MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1971

Kolloquium mit den Fachkollegen der Gymnasien

17.1. bis 23.1.1971

Die Leitung des Kolloquiums lag bei W.Bos (Radolfzell) und R.Fritsch (Konstanz).

Im Mittelpunkt standen Vorträge und Diskussionen über Themen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Fortsetzung und Vertiefung der Themen, die im Wintersemester 1970/71 im Montagskolloquium in Konstanz behandelt worden waren.

Darüberhinaus wurde eine Reihe von Vorträgen angeboten, die teils bekannte Gegenstände unter neuen Gesichtspunkten behandelten; zum anderen führten sie zu neuen Forschungsgebieten der Mathematik hin.

Eine Fahrt zur Besichtigung der Magnetbandfabrik der BASF in Willstätt unterbrach am Mittwoch die Vortragsreihe. Der Vormittag des Samstags diente der Diskussion von Anregungen zu Themen, die im weiteren Verlauf des Montagskolloquiums behandelt werden könnten.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

H.Baumann, Allensbach
I.Baumann, Allensbach
V.Biber, Ravensburg
H.Böhme, Gaienhofen
W.Bos, Radolfzell
W.Forst, Konstanz
R.Fritsch, Konstanz
H.Heller, Salem
R.Jäger-Waldau, Aufkirch
K.-H.Kamps, Konstanz
K.Kohli, Kreuzlingen
A.Kuratle, Kreuzlingen
H.Lages, Überlingen
F.Lorenz, Konstanz
G.Mahl, Oberuhldingen
E.Müller, Torkenweiler
R.Müller, Singen
G.Neubauer, Konstanz
H.Poreda, Lindau
G.Restle, Singen
W.Rußwurm, Kirchdorf
H.Sauter, Weingarten
F.Scheidig, Wasserburg
P.Schellenberg, Oberuhldingen
L.Schmeußer, Wangen
V.Schröter,Buchenberg-Martinsweiler
H.Staib, Bad Waldsee
H.Volpert, Lindenberg
W.Watzlawek, Konstanz

Vortragsauszüge

MÜLLER,R.: Normalverteilung

Der Vortrag behandelte die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (lokaler Grenzwertsatz und Integralsatz von Moivre-Laplace) mit Ausblicken auf die Behandlung der Normalverteilung im Unterricht.

BOS,W.: Der Minicomputer von Papy

Anstelle des Vortrags von H.Salzmann (Tübingen) wurde der Papysche Minicomputer vorgestellt.

LORENZ,F.: Einheitswurzeln

Es wurde versucht,auf elementarer Ebene die enge Verknüpfung der Einheitswurzeln mit arithmetischen Aussagen darzustellen. Dabei sollten auch die heute auf der Schule schon definierten algebraischen Grundbegriffe wie Gruppe, Körper, Restklassenring in einem sinnvollen Zusammenhang behandelt werden. Ausgehend von der Frage, welche Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen man in dem Körper der p-ten Einheitswurzeln (p eine Primzahl) ziehen kann, wurde ein Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes gegeben.

BAUMANN, H.: Zufallsvariable

Definition von Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen, gemeinsame Verteilung von zwei und mehr Zufallsvariablen, Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen. Weiter wurde behandelt: Randverteilung und ein Satz über Unabhängigkeit. Alle Begriffe und Herleitungen wurden an Beispielen erläutert bzw. auf solche angewendet.

FORST, W.: Determinanten

Die Determinante wird wie folgt rekursiv eingeführt:

(I) Ist $A=(\alpha_{11})$ eine einreihige Matrix, so definieren wir

$$\det A := \alpha_{11}$$

(II) Ist $A=(\alpha_{ij})$ eine n-reihige Matrix mit $n>1$, so definieren wir

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_{ij} \det A_{ij}$$

Dabei verstehen wir unter A_{ij} diejenige $(n-1)$-reihige Matrix, die aus A hervorgeht durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Ausgehend von dieser Definition kann man leicht die wesentlichen Sätze über die Eigenschaften der Determinante ableiten. Dabei werden keine Kenntnisse über Permutationen vorausgesetzt, so daß ein elementarer Zugang zur Determinantenlehre möglich wird.

FRITSCH, R.: Kategorien und Funktoren

Zu jedem Vektorraum V gibt es eine lineare Abbildung $k_V: V \to V^{**}$, derart daß das Quadrat

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "k_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "k_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

für alle linearen Abbildungen $f : V \to W$ kommutativ ist.

Zu jeder Gruppe G gibt es einen universellen Homomorphismus η_G von G auf eine kommutative Gruppe $\tilde{G}$. Diese Beispiele motivieren die Einführung der Begriffe Kategorie, Funktor, natürliche Transformation.

