEKEN: <u>Gruppen mit Normalisatorbedingung.</u>

Zu jeder Primzahl p existieren unendlich viele Gruppen G mit folgenden Eigenschaften:

(1) G erfüllt die Normalisatorbedingung

(2) $G'' = (G')^p = 1$ und $G/G' \cong C_{p\infty}$

(3) Faktorgruppen je zweier verschiedener Gruppen dieser Menge sind nicht isomorph.

Dies ermöglicht die Konstruktion weiterer Gruppen mit Normalisatorbedingung. - Ist N ein nilpotenter Normalteiler von G und ist G/N' eine Gruppe mit Normalisatorbedingung, so braucht G die Normalisatorbedingung noch nicht zu erfüllen. Dies ist ein weiteres Indiz für die Sprödigkeit der Normalisatorbedingung.

O.H. KEGEL: <u>Einbettungen projektiver Ebenen.</u>
(Gemeinsam mit A. SCHLEIERMACHER)

<u>Satz 1:</u> Jede projektive Ebene läßt sich in eine projektive Ebene einbetten, die keinen echten Homomorphismus zuläßt.

Satz 2: Jede projektive Ebene läßt sich in eine projektive Ebene einbetten, die keinen nicht-trivialen Automorphismus zuläßt.

Satz 3: Jede projektive Ebene läßt sich in eine projektive Ebene einbetten, deren Kollineationsgruppe auf der Menge der Dreiecke transitiv operiert.

Satz 4: Jede offene projektive Ebene läßt sich in eine projektive Ebene einbetten, deren Kollineationsgruppe auf der Menge der Vierecke transitiv operiert.

Da offene Ebenen keinen konstruierbaren Schließungssatz erfüllen, folgt aus der Vierecksransitivität kein konstruierbarer Schließungssatz.

R. Löwen: Topologische Klassifikation ebener Ebenen.

Salzmann hat angegeben, welche Flächen als Punkträume von topologischen Ebenen vorkommen können; nämlich die offene Kreisscheibe, das offene Möbiusband und die reelle projektive Ebene. Zum Beweis beschränkte er sich auf Flächen, die durch Hinzufügen endlich vieler Punkte zu kompakten Flächen ergänzt werden können. Geht man von einer beliebigen Fläche M aus, so läßt sich der Beweis in ganz analoger Weise führen, wenn man mit der richtigen Kompaktifizierung von M arbeitet. Als geeignet erweist sich die Kompaktifizierung durch "Randkomponenten", wie sie beschrieben ist in dem Buch von Ahlfors und Sario.

H. POMMER: Über die Automorphismengruppe kompakter Liegruppen.

Sei G kompakte Liegruppe, $A(G)$ die Gruppe aller stetigen Automorphismen von G. $A(G)$ wirkt in natürlicher Weise auf der Menge aller abgeschlossenen Untergruppen von G. Welche Untergruppen von G haben endliche Bahn?

Sei H abgeschlossene Untergruppe von G, $\{g^{-1} H g \mid g \in G\}$ sei endlich.

Dann gilt:

1) Die minimalen Gegenbeispiele zu der Aussage

(*) $\{H^{\alpha} | \alpha \in A(G)\}$ ist endlich
sind toroidal.

2) Falls die Dimension des größten toroidalen Normalteilers von G größer als 1 ist, gibt es einen toroidalen Normalteiler K von G_o (G_o= 1-Komponente in G), so daß $\{K^{\alpha} | \alpha \in A(G)\}$ unendlich ist.

Aus diesem Ergebnis folgt ein unmittelbarer Beweis der Tatsache, daß die Automorphismengruppe jedes endlich-dimensionalen Torus residuell endlich ist.

S. PRIESS: Der Hahnsche Einbettungssatz für angeordnete Körper.

Es wird der von P. Conrad und J. Dauns in Pac.J.Math. (1969), 385-398, angeregte Versuch unternommen, einen direkten und einfachen Beweis für die o-Einbettbarkeit eines angeordneten Körpers (K,+,.) mit Γ als Gruppe der archimedischen Klassen in den Körper $H(\Gamma,\mathbb{R})$ der formalen Potenzreihen auf Γ über $\mathbb{R}$ herzuleiten : Zu jedem angeordneten Körper K gibt es einen reell-abgeschlossenen Körper $\hat{K}$ (mit $\hat{\Gamma}$ als Gruppe der archimedischen Klassen). Mit Hilfe des Hahnschen Einbettungssatzes für angeordnete abelsche Gruppen wird bewiesen, daß K in den Körper $H(\hat{\Gamma},\hat{F})$ der formalen Potenzreihen auf $\hat{\Gamma}$ über einem archimedisch angeordneten Unterkörper $\hat{F}$ von $\hat{K}$ o-eingebettet werden kann; damit ist K auch o-einbettbar in $H(\hat{\Gamma},\mathbb{R})$.

O. PROHASKA: Baer-Unterebenen endlicher ableitbarer projektiver Ebenen.

Sei $\mathbb{P}$ eine projektive Ebene der Ordnung m^2. Eine Menge ϑ von $m+1$ Punkten der Geraden W von $\mathbb{P}$ heißt Derivationsmenge, wenn je zwei verschiedene Punkte x und y mit $x,y \notin W$ und $(xy)W \in \vartheta$ in einer ϑ enthaltenden Baerunterebene von $\mathbb{P}$ liegen.

