MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 4/1971

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Mathematikunterricht

24.1. bis 30.1.1971

Auf der Didaktiktagung über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die unter der Leitung der Herren H.Athen (Elmshorn) und H.Dinges (Frankfurt) stand, waren erstmalig Hochschul- und Gymnasiallehrer in gleicher Anzahl vertreten. So war es möglich, die Unterrichtsergebnisse, die vorgetragen wurden, aus universitärer Sicht kritisch zu werten und andererseits neue fruchtbare Anregungen für die Entwicklung der Stochastik an der Schule zu geben.
Eine abschließende Diskussion ergab jedoch noch keinen Konsens über einen etwaigen Lehrplan. Es wurde beschlossen, dieses Problem für die nächste Tagung in den Mittelpunkt zu stellen und stärker in die Vorbereitung miteinzubeziehen.

Teilnehmer

J.André, Saarbrücken
K.Arzt, Tübingen
H.Athen, Elmshorn
J.Bammert, Freiburg
M.Barner, Freiburg
P.Bartel, Berlin
F.Barth, München
R.Baumann, Lüneburg
H.Bergold, Gräfelfing
R.Borges, Gießen
J.Bruhn, Elmshorn
H.Dinges, Frankfurt
J.Dzewas, Ahrensburg
A.V.Engel, Ludwigsburg
E.Freudenthal, Reinbek
H.Gall, Düsseldorf
P.Grabenstein, Ludwigsburg
R.Haller, München
A.Jaeger, Bochum
D.Kahle, Göttingen
H.P.Kinder, Münster
G.König, Stuttgart
R.Krauskopf, Gießen
H.Lindner, Hamburg
E.Mellin, Stuttgart
H.Metzler, Usingen (Frankfurt)
W.Metzler, Frankfurt
D.Morgenstern, Freiburg
L.Scheller, Frankfurt
J.Schmidt, Berlin
K.Sielaff, Hamburg
H.Stever, Karlsruhe
B.L. van der Waerden, Zürich
H.Wäsche, Karlsruhe
E.Walter, Freiburg
F.-R.Walter, Lübeck
E.Wittmann, Dortmund
W.Markwald, Freiburg

H.ATHEN: Grundfragen der Spieltheorie im Unterricht

Aufgrund von praktischen Versuchen wurde über Grundfragen der Spieltheorie im Unterricht einer 12. Klasse berichtet. Es kam dabei u.a. darauf an, Anwendungen für lineare Probleme in der analytischen Geometrie zu gewinnen. Aus methodischen Gründen war zunächst die Beschränkung auf 2 • 2 - Zweipersonen - Nullsummen-spiele geboten. Dabei wurden die Begriffe "Spiel", "Spielmatrix", "Strategie" angesprochen. Mit Hilfe der Methoden der linearen Optimierungwurde die Lösung solcher Spiele unter didaktischen Gesichtspunkten des Schulunterrichts entwickelt. Ein Ausblick auf 2 • n - bzw. m • 2 - Spiele und 3 • 3 - Spiele schloß die Betrachtungen ab.

P.BARTEL: Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Schaltalgebra

Geht man von der Tatsache aus, daß die Durchdringung unterschiedlicher mathematischer Gebiete dem Schüler erleichtert wird, wenn er gemeinsame Strukturen erkennt, so darf man behaupten, daß auch der strukturelle Aspekt der Wahrscheinlichkeitsrechnung dazu beitragen wird. Ein Lehrgang der unter diesem Gesichtspunkt von der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die Mengenalgebra und die Algebra der Aussageformen zur Schaltalgebra führt, muß aber notwendigerweise in Kauf nehmen, daß das wesentliche Kennzeichen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das stochastische Denken, dann nicht den hervorragenden Platz einnimmt, der ihm bei einem Spezialkurs "Wahrscheinlichkeitsrechnung" zustehen würde.
Der von mir in der Oberstufe durchgeführte Kurs geht vom naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff in endlichen Ereignisräumen aus. Die Abstraktion endet in der Aufstellung eines minimalen Axiomensystems. Begrifflich wird nur bis zur Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeit vorgedrungen. Die Darstellung von Ereignissen durch Mengen führt zur Mengenalgebra. Daraus läßt sich die Behandlung der Algebra der Aussageformen motivieren, so daß bei nun mehreren vorhandenen Modellen der Begriff der Booleschen Algebra (B.A.) eingeführt werden kann.
Eine anschließend behandelte "Theorie" der abstrakten B.A. beinhaltet auch B. Funktionen und ihre Normalformen.