KAMPS, K-H.: Erwartungswert, Varianz

Es werden Wahrscheinlichkeitsräume betrachtet, deren Stichprobenraum endlich oder abzählbar unendlich ist, und deren σ-Algebra aus der vollen Potenzmenge des Stichprobenraumes besteht.
Für Zufallsvariable, die auf den Stichprobenräumen solcher Wahrscheinlichkeitsräume definiert sind, werden die Begriffe Erwartungswert, Varianz, Streuung, Covarianz definiert. Es wird bewiesen: Der Erwartungswert ist linear. Der Erwartungswert ist multiplikativ für unabhängige Zufallsvariable. Die Varianz ist additiv für unabhängige Zufallsvariable. Außerdem wird die Tschebyscheffsche Ungleichung hergeleitet.
Als Beispiele werden u.a. die Binomial- und die Poissonverteilung behandelt.

KOHLI, K.: Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Das Problem der Spieldauer

Die ersten Untersuchungen über die Chancen bei Glücksspielen wurden im 16. Jahrhundert von italienischen Wissenschaftern durchgeführt. Systematische Arbeiten begannen Mitte des 17. Jh. mit Pascal und Huygens. Sie wurden vor allem von Jakob Bernoulli, de Montmort und de Moivre fortgesetzt. Im Zusammenhang mit der Frage nach der Dauer von Spielen entwickelte de Moivre die Theorie der rekurrenten Reihen und bereitete damit der erzeugenden Funktion den Weg. Ebenfalls in der Mitte des 17. Jh. begann der Engländer Graunt mit statistischen Untersuchungen, und schon 1670 haben Holländer Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung für statistische Probleme fruchtbar gemacht.

NEUBAUER, G.: Lineare Abbildungen in unendlichdimensionalen Räumen

Ausgehend vom Differentialoperator in $C[0,1]$ läßt sich die Verschiedenheit linearer Gleichungssysteme in endlich- bzw.

unendlichdimensionalen Vektorräumen darstellen.Der Begriff des Index eines abgeschlossenen Operators und seine Störungseigenschaften erlauben eine genauere Beschreibung des Verhaltens solcher Gleichungen.Die Öffnungstopologie gibt dabei einen anschaulichen Ansatz,der sehr allgemeine Ergebnisse sowohl bezüglich der Stabilität des Lösungsverhaltens von Gleichungssystemen wie auch der Stetigkeit von algebraischen Operationen liefert.

BÖHME,H.: Einführung der e-Funktion mittels Potenzreihen

Die möglichen und in Schulen,Büchern und Lehrplänen praktizierten "Wege" im "Flußdiagramm" der Logarithmen und e-Funktion,ihrer Ableitungen,Reihendarstellungen,Beziehungen untereinander etc. werden kritisch verglichen.Um $x \to e^x$ zu einem früheren als dem üblichen Zeitpunkt einführen zu können,motiviert durch die unmittelbar einsichtige Forderung $f=f'$,wird $x \to f(x)$ als Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt.Die notwendigen Voraussetzungen (Stetigkeit,Konvergenzradius,Eindeutigkeit etc.) werden bereitgestellt.Bestimmung der Koeffizienten aus der Forderung $f=f'$,Feststellung der beständigen Konvergenz ($D=R$), und der Nachweis,daß $x \to e^x \equiv x \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bilden die drei Schritte. Die vollständige Induktion als Nachweis wird so geführt,daß dieser nicht nur für $x \in N$,sondern für alle $x \in R$ gilt.Der Ausblick weist auf die sich anbietende Möglichkeit hin,zur Eulerschen Formel und dem Rechnen im Körper der komplexen Zahlen rasch vorzudringen.

WATZLAWEK,W.: Gesetze der großen Zahlen,der zentrale Grenzwertsatz

Es werden die Gesetze der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz behandelt.Dabei werden,ausgehend vom klassischen schwachen Gesetz der großen Zahlen und dem Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace,für die Binomialverteilung die entsprechenden Begriffsbildungen für Folgen von Zufallsvariablen durch Verallgemeinerung gewonnen.Ausgehend vom Ergebnis,daß jede Folge identisch verteilter,paarweise unabhängiger Zufallsvariablen,deren Erwartungswert und Varianz existieren,den Gesetzen der großen Zahlen und dem zentralen Grenzwertsatz genügt,wird die praktische

Anwendbarkeit speziell des zentralen Grenzwertsatzes an einfachen Beispielen demonstriert.

BOS, W.: Mittelwerte

Im Vortrag werden behandelt:

1) Charakterisierung des arithmetischen Mittels durch Axiome.
2) Herleitung der Normalverteilung aus dem Satz vom arithmetischen Mittel.
3) Mittelwerte auf beliebigen Mengen.
4) Stetige Mittelwerte auf R; Isomorphiesatz.

G. Restle (Singen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft