MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7/1971

Spezielle Funktionen

14.2. bis 20.2.1971

Zum dritten Male fand unter Leitung der Herren C.Meyer (Köln) und F.W.Schäfke (Berlin) die Fachtagung "Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie" in der Zeit vom 14.2. bis 20.2.1971 statt. Sie wurde von 35 Mathematikern - davon sieben aus dem Auslande - besucht. Die 23 gehaltenen Vorträge (14 aus dem Bereich der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und 9 aus dem der Zahlentheorie) fanden reges Interesse und gaben zu ausführlichen Diskussionen Anlaß. Im einzelnen wurden in der mathematischen Physik folgende Themen behandelt: Ausbau der Theorie der orthogonalen Polynome, neue Ergebnisse über Integraltransformationen, Reihenentwicklungen nach speziellen Funktionen und Fragen der Approximationstheorie. Schwerpunkte bei den Referaten über Zahlentheorie waren die Theorie der diophantischen Approximation, die Theorie der Modulfunktionen höherer Stufe sowie imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 2.

Teilnehmer

H.P.Baltes, Zürich
J.Blankenagel, Köln
R.Bulirsch, Köln
B.L.J.Braaksma, Delft
G.Brecht, Itzehoe
P.Bundschuh, Freiburg
P.Deuflhard, Köln
U.Dieter, Karlsruhe
A.Dijksma, Delft
W.Hahn, Graz
U.Halbritter, Köln
F.Halter-Koch, Köln
J.Kallies, Köln
C.-H.Kann, Köln
H.Lang, Köln
R.Mauve, Köln
J.Meixner, Aachen
R.Mennicken, Konstanz
C.Meyer, Köln
L.Neckermann, Würzburg
H.-D.Nießen, Köln
Th.Pfaff, Köln
M.Pohst, Köln
A.Sattler, Köln
F.W.Schäfke, Berlin
R.Schertz, Köln
D.Schmidt, Berlin
H.Schmidt, Würzburg
A.Schneider, Mainz
A.Schönhage, Konstanz
R.Sips, Brüssel
H.S.V. de Snoo, Delft
H.M.Stark, Princeton
H.-J.Stender, Köln
A.Stöhr, Berlin
G.Wolf, Berlin

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

MEIXNER, J. : Symmetrische Orthogonalpolynome

Ein System von orthogonalen Polynomen $S_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ mit einer reellen Belegungsfunktion in $-\infty<x<\infty$ wird symmetrisch genannt, wenn für $x = 0,1,2,\ldots$ gilt $S_n(x) = S_x(n)$. Diese Bedingung führt genau auf eine vom Verfasser 1934 angegebene Klasse von orthogonalen Polynomen, die die Charlier'schen Polynome (bei geeigneter Normierung) als Grenzfall enthält. Einige Eigenschaften dieser Polynome (Bilinear-Reihen, Entwicklung der Green'schen Funktion) werden angegeben und auf mögliche Verallgemeinerungen der Symmetrie-eigenschaft wird hingewiesen.

SCHÄFKE, F.W. : Zu den Orthogonalpolynomen von Althammer

Es wird eine gegenüber Althammer (1962) und Gröbner (1965/67) wesentlich vereinfachte Herleitung der bekannten und einiger neuer Resultate über die Orthonalpolynome A_n zum Skalarprodukt

$$\int_{-1}^{1} fg\,dx + \lambda \int_{-1}^{1} f'g'dx$$

gegeben, bei der besonders die Normierung $A_n(1) = 1$ vorteilhaft ist.

BLANKENAGEL, J. : Hermitesche Polynomoperatoren und orthogonale Polynome

Der Vortrag gibt ein Verfahren an, mit dem es gelingt, Aussagen für orthogonale Polynome (Rekursionsformeln, Differentialgleichungen) mit Hilfe geeigneter hermitescher Polynomoperatoren zu gewinnen. Als Anwendung erhält man eine Reihe von Formeln fürdie Jacobi-Polynome,darunter die bekannte Differentialgleichung und die Rodrigues-Formel. Darüberhinaus wird gezeigt, wie man auch bei einem Skalarprodukt, das allgemeiner ist als das klassische $\int_a^b W(x)f(x)g(x)\,dx$, mit diesem Verfahren Aussagen erhalten kann. Als Spezialfälle entstehen dabei die Formeln von Althammer (Crelle,211,(192-204)) und Brenner (Dissertation (1969) Stuttgart).