Die Aufstellung von B. Funktionen bei vorgegebenen Funktionswerten an gewissen Stellen leitet, unter Berücksichtigung der nur vorhandenen Konstanten 0 und 1. über zur Schaltalgebra. Hier können nun mit den aus der Kenntnis der Booleschen Algebra vorhandenen Hilfsmittel Aufgaben unter folgenden Gesichtspunkten gelöst werden:
Reihenparallelschaltung, Mehrpolschaltung, Stern-Dreieck-, Dreieck-Stern-Transformation, Brückenschaltung, Entwurf von Schaltungen mit vorgegebenen Eigenschaften, Vereinfachung von Schaltungen.

H.BERGOLD: Direkte Herleitung des Gesetzes der großen Zahlen für die Binomialverteilung

Es ist wünschenswert, die Tschebyschew-Ungleichung (und damit das schwache Gesetz der großen Zahlen) im Unterricht möglichst bald zu gewinnen, wenn gerade der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen zur Verfügung steht.
Es sei $z(\sigma)$ die Anzahl der "Wappen" beim n-fachen Werfen einer Münze. Die Ungleichung

$$\text{Wahrsch.}\left(\left|\frac{z}{n}-p\right|>a\right)<\frac{1}{a^2}\sum_{\sigma\in S}\left(\frac{z(\sigma)}{n}-p\right)^2 p_\sigma$$

wird auf die übliche Art gewonnen.
Die berechnung der Summe auf der rechten Seite (der Varianz der Binomialverteilung z) geschieht durch getrennte Auswertung der Terme $\frac{1}{n^2}\sum_{\sigma\in S} z^2(\sigma)\,p_\sigma$ $\sum_{\sigma\in S} z(\sigma)\,p_\sigma$ und $\sum_{\sigma\in S} p_\sigma$. Die Berechnung gelingt ohne Benutzung von Binomialkoeffizienten durch den Trick der Zerlegung $z(\sigma) = z_1(\sigma) + \dots + z_n(\sigma)$ ($z_i(\sigma)$ = Anzahl der Wappen beim i-ten Werfen der Münze). Man erkennt:

$$\sum_{\sigma\in S} z_i(\sigma)\,p_\sigma = p \quad ; \sum_{\sigma\in S} z_i z_k\, p_\sigma = p^{i} \quad (i \neq k)$$

Die Ungleichung

$$\text{Wahrsch.}\left(\left|\frac{z}{n}-p\right|>a\right)<\frac{p(1-p)}{a^2 n}$$

wird in verschiedenster Weise für Übungsaufgaben ausgenutzt, bis hin zum Diagramm der Konfidenzintervalle zur Schätzung von p. Das Risiko, "um mehr als a daneben zu treffen" ist stets kleiner als das Tschebyschew-Risiko

$$\frac{p(1-p)}{a^2 n} = r_T$$

meist wesentlich kleiner. Den Schülern wird (ohne Beweis) eine Tabelle mitgeteilt, wie (für große n) r_T mit dem wahren Risiko zusammenhängt.
Anhangsweis wurde ein elementarer Beweis dafür gegeben, daß bei der idealen Münze alle Einzelwahrscheinlichkeiten mit $n \to \infty$ gegen Null konvergieren:

$$P_{2n} = \text{Wahrsch. für n-mal Wappen bei 2n Würfen} = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,2^{2n}}$$

$$P_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}P_{2n} \Rightarrow P_{2n+2}^{-1} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)P_{2n}^{-1} = 2\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$> 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)$$

Die Divergenz der harmonischen Reihe wird in der Oberstufe gewöhnlich durchgenommen. Aus dieser Divergenz folgt $P_{2n+2}^{-1} \to 0$ für $n \to \infty$.