Satz: Ist ϑ eine Derivationsmenge der projektiven Ebene $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ eine ϑ enthaltende Baerunterebene von $\mathbb{P}$, so ist $\mathbb{Q}$ desarguessch.

H. SALZMANN: Gibt es ein komplexes Analogon der Moulton-Ebenen ?

Besitzt eine kompakte, 2-dimensionale projektive Ebene $\mathcal{P}$ eine 4-dimensionale Kollineationsgruppe, die eine Gerade L und einen Punkt $a \notin L$ fest läßt, so ist $\mathcal{P}$ eine im allgemeinen nicht desarguessche Moulton-Ebene. Dagegen ist eine 4-dimensionale Ebene mit einer 8-dimensionalen Kollineationsgruppe, die ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar fest läßt, isomorph zur desarguesschen Ebene $PG_2(\mathbb{C})$.

A. SCHLEIERMACHER: Permutationsgruppen mit kleiner Maximalzahl von Fixpunkten und Projektivitätengruppen.

Sei G eine Permutationsgruppe auf einer endlichen Menge Ω , und sei $\mu(G)$ die maximale Anzahl von Fixpunkten für nicht-triviale Elemente von G . Es wird gezeigt, daß G höchstens drei nicht-reguläre Bahnen haben kann. Das Ergebnis wird auf die Gruppe der Projektivitäten einer endlichen Ebene angewandt.

U. SCHOENWAELDER: Fusion in Sylow-2-Gruppen vom Typ M_{24}.

Es wird das Problem der Bestimmung aller einfachen Gruppen mit einer Sylow-2-Gruppe vom Typ M_{24} $(L_5(2), H_2)$ diskutiert und dabei werden insbesondere Methoden zur Lösung des Fusionsproblems an Hand obiger Fragestellung demonstriert.

R.-H. SCHULZ: Translationsebenen ungerader Ordnung mit g_∞-2-transitiven Kollineationsgruppen.

Der Stabilisator eines affinen Punktes in der vollen Kollineationsgruppe der LÜNEBURG-Ebene der Ordnung m^2 enthält bekanntlich eine zur SUZUKI-Gruppe $Sz(m)$ isomorphe Kollineationsgruppe, die auf der ausgezeichneten Geraden als (ZT)-Gruppe operiert. Weitere nicht-desarguessche endliche Translationsebenen mit Kollineationsgruppen, die die Punkte der ausgezeichneten Geraden zweifach transitiv permutieren, sind nicht

-10-

bekannt. Im Falle ungerader Ordnung läßt sich (unter Verwendung von Sätzen von LÜNEBURG und GORENSTEIN und WALTER) folgendes Ergebnis erzielen:

<u>Satz:</u> Ist $\mathcal{T}$ eine endliche Translationsebene ungerader Ordnung n, und existiert eine Kollineationsgruppe Δ von $\mathcal{T}$, die auf der uneigentlichen Geraden g zweifach transitiv operiert und im Falle $n = m^2$ mit $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ keine BAER-Involutionen enthält, so gilt in $\mathcal{T}$ der Satz von DESARGUES und $\Delta|_g$ enthält eine zu PSL(2,n) isomorphe Untergruppe.

U. STOECKEL: <u>Produkte von $\aleph_\nu$-$(\rho, \mathfrak{M})$-Mengen.</u>

Unter einer $\aleph_\nu$-$(\rho, \mathfrak{M})$-Menge versteht man eine Menge M versehen mit einer Moorefamilie $\mathfrak{M}$, auf der eine "$\mathfrak{M}$-verträgliche" Relation ρ erklärt ist. Dabei kann die Kardinalität bestimmter, durch ρ ausgezeichneter Teilfamilien von $\mathfrak{M}$ durch $\aleph_\nu$ abgeschätzt werden. Für diese Mengen wird die Invarianz bezüglich einer gewissen direkten Produktbildung gezeigt; was dann auf topologische (Kompaktheit) und algebraische Strukturen angewandt wird.

Dann wird ein Satz über das Produkt separabler Räume verallgemeinert, indem man dichte Teilmengen höherer Kardinalität betrachtet. Wir konstruieren dann noch ein Beispiel eines bestimmten verallgemeinerten separablen Raumes.

F.G. TIMMESFELD: <u>Endliche Gruppen, die durch eine Konjugiertenklasse von $\{3,4\}^+$-Transpositionen erzeugt werden.</u>

Eine Konjugiertenklasse D von Involutionen, die die endliche Gruppe G erzeugen, heißt Konjugiertenklasse von $\{3,4\}^+$-Transpositionen, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\forall\, d, e \in D$ ist $o(d\,e) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) Alle Zahlen von 1 bis 4 kommen als Ordnung eines solchen Produktes vor.

(iii) Ist für $d, e \in D$ $o(d\,e) = 4$, so ist $(d\,e)^2 \in D$.

Alle Gruppen vom "Lie-Typ" über GF(2) erfüllen diese Bedingungen, bis auf ${}^2F_4(2)'$ und PSU(n,2). Bis auf $E_8(2)$ wurden sie mit Hilfe obiger Bedingungen gekennzeichnet.

R. Löwen (Tübingen)