BRAAKSMA, B.L.J.,: Grundräume für Integraltransformationen

Zur Definition von Integraltransformationen für Distributionen hat man Grundräume zu betrachten, die durch diese Transformationen bijektiv und stetig auf-einander abgebildet werden. Solche Räume werden angegeben für die Mellin- und Watson-Transformationen, nämlich folgende Räume $T(\lambda,\mu)$ und $S(\lambda,\mu)$.

$\varphi \in T(\lambda,\mu) \Leftrightarrow t^{c+p}\varphi^{(p)}(t)$ existiert und ist beschränkt für $\lambda < c < \mu, p=0,1,2,\ldots, t>0$.

$\Phi \in S(\lambda,\mu) \Leftrightarrow \Phi(s)$ analyt. für $\lambda < \mathrm{Re}\, s < \mu$ und $|s^p \Phi(s)|$ ist beschränkt für $p=0,1,2,\ldots$ und $\lambda' \leq \mathrm{Re}\, s \leq \mu'$ mit λ' und μ', so daß $\lambda < \lambda' < \mu' < \mu$.

$T(\lambda,\mu)$ wird durch die Mellin-Transformation 1-1 stetig auf $S(\lambda,\mu)$ abgebildet. Wenn $K(s)$ anal. ist für $\lambda < \mathrm{Re}\, s < \mu$ und $K(s) = O(s^{\mathrm{Re}\, s + \alpha})$, $s \to \infty$ und $H(s) = K^{-1}(1-s)$ anal. ist für $1-\mu < \mathrm{Re}\, s < 1-\lambda$ und $H(s) = O(s^{\mathrm{Re}\, s - \alpha - 1})$, $s \to \infty$, dann wird durch $\psi(x) = \int_0^\infty k(xt)\varphi(t)dt$, wo $k = \mathfrak{M}^{-1}K$ ist, der Raum $T(1-\mu, 1-\lambda)$ umkehrbareindeutig und stetig auf $T(\lambda,\mu)$ abgebildet;

$$\varphi(x) = \int_0^\infty k(xt)\psi(t)dt \quad .$$

Es wurden noch andere Grundräume mit analogen Eigenschaften angegeben, und an der Hankel-Transformation als Beispiel erläutert.

SNOO,de, H.S.V. : Spectral theory of Watson transforms

We consider integral transforms T defined by Braaksma :

$$(Tf)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1(xy)}{y} f(y)\, dy \quad ,$$

which are generalizations of the Watson transforms. The spectrum $\sigma(T)$ of these transforms is expressed in terms of the Mellin transform of the functions $k_1(\pm x)/\pm x$ $(x>0)$. In case $0 \in \varrho(T)$ (the resolvent set) the transform T provides a one to one correspondence between $L^2(-\infty,\infty)$ and itself, which can be inverted by a similar transform. For normal transforms formulas are given for the calculation of $\varphi(T)$, where φ is a bounded Borel measurable function defined on $\sigma(T)$. The transforms $\varphi(T)$ turn out to be Watson transforms themselves. Several examples, including the Hankel- and the Meyer-transforms are given.

SIPS, R. : Un nouveau mode de représentation des fonctions définies par des intégrales de Laplace.