J.BRUHN: Einsatz eines Kleincomputers im Statistikunterricht

Der Einsatz eines Kleincomputers im Statistikunterricht ermöglicht die Behandlung praxisnaher Aufgaben. Die Programmierung ist einfach, wie an drei Beispielen gezeigt wird: Gruppierte Mittelwerte, Binomialverteilung, Normalverteilung.

H.DINGES: Bemerkungen zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule

In einem zusammenfassenden Referat wurde auf die wesentlichen Punkte hingewiesen, die der Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Schule leisten muß, um nicht in die Strukturmathematik eingeordnet zu werden. Folgende Punkte wurden erwähnt:

1) Analysieren von Daten
1a) Schätzprobleme
Unterschied zwischen Fehlern erster und zweiter Art
2) Die Rolle des Urnenmodells und seine Grenzen
3) Zufallsgenerator bei Nullsummenspielen
4) Sequentielle Spiele

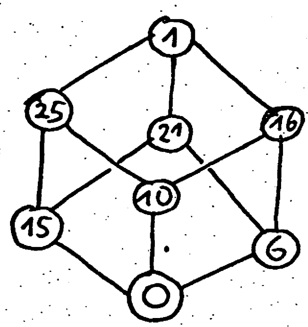
A.V.ENGEL: Bericht über die Verfilmung einer Unterrichtsreihe über Wahrscheinlichkeitsrechnung

Es wurde berichtet über einen Unterrichtsversuch in einer Unterstufenklasse in den USA, der die Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Anschluß und als Anwendung der Bruchrechnung zum Ziel hatte und "live" verfilmt wurde. Die hierbei auftretenden Probleme wurden am Beispiel einer Unterrichtsstunde dargestellt.

E.FREUDENTHAL: Modelle Boolescher Algebren

Bei axiomatischer Visierung führt die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mehrere

Vorträge der Tagung inhaltlich zur Booleschen Algebra. Diese wurde als distributiver und komplementärer Verband (Boolescher Verband = Boole sche Algebra) definiert. Von den Modellen bildete das sog. "Ringmodell" das Hauptbeispiel: $(R,+,\cdot)$ sei kommutativer Ring mit 1. Dann bildet die Menge aller Idempotenten $E(R) = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = x\}$ bildet unter den Verknüpfungen "o" und "$\cdot$" eine Boolesche Algebra $(a \circ b = a + b - ab)$. Spezielle Anwendung: Alle Idempotenten eines Restklassenringes nach einer ganzen Zahl. Hierbei ist $a \leq b \overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ $ab = a$ oder $a \circ b = b$ jetzt die spezielle in jedem Verbande gemäß $a \leq b \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \sqcap b = a$ oder $a \sqcup b = b$ definierte Halbordnung. Modell $E(\mathbb{Z}_{30})$.
(Literatur: Bachmann: n-Ecke, Hermes:Verbandstheorie)



H.GALL: Notwendigkeit des Unterrichts in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik an Gymnasien

In vielen Examensarbeiten für Staats- und Hochschulprüfungenaller Fachbereiche werden heute statistische Auswertungen gefordert, ohne daß die Kandidaten eine gründliche Ausbildung hierin erfahren haben. Infolgedessen fallen die Ergebnisse häufig recht unbefriedigend aus, wie an Hand von Beispielen aus dem Bereich des Wissenschaftlichen Landesprüfungsamts Köln dargelegt wird. Dem Übel kann aber nicht dadurch abgeholfen werden, daß Kurzkurse in Statistik speziell für die verschiedenen Fächer an den Universitäten und Hochschulen eingerichtet werden, da ein wirkliches Verständnis für statistische Aufgaben in einem kurzen Ausbildungszeitraum nur sehr schwer erzielt werden kann. Ein befriedigendes Beherrschen statistischer Methoden ist u.U. nur dadurch zu erreichen, daß ihre Behandlung bereits im Unterricht der Gymnasien in ausreichendem Maße erfolgt. Daher wird die Forderung vertreten, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Kanon der verbindlich zu unterrichtenden Gegenständen an den Gymnasien aufzunehmen.