Pour calculer la valeur d'une intégrale définie de la forme

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$$

lorsque x est un grand nombre, on utilise généralement le développement asymptotique obtenu en remplacant, dans l'intégrale définie, la fonction f(t) par son développement en série de puissances de t. Ceci a l'inconvénient de fournir en général une série divergente.
Si la fonction f(t) est uniformément décroissante, on obtient des résultats bien meilleurs en utilisant pour f(t) un développement de la forme suivante

$$\sum_{m=0}^{n} a_m e^{-\lambda_m t}$$

où les a_m et les λ_m sont des constantes. Nous montrons comment on peut déterminer ces constantes et dans quel cas les λ_m sont réels et positifs.
Lesrésultats obtenus sont ensuite appliqués au calcul approche de certaines fonctions spéciales: $E_1(x)$, Erfc(x), $K_o(x)$ et $J_o(x)$.

SCHMIDT, H. : Zyklische Funktionen und Laplacetransformation

Im Zusammenhang mit einem Bericht über Definition und Grundeigenschaften der 1877 von Appell als Verallgemeinerung der hyperbolischen bzw. trigonometrischen Funktionen eingeführten zyklischen Funktionen $\varphi_\lambda(x)$ bzw. $\psi_\lambda(x)$ ($\lambda = 0,1,\ldots,n-1$) werden jeweils neuere Ergebnisse mitgeteilt. Sie werden im Anschluß an eine Arbeit von Polya (1921) [1] zum Nachweis dafür,daß die Nullstellen auf gleichwinklig verteilten Halbstrahlen durch den Ursprung liegen, asymptotische Entwicklungen für die großen Nullstellen angegeben, die abgesehen von einem linearen Anfangsglied, nach einer Dirichletschen Skala mit endlicher Basis des Exponentenmoduls bei fastperiodischen Zahlfolgen als Koeffizienten fortschreiten, entsprechend einem allgemeinen Satz des Vortragenden (1937) [2]. Im Anschluß an die

Additionstheoreme wird die allgemeine Lösung der betreffenden Funktionalgleichungen (bei einfachsten Anfangsbedingungen) angegeben.[3] Schließlich werden mittels Laplacetransformation die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\psi_\lambda(x)}{x^h}\, dx \qquad (1 \leqq h \leqq \lambda)$$

explizit ausgewertet: Gegenstück zu klassischen Integralen mit trigonometrischen bzw. Besselschen Funktionen.[4]

1) Tohoku, Math.J. 19,241-148;

2) Schmidt,H.;Math. Ann. 113(1937),629-656;Satz12,§4 .;

3) " ;M.Z. 76 (1961), 46-50;

4) Watson : Theorie of Besselfunctions 1952 , 13.24, S.391ff .

DIJKSMA, A. : Spherical harmonics and the product of Jacobi polynomials

Braaksma and Meulenbeld (Kon. Akad. v, Wetensch.,Proc.of, A71,4,304-309) have characterized the Jacobi polynomials as surface spherical harmonics in q dimensions which are invariant for certain orthogonal transformations. As an application they derive a Laplace representation of the Jacobi polynomials. Another application of this characterization is given by Dijksma and Koornwinder. They proved an integral formula for the product of two Jacobi polynomials, which is a generalization of the Laplace representation. The results are:

1. $$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t^2) = \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{\pi\,(2n)!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\frac12)\,\Gamma(\beta+\frac12)} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (tu \pm i\sqrt{1-t^2}\, v)^{2n} (1-u^2)^{\alpha-\frac12}(1-v^2)^{\beta-\frac12}\, du\, dv,$$

2. $$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t^2)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2s^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\pi\, n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\frac12)\,\Gamma(\beta+\frac12)} \,\times$$

$$\times \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} C_{2n}^{\alpha+\beta+1}(stu + \sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2}\cdot v)(1-u^2)^{\alpha-\frac12}(1-v^2)^{\beta-\frac12}\, du\, dv,$$

for $\operatorname{Re}\alpha > -\frac12$, $\operatorname{Re}\beta > -\frac12$.

BALTES, H.P. : Zur Randwertaufgabe der Strahlungstheorie

Aufgabe: Eigenwertdichte $D(\Omega)d\Omega$ der Hohlraumstrahlung,

$$(\Delta + (\frac{2\pi}{\lambda})^2)\vec{E} = 0\ , \quad \Omega^3 = \frac{8V}{\lambda^3}\ , \quad V \text{ Volumen }.$$

Ausgangspunkt: Satz von H. Weyl [1] :

$$D(\Omega) \sim \pi\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^{3/2}(\log\Omega)^{1/2}) \quad \text{für } \Omega \to \infty .$$

Methoden:

A) $0<\Omega<100$ u. einfache Geometrien: Explizite Abzählung der 10^6 ersten Eigenwerte $\longrightarrow$ Nullstellen spezieller Funktionen (z.B. Bessel [2]) u. ev. Gitterpunkte in Kugel $\subset \mathbb{R}^3$.

B) Asymptotik $\Omega \to \infty$: Verfahren nach CARLEMAN [3] mit Tauberschen Theorem von Karamata.

Ergebnis: Der beim analogen akustischen Problem auftretende Oberflächenterm [4] $\sim S\Omega$ verschwindet! Man hat im Mittel: $D - \pi\Omega^2$ = const. bzw. $\sim O(1)$.

Literatur: [1] H. Weyl, J.Math. 143,177(1913);
[2] F.W.J. Olver, Phil. Trans. Roy. Soc. 247, 307 (1954);
[3] T. Carleman, 8 Scand. Math. Kongr. 1934;
[4] A. Pleijel, Ark. Mat. 2, 553 (1952).

NECKERMANN, L. : Zur mathematischen Abhandlung der Coulombschen Wellenfunktionen

In der Kernphysik tritt die zur Klasse der konfluenten hypergeometrischen Funktionen gehörende Differentialgleichung der Coulombschen Wellenfunktionen

$$\text{(C)} \quad \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right) W = 0 \quad (\varrho > 0\ ;\ \eta \in \mathbb{R}\ ;\ l+1 \in \mathbb{N})$$

auf. ($\eta = 0$ führt auf sphärische Besselfunktionen). Diese geht mit Hilfe von

$$W =: \varrho^{l+1}\, e^{-i\varrho}\, y(2i\varrho)\ , \quad x := 2i\varrho$$

in die Kummersche Differentialgleichung

$$\text{(K)} \quad x\,y'' + (c - x)\,y' - a\,y = 0$$

mit den speziellen Parameterwerten $a = l+1-i\eta$, $c = 2(l+1)$ über.
Es werden hier aufgrund dieser Tatsache gewisse ausgezeichnete

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Fundamentalsysteme von (C) und (K) in Zusammenhang gebracht und deren Verhalten für $\varrho \to +0$ und $\varrho \to +\infty$ untersucht; ferner werden Reihenentwicklungen von Coulombschen Funktionen nach Besselschen Funktionen hergeleitet.

BRECHT, G. : Über den Haupt-, Resonanz- und Ausnahmefall bei linearen und nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten

Klassifiziert man - nach Iglisch: Arch. Rat. Mech. Anal. 3, 1959, p.179-186 - die Dgl.

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = f(t) \quad ,$$

worin a , b , f stetig und mit P periodisch sind, nach Haupt-, Resonanz- und Ausnahmefall, so läßt sich die analytische Gestalt ihrer Lösungen y angeben, wie das Floquetsche Theorem Aussagen über die analytische Gestalt der Lösungen der zugehörigen homogemen Dgl. macht. Unter Zugrundelegung dieser Ergebnisse und der o. a. Klassifikation werden die Untersuchungen ausgedehnt auf die Frage nach Eigenschaften von Lösungen der gestörten Dgl.

$$z'' + g(z,z',t) = f(t) + \beta\, F(t)$$

in bezug auf eine bekannte und mit P periodische Lösung y_o der ungestörten Dgl. (β=0). Dabei sollen f und F stetig und mit P periodisch sein, das β hinreichend klein, und $g(z,z',t)$ sei in bezug auf t stetig und mit P periodisch und besitze in bezug auf z und z' mindestens stetige zweite partielle Ableitungen.