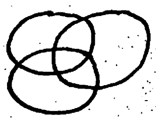
H.LINDNER: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Bericht über einen Unterrichtsversuch in der Unterstufe des Gymnasiums.

Der Vortragende hat in zwei Parallelklassen eines Mädchengymnasiums einen

Unterrichtsversuch durchgeführt, über den im einzelnen berichtet wurde. Ziel war es, daß sich die Schülerinnen durch Eigentätigkeit den Lehrstoff aneignen sollten. Dazu erhielten sie am Schluß einer jeden Stunde einen Aufgabenbogen, der - wie beim programmierten Lernen - schrittweise zu den Ergebnissen führte. Der Lernvorgang wurde also zur Hauptsache in die Hausaufgaben verlegt, so daß fast alle Schülerinnen immer wieder zu Erfolgserlebnissen kamen. Die Unterrichtsstunden waren dagegen meist ohne Höhepunkte. Da es immer wieder gelang, an Situationen aus der Umwelt der Schülerinnen anzuknüpfen, konnte eine hohe Motivation und damit eine ausgezeichnete Mitarbeit aufrechterhalten werden.
Das Aufgabenergebnis und die beiden Klassenarbeiten sowie der Wortlaut des Vortrags waren vervielfältigt und wurden vor dem Vortrag verteilt.

W. METZLER: <u>Bericht über ein Math.-didaktisches Seminar in Beispielen und allgemeinen Betrachtungen.</u>

Im math.-didaktischen Seminar der Universität Frankfurtführen in diesem Semester Lehramtskandidaten Unterrichtsversuche vor interessierten Schülern durch. Durch lohnende Aufgaben soll die Eigentätigkeit der Schüler angeregt werden. Es wird u.a. über die Aufgabe berichtet, wie $\frac{1}{e}$ als Limes der relativen Häufigkeit von Permutationen ohne festbleibende Objekte entsteht. Die Schüler besprachen und lösten dabei u.a. die topologische Aufgabe, daß sich für $n \geq 4$ das zu



analoge Schnittdiagramm (unter Beachtung aller Nachbarschaftsbeziehungen) nicht mit zusammenhängenden Gebieten in der Ebene zeichnen läßt. Ein solches "Sich-Überschneiden verschiedener mathematischer Gebiete" (hier: Topologie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik, Analysis) bei Schülerfragen ist charakteristisch. Ratschläge: Strukturen einführen, wenn sie Arbeit ersparen, nicht, wenn sie solche machen.
Literatur: Logeleien (Zeit), Rosanow:Wahrscheinlichkeitstheorie.

D.MORGENSTERN: <u>Stochastische Fragen und Methoden an einfachen Beispielen erläutert</u>

An Hand eines Beispiels werden die wesentlichen Begriffe und Fragestellungen und Methoden erläutert bzw. auf sie hingewiesen (hier in Klammern gesetzt oder unterstrichen). Verkehrsunfälle von n Autos, die je mit <u>Wahrscheinlichkeit</u> p an einem festen Tage, <u>unabhängig</u> voneinander einen Unfall