HAHN, W. : Über die Lösungen einer speziellen geometrischen Differenzengleichung mit einem akzessorischen Parameter

Die allgemeine Lösung der geometrischen Differenzengleichung

$$p_2 f(q^2 x) + p_1 f(qx) + p_o f(x) = 0 \quad ,$$

in der die p_i quadratisch in x sind, läßt sich durch sieben funktionentheoretische Parameter (drei Exponenten und vier Polfolgen) kennzeichnen. Die acht Parameter der Gleichung (Koeffizientenverhältnisse) sind mithin durch die Lösungsparameter nicht vollständig bestimmt; ein Gleichungsparameter ist "akzessorisch".

Führt man $\vartheta f := (f(qx)-f(x))/(q-1)x$ ein und stellt die Koeffizienten in passender Weise als Potenzen von q dar, so geht die Gleichung mit $q \to 1$ in eine Fuchs'sche Differentialgleichung mit drei Singularitäten im Endlichen über; sie hat einen akzessorischen Parameter. Man kann nun die Lösungsparameter der beiden Gleichungen eineindeutig aufeinander beziehen. Es ist aber nicht möglich, auch die akzessorischen Parameter eineindeutig zuzuordnen: einem bestimmten akzessorischen Parameter der einen Gleichung entspricht eine ganze Schar von akzessorischen Parametern der anderen Gleichung.

PFAFF, Th.: Über die Reihenentwicklungen der Ellipsoidfunktionen nach Bessel-Funktionen

Die Ellipsoidfunktionen, das sind die Lösungen der Differentialgleichung, die durch Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten entsteht, werden auf geeigneten Kreisringen, auf denen sie den nicht halbzahligen charakteristischen Exponenten s haben, in Reihen nach den Funktionen $x^{-1/2}J_{n+s+1/2}(x)$ $(n\in\mathbb{Z})$ entwickelt. Die Entwicklungskoeffizienten sind eindeutig bestimmt als ein Lösungstyp einer linearen homogenen Differenzengleichung vierter Ordnung. Die Resultate von F.M. Arscott werden insofern verallgemeinert, als dieser nur den Fall $s\in\mathbb{Z}$ und Entwicklungen vom Potenzreihentyp betrachtet. Die Methode des unbestimmten Reihenansatzes, die Arscott benutzt, wird vermieden durch die Verwendung eines von F.W. Schäfke bewiesenen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes über Entwicklungen nach Funktionen J_{n+s} $(n\in\mathbb{Z})$, der analog zu einem entsprechenden Satz über Laurent-Entwicklungen nach Potenzen x^{n+s} gilt.

SCHÖNHAGE, A.: Zur rationalen Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0,\infty)$

Bezeichnet Π_n die Menge der reellen Polynome vom Grade $\leqq n$, dann sind die zu untersuchenden Größen

$$\lambda_n := \min_{p\in\Pi_n} \sup_{x\geq 0} \left| e^{-x} - \frac{1}{p(x)} \right| .$$

Auf dem Umweg über L^2-Laguerre-Approximation von $e^{\frac{x}{4}}$ wird die Ungleichung

$$\frac{c_1}{\sqrt{n}\,3^n} \leqq \lambda_n \leqq \frac{c_2}{3^n} \qquad \text{gezeigt, insbesondere also}$$

$$\sigma := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lambda_n} = \frac{1}{3} .$$

BUNDSCHUH, P.: Eine Anwendung hypergeometrischer Reihen in der Theorie der diophantischen Approximation

Der Beweis des folgenden Satzes wird skizziert:

Sei $a \neq 0$ rational, $a = s/t$ mit ganzrationalen, teilerfremden s, t $(t \geqq 1)$; ferner sei $d = \lg(\frac{3}{2} e^{|a|}) + \frac{1}{2} \operatorname{Max}(e, (\frac{aes}{2})^2, (\frac{aes}{2})^4)$,

$$m = \operatorname{Max}(36\, t^2 e^{|a|},\ 240\, t^2 |a| e^{2|a|}) .$$

Dann gilt für alle ganzrationalen p, q mit $q \geqq 1$:

$$\left| e^a - \frac{p}{q} \right| > \frac{\lg(d + \lg q)}{mq^2(d + \lg q)} \exp\left(- \frac{4(d + \lg q)}{\lg(d + \lg q)} \lg|s| \right) .$$