erleiden. Anzahl der Unfälle dann binomisch verteilt: 2 Parameter in der Verteilung; Erwartungswert, Mathematischer Grenzwertsatz für $n \to \infty$, $p \to 0$
$np = \lambda =$ fest : $\binom{n}{\nu} p^{\nu} (1-p)^{n-\nu} \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}$ (e-Definition, Rekursionsformel): ein unbekannter Parameter. Schätzproblem ($\lambda = 3$) als zugehöriges statistisches Problem. Schätzung hier durch Erwartungswertdeutung und Gleichsetzen mit Jahresmittel. Gewonnene Aussage über Wahrscheinlichkeitsverteilung für Unfallzahl; z.B. bei $\lambda = 1$ 37% unfallfreie Tage, ca. 24% "unfallträchtige" Tage($N > 1$). (Erkenntnisgewinn aus der Beobachtungszahl und den Modellannahmen). Hinweis auf genauere Aussage des Grenzwertsatzes durch Fabius (Statistica neerlandica 21(1967) S. 287), andere Abweichungen (z.B von der Unabhängigkeit) und Beispiele anderer in der Schule behandelbarer Grenzwertsätze beim "Geburtstagsproblem".

B.L. VAN DER WAERDEN: Ein Experiment in Holland: Einführung der Statistik als Schulfach.

In den Jahren 1951-55 wurde an 4 Gymnasien in Holland von 5 Lehrern unter der Leitung von Dr. Bunt ein Experiment gemacht mit dem Unterricht in Statistik in den zwei höchsten Klassen des humanistischen Gymnasiums, Richtung .
Ergebnis des Experiments: Die beteiligten Lehrer waren sehr zufrieden. Die Noten der Schüler in der Matura waren besser als in früheren Jahren. Der Lehrgang wurde nachher von Dr. Bunt veröffentlicht.
Eine Kommission der Lehrervereinigung hat 1954 einen neuen Lehrplan für Mathematik an der Oberrealschule veorgeschlagen. Darin wurden 50 Unterrichtsstunden für Statistik vorgeschlagen. Es gab jedoch Schwierigkeiten bei einer sofortigen obligatorischen Einführung des neuen Lehrplans. 1958 wurde daher der neue Lehrplan ohne Statistik verbindlich gemacht.
Nun soll ein neues Experiment gemacht werden. Das Experiment ist im Gang. In 2 Jahren hofft man so weit zu sein, daß man im ganzen Lande "Kaderkurse" zur Schulung der Lehrer einrichten kann. Die Schulung der Lehrer ist nämlich das Hauptproblem.

F.-R.WALTER: Zugang zu Begriffen der Statistik unter Benutzung eines Klein-Computers mit Plotter.

Es wurde vorgeführt, an welchen Stellen bei der propädeutischen Einführung in statistische Verfahrensweisen (in Kursen der Sekundarstufe II) ein Klein-Computer mit Plotter eingesetzt werden kann:

Zählung bzw. Berechnung der Häufigkeiten eines Würfels (externe Dateneingabe über Papierkarten als Versuchsprotokolle)- Zeichnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion - Berechnung der Binomialverteilung - Einfluß der Parameter p und n auf die Verteilungsform wird an gezeichneten Histogrammen deutlich- Zeichnung verschiedener Binomialverteilungen und Näherungen durch Normalverteilungen - Testen einer Verteilung auf Binomialität - Paare von Messungen (externe Eingabe über Papierkarten als Versuchsprotokolle) - Zeichnung der Meßpunkte - Berechnung und Zeichnung der Regressionsgeraden und der Korrelationsgeraden.

E.WALTER: Bemerkungen zum Unterricht in Stochastik.

Es werden einige Bemerkungen zur Gestaltung des Unterrichts und zum allgemeinen Bildungswert der Stochastik gegeben. An Hand der Geschlechtsverteilung bei Zwillingen wird das Problem der Gültigkeit von Wahrscheinlichkeitsmodellen diskutiert. Die praktische Bedeutung der Korrelation von X mit Y - X (Y und X unabhängig) und des Regressionsansatzes von Galton sowie die Manipulierbarkeit von Testverfahren werden behandelt.

E.WITTMANN: Psychologische Fragen des Erstunterrichts in Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Erfahrung zeigt, daß es günstig ist, den Erstunterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Klassen 4/5 zu verlegen. Man muß in diesem Alter vorwiegend experimentell und unter Benutzung geeigneter bildlicher Darstellungen arbeiten. Fundamentale Fragestellungen und Konzepte von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik lassen sich bereits im Anfangsunterricht wenigstens intuitiv behandeln (Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungen z.B.) An einem Beispiel wird gezeigt, daß experimentelle Verfahren auch später eine Rolle spielen und wie sich Begriffe und Fragestellungen allmählich präzisieren lassen (Idee der Curriculum-Spirale).