Hieraus ergibt sich ein bis auf die numerische Konstanten scharfes Irrationalitätsmaß für $e^{1/t}$, $e^{-1/t}$ mit natürlichen t, das außerdem zeigt, daß sich diese Zahlen nicht so gut durch rationale Zahlen approximieren lassen, wie es nach einem bekannten Satz von Khintchine fast alle reellen transzendenten Zahlen tun. Insbesondere gilt

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > (18\, q^2 \lg 4q)^{-1} \lg\lg 4q \quad \text{für alle ganzrationalen } p, q \text{ mit } q \geqq 1.$$

Ähnliche Resultate für $\left| (\operatorname{tgh}\sqrt{a})/\sqrt{a} - \frac{p}{q} \right|$ bzw. $\left| (\operatorname{tg}\sqrt{a})/\sqrt{a} - \frac{p}{q} \right|$ bei rationalem $a > 0$ werden erwähnt und schließlich wird auf ein Irrationalitätsmaß für e^a hingewiesen, wenn a spezielle liouvillesche transzendente Zahlen sind.

SCHERTZ, R.: Beweis einer Vermutung von H. Weber

Es wurde eine neue Methode zur Untersuchung der singulären Werte der Weberschen Funktionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$, $\gamma_3(\omega)$ und anderer Modulfunktionen höherer Stufe vorgetragen, die der Vortragende in seiner Dissertation Köln 1970 entwickelt hat. Sie ermöglicht neben einer Neubegründung Weberscher Resultate den Beweis der beiden Weberschen Vermutungen über die singulären Werte von $f(\omega)$ und $f_1(\omega)$ (vgl. H.Weber, Lehrbuch der Algebra, Band 3, § 127). Der Beweis der zweiten Weberschen Vermutung wurde im Vortrag durchgeführt.

STARK, H.M.: Values of L-functions

Let $Q(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$, $a > 0$, $d = b^2 - 4\,ac < -4$, $\chi_k(n) = (\frac{k}{n})$ (Kronecker symbol) where k is the discriminant of a (real or complex) quadratic field, $(k,d) = 1$. Let

$$L(s,\chi_k,Q) = \sum_{m,n \neq o,o}{}' \frac{\chi_k(Q(m,n))}{Q(m,n)^s}$$

THM. $L(1,\chi_k,Q) = \frac{2\pi}{24\,|k|\sqrt{|d|}} \log \varepsilon$

where ε is a unit in a certain ring class field of degree $\leqq 2\,h(d)$.

Conjecture: Any Artin L-series at $s = 1$ is a certain algebraic number times π^a times a bxb determinant of linear forms of logarithms of units from the over-field. Here the values of a and b can be determined from the Γ-factors of the functional equation.

POHST, M.: Geschlechter quadratischer Einheitsformen in total reellen Zahlkörpern

Ausgehend von C. L. Siegels Hauptsatz aus der Theorie der quadratischen Formen erhält man für die 4m-reihige Einheitsmatrix mit K. Barner die grundlegende Formel für total reelle algebraische Zahlkörper:

$$\overline{A}(\mathfrak{F}^{(4m)},1) = \left(\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}\right)^r \sqrt{D}^{\,1-4m} \left(\zeta_K(2m)\right)^{-1} \prod_{\mathfrak{p}|2} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{[\frac{e}{2}]}}{1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2m}}\;.$$

Durch elementare Abschätzungen und mit expliziten Kenntnissen über die Funktionswerte der Zetafunktion werden zwei Sätze bewiesen:

Satz 1 : In total reellen, nicht zyklischen kubischen Zahlkörpern ist das Geschlecht von $\mathfrak{F}^{(4m)}$ mehrklassig.