Bericht über die abschließende Diskussion

Die Abschlußdiskussion wurde von Prof. Dinges geleitet. Er schlug vor, die im folgenden stichwortartig charakterisierten Punkte zu diskutieren:

1. Was ist aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik einfach genug für den Lehrer, für den Schüler, für welche Altersstufe?
2. Was ist anregend für den Unterricht?
3. Was ist nützlich, aus wessen Sicht?

Was kann man also empfehlen?

In den folgenden Beiträgen wurden drei Fragenkreise näher besprochen.

a) Jeder Teilnehmer hat auf der Tagung Anregungen empfangen. Die Abschlußdiskussion kann zur Bewußtseinsbildung beitragen (Metzler). - Diskussion der vorliegenden Papiere, Einordnen der Vorträge (Lindner, Dinges u.a.).
b) Diese Tagung kann als Vorbereitung für weitere Tagungen angesehen werden, auf denen von Schulversuchen berichtet wird (Athen). - Vorschläge, Erfahrungen, Erfolge (Metzler, Morgenstern, Dinges u.a.).
c) Diese Tagung sollte mit einem offiziellen Résumée abgeschlossen werden (Sielaff). - Lehrerausbildung, allgemeine Gesichtspunkte zur Stochastik im Unterricht, operationalisierter Lehrplan, konkreter Lehrgang (Borges, Wittmann, Baumann u.a.).

Eine Abstimmung ergab 5 Stimmen für den Vorschlag a), 3 Stimmen für den Vorschlag b) und 13 Stimmen für den Vorschlag c) bei 7 Enthaltungen. In der anschließenden Sachdiskussion wurden die drei o.a. Themenkreise ausführlich besprochen. Zur nächsten Tagung sollten auch einige - aber nicht zu viele - Naturwissenschaftler, Psychologen, Soziologen o.ä. eingeladen werden.

Zu einer teilweise recht lebhaft geführten Diskussion kam es nach der Frage eines Teilnehmers "Gibt es stochstisches Denken?". Als Antwort wurde herausgearbeitet, daß die adjektivistische Form der Bezeichnung genau so wenig irreführend sei wie "theoretische Physik" oder "evangelisches Gesangbuch". Stochastisches Denken kann als Analogon zu physikalischem oder geometrisch-anschaulichem Denken gesehen werden; es kann durch Übung entwickelt werden. Stochastische Modelle sind eine Grundlage stochastischen Denkens. Stochastisches Denken ist ein psychologisches Problem.

Zusammenfassend gab Prof. Morgenstern eine Übersicht über Fragen, die auf der nächsten Tagung über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Schule besprochen werden müssen:

Was ist Stochastik?

Was ist stochastisches Denken?

Welchen Bildungswert und Nutzen hat stochastischer Unterricht?

Was soll im Unterricht behandelt werden? - Stoff, Begriffe.
Wie soll es behandelt werden, wie könnte es behandelt werden? - Vorschläge.
Was ist behandelt worden? - Erfahrunge, Erfolge.
Wann und in welchem Umfang sollte stochastischer Unterricht stattfinden?
Zur Organisation:

Empfehlungen für Ministerien
... für Lehrer in Ausbildung
... für tätige Lehrer
Ausstattung (Computer, Zufallsgenerator)
Bücher, Lehrmittel.

Den Abschluß bildete eine engagierte Diskussion über die Frage, ob die hier versammelte Gruppe sich als Lobby verstehe, die ihre Vorstellungen geschickt durchsetzen wolle (Beispiel USA), oder ob wissenschaftlicher Ethos dem entgegenstehe (Jaeger,Morgenstern,Dinges u.a.).

J. Schmidt (Berlin)