Satz 2 : In total reellen, nicht zyklischen kubischen Zahlkörpern ist das Geschlecht von $\mathfrak{F}^{(4m)}$ mindestens dreiklassig.

MEYER, C. : Imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 2 und komplexe Multiplikation

Es sei $\Omega = P(\sqrt{d})$ ein zweiklassiger imaginär-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d < 0$. Für $d = -4p$, p prim, wurden diese Körper bereits früher bijektiv bezogen aufdie elliptische Kurve $y^2 = x(x^2 + 3)$ vermöge deren Gitterpunkte $\neq (0,0)$.

Für $d = -3p$, p prim, ist die Untersuchung viel schwieriger. Sie stützt sich auf die Klassenzahlformel

$$\varepsilon_o^{h_o} = \frac{1}{3^{3/2}} \left(\frac{\eta\left(\frac{\omega+1}{3}\right)}{\eta(\omega)} \right)^6 ;$$

ε_o = Grundeinheit; h_o = Klassenzahl von $P(\sqrt{p})\,(6 \nmid h_o)$; $\omega = \frac{1+\sqrt{-3p}}{2}$.

Vermöge der Multiplikatorgleichung zum Transformationsgrad 3 läßt sich hiermit die Invariante $\gamma_3(\omega)$, so dann $j(\omega)$ und schließlich $\gamma_2(\omega)$ berechnen. Als Endresultat ergibt sich, daß u in

$$\varepsilon_o^{h_o} = \frac{u+v\sqrt{p}}{2}$$ ein natürlicher Kubus ist. D.h. die Pellsche Gleichung

$N(\varepsilon_o^{h_o}) = -1$ wird zur diophantischen Gleichung

$$X^6 + 4 = p\,Y^2 \quad ; \quad X, Y \in \mathbb{Z} .$$

Für $p \equiv 5\ (8)$ gibt es nachweislich (wegen $3 \nmid h_o$) nur die Lösung $p = 5$; $X = \pm 1$, $Y = \pm 1$. Für $p \equiv 1\ (8)$ ist diese Gleichung vermutlich nur für die Primzahlen $p = 17$, 41 , 89 lösbar, falls $3 \nmid h_o$.

HALBRITTER, U.: Bedingt konvergente Integrale und mehrfache Gauß'sche Summen

Es wurde der Krazersche Beweis zum Reziprozitätsgesetz mehrfacher Gauß'scher Summen durch die Untersuchung der auftretenden Reihenglieder mittels partieller Integration richtiggestellt. Bei dieser Analyse erhält man auch das ansonsten sinnlose Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \langle Ux,x\rangle}\, d(x_1,x_2)$$

einen wohlbestimmten Sinn als Grenzwert einer gewissen Folge von Integralen der Form

$$\int_{-M}^{N}\int_{-P}^{Q} e^{2\pi i \langle Ux,x\rangle}\, d(x_1,x_2) \qquad (M,N,P,Q \longrightarrow \infty) .$$

HALTER-KOCH, F.: Abgeschlossene Mengen algebraischer Zahlen

Für $q,k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ sei $C_q^*(k,\delta)$ die Menge aller rationalen Fkt. $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ mit

a) $A(z)$, $Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $Q(0) = q$;

b) $f(z)$ hat in $|z| \leqq 1$ höchstens k Pole ; diese liegen alle in $\delta \leqq |z| < 1$.

c) Für $|z| = 1$ ist $|f(z)| \leqq 1$, $|f(0)| \geqq 1$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Sei S_q ($\overline{S}_q$) die Menge aller $\Theta \in \mathbb{R}$ ($\Theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) mit: $\frac{1}{\Theta}$ ist Pol einer Fkt. $f \in C_q^*(1,\&)$ ($f \in C_q^*(2,\&)$). Dann ist $S_q \cup \overline{S}_q$ abgeschlossen und $(S_q \cup \overline{S}_q)^{(\&)} \neq \emptyset$. Es werden Elemente aus $(S_q \cup \overline{S}_q)^{(\&)}$ diskutiert.

DIETER, U.: Eine kombinatorische Methode zur Erzeugung normal-verteilter Zufallszahlen

Zur Erzeugung normal-verteilter Zufallszahlen wird die Gauß'sche Glockenkurve in zwei Teile zerlegt: Das Zentrum $C = \{x \mid -\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}\}$ und die Schwänze $T = \{x \mid |x| \geqq \sqrt{2}\}$. Für das Zentrum wird folgender Mechanismus verwendet:

C1: Erzeuge eine (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl u_o.

C2: Erzeuge eine Folge u_i, $i \geqq 1$ mit $u_i = \max(v_i, w_i)$, v_i, w_i (0,1)-gleichverteilt. Die Folge wird bei K abgebrochen, so bald $u_o \geqq u_1 \geqq \ldots \geqq u_{K-1} < u_K$ ($K = 1$ falls $u_o < u_1$).

C3: Ist K gerade, beginne erneut bei C1.

C4: Ist K ungerade, so ist $y = u_o\sqrt{2}$ eine Zufallszahl aus dem Zentrum $C_+ = \{0 \leqq x \leqq \sqrt{2}\}$ der Normalverteilung. (84% der Fälle).

Die Methode folgt aus dem

Lemma: Es seien u_o, u_i ($i \geqq 1$) Zufallsveränderliche mit den Verteilungsfunktionen $F_o(x)$ bzw. $F(x)$. Dann gilt mit $c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(t)}\, dF_o(t)$

$$P(x \geqq u_o \geqq u_1 \geqq \ldots \geqq u_{K-1} < u_K \mid K \text{ ungerade}) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} e^{-F(t)} dF_o(t) .$$

Setzt man $F_o(t) = t$ für $t \in [0,1]$ und 0 bzw. 1 außerhalb $[0,1]$ und $F(t) = (F_o(t))^2$, so erhält man die Methode C1 - C4.

Für den Schwanz $\sqrt{2} < x$ wird die Neumannsche Methode zur Erzeugung exponential-verteilter Zufallszahlen mit der Acceptance-Rejectance-Methode verknüpft (majorisierende Funktion $\frac{x}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \geqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$).

DIETER, U.: Kurzer Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die Meyer'schen Summen

Die Meyer'schen (verallgemeinerten Dedekindschen) Summen

$$s^{(f)}_{g,h}(a,c) = \sum_{\mu=0}^{c-1}\left(\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{cf}\right)\right)\left(\left(\frac{a\mu}{c} + \frac{ag+ch}{c\cdot f}\right)\right) \quad \text{mit} \quad ((x)) = x - [x] - \frac{1}{2} \quad \text{für}$$

$$x \not\equiv 0 \pmod 1, \quad ((0)) = 0$$

genügen dem Reziprozitätsgesetz

$$s^{(f)}_{g,h}(a,c) + s^{(f)}_{h,g}(c,a) = \left(\left(\frac{g}{f}\right)\right)\left(\left(\frac{h}{f}\right)\right) - \frac{1}{4}\,\delta\left(\frac{g}{f}\right)\delta\left(\frac{h}{f}\right) + \frac{a}{2c}\,P_2\left(\frac{g}{f}\right) + \frac{1}{2ac}\,P_2\left(\frac{ag+ch}{f}\right) +$$

$$+ \frac{c}{2a}\,P_2\left(\frac{h}{f}\right)$$ (Dieter, Crelle 201)

Dies Gesetz folgt aus folgenden Identitäten fast ohne Rechnung:

$$\sum_{\mu=0}^{c-1} P_1\left(\frac{\mu+x}{c}\right) = P_1(x), \quad \sum_{\mu=0}^{c-1} P_2\left(\frac{+x}{c}\right) = \frac{1}{c}\,P_2(x) \quad \text{und} \quad \left(\mp\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Dabei ist $P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, $P_2(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6}$, $\delta(x) = 0$ für $x \not\equiv 0 \pmod 1$, $\delta(x) = 1$ für $x \equiv 0 \pmod 1$.

G. Wolf (Berlin)