MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 8/ 1971

Axiomatische Mengenlehre

14.2. bis 22.2.1971

Die Tagung fand unter der Leitung von A. Oberschelp (Kiel) statt. Sie lief parallel zu einer anderen mathematischen Tagung. Zu der Mengenlehre-Tagung waren insgesamt 18 Teilnehmer erschienen. Neben einem Vortrag über Ackermanns Mengenlehre wurde in der Hauptsache die iterierte Anwendung der Forcing-Methode nach Solovay und Tennenbaum behandelt.

Teilnehmer

R. Deissler, Freiburg
H.-D. Ebbinghaus, Freiburg
K. Gloede, Heidelberg
S. Görnemann, Kiel
K. Heidler, Freiburg
M. Holz, Hannover
B.-J. Koppelberg, Bonn
G. Müller, Heidelberg
A. Oberschelp, Kiel
H. Oellrich, Hannover
B. Peppinghaus, Bonn
H. Pfeiffer, Hannover
K.-P. Podewski, Hannover
K. Potthoff, Kiel
A. Prestel, Bonn
W. Schwabhäuser, Bonn
P. Spielmann, Bonn
K. Steffens, Hannover

Vortragsauszüge

K. POTTHOFF: Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem I

Die in diesen Vorträgen bewiesenen Lemmata dienten der Vorbereitung des im Teil II bewiesenen Hauptsatzes. Beschrieben wurde dazu die iterierte Konstruktion von booleschwertigen Modellen der Mengenlehre: Sei $\mathbb{D}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{1}$ eine vollständige Boolesche Algebra im booleschwertigen Modell $V^{\mathbb{B}}$. Dann kann man in $V^{\mathbb{B}}$ $V^{\mathbb{B}^{\mathbb{D}}}$ konstruieren, so, wie in V $V^{\mathbb{B}}$ konstruiert wird. In $\mathbb{D}$ erhält man eine Boolesche Algebra $\mathbb{C}\in V$, deren Elemente gerade die Elemente von $V^{\mathbb{B}}$ sind, die mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{1}$ Elemente von $\mathbb{D}$ sind. $\mathbb{C}$ besitzt im wesentlichen die Eigenschaften, die $\mathbb{D}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{1}$ hat. Das (in V) konstruierte booleschwertige Modell $V^{\mathbb{C}}$ ist (grob gesprochen) das iterierte Modell $V^{\mathbb{B}^{\mathbb{D}}}$ und die in $V^{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-gültigen Aussagen sind die mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{1}$ $\mathbb{D}$-gültigen Aussagen über $V^{\mathbb{B}^{\mathbb{D}}}$.

S. GÖRNEMANN: Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem II

Martin's Axiom wurde in folgender Form zitiert:

(A) Ist B Boolesche Algebra mit $\bar{\bar{B}}<2^{\aleph_0}$, die die abzählbare Antikettenbedingung erfüllt, $\alpha<2^{\aleph_0}$ und für jedes $\xi<\alpha$ $M_\xi \subseteq B$, so existiert auf B^* (der McNeilleschen Vervollständigung von B) ein Ultrafilter F, der für jedes $\xi<\alpha$ $\sum^{B^*} M_\xi$ erhält.

Es wurde (nach der Arbeit "Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem" von R.M. Solovay und S. Tennenbaum) gezeigt, daß ZF + AC + $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ + A relativ widerspruchsfrei zu ZF + AC ist; genauer:

Satz. Θ sei überabzählbare reguläre Kardinalzahl, so daß für $\aleph<\Theta$ $2^{\aleph}\leq\Theta$ gilt. Dann existiert eine vollständige Boolesche Algebra $\mathbb{B}$ mit $\bar{\mathbb{B}}\leq\Theta$, die die abzählbare Antikettenbedingung erfüllt, so daß in $V^{\mathbb{B}}$ gilt:

1) Martin's Axiom

2) für $\aleph_0 \leq \aleph < \Theta^\vee$ ist $2^\aleph = \Theta^\vee$.

Als wesentlichstes Hilfsmittel wurde bewiesen:

Satz (Tarski - Solovay). Θ sei Ordinalzahl. Für alle $\alpha<\Theta$ sei $\mathbb{B}_\alpha$ vollständige Boolesche Algebra; für $\alpha\leq\beta\leq\Theta$ sei $\mathbb{B}_\alpha$ reguläre Subalgebra von $\mathbb{B}_\beta$; es sei $\mathbb{B}_0=2$; für jede Limeszahl $\lambda\leq\Theta$ sei $\mathbb{B}_\lambda = (\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{B}_\alpha)^*$. Für alle $\alpha<\Theta$ gelte: falls $\mathbb{B}_\alpha$ die abzählbare Antikettenbedingung erfüllt, so auch $\mathbb{B}_{\alpha+1}$. - Dann erfüllt für jedes $\alpha\leq\Theta$ $\mathbb{B}_\alpha$ die abzählbare Antikettenbedingung.

B.J. KOPPELBERG: <u>Martin's Axiom</u>

Sei $\aleph$ eine unendliche Kardinalzahl. $\underset{\sim}{A}_\aleph$: Zu jeder partiellen Ordnung P und jeder Familie $\mathcal{F}$ mit $\overline{\overline{\mathcal{F}}}\leq\aleph$ von dichten Teilmengen von P existiert ein $\mathcal{F}$- generischer Filter in P, falls P c.a.c. erfüllt.

Folgerungen aus $\underset{\sim}{A}_\aleph$:

1) $\aleph<2^{\aleph_0}$,

2) $2^\aleph = 2^{\aleph_0}$

3) Jede Teilmenge des Kontinuums mit Mächtigkeit $\leq\aleph$ hat Lebesgue-Maß 0

4) Der Durchschnitt von höchstens $\leq\aleph$ vielen dichten offenen Teilmengen der Menge der reellen Zahlen ist dicht.

Weiter wurden eine Reihe von zu $\underset{\sim}{A}_\aleph$ äquivalenten und teilweise auch schwächeren Formeln vorgestellt. Ganz kurz wurde auf bestimmte Folgerungen aus $\underset{\sim}{A}$, der Aussage $\aleph<2^{\aleph_0} \rightarrow \underset{\sim}{A}_\aleph$, eingegangen, die üblicherweise aus CH gefolgert werden. Benutzte Literatur: Martin - Solovay, Internal Cohen Extensions; Solovay - Tennenbaum, Iterated Cohen Extensions and Souslin's Problem; K. Kunen, Inaccessability Properties.

Aus den beiden zuletztgenannten Arbeiten wurden die folgenden Resultate bewiesen bzw. zitiert.

1.) $\underset{\sim}{A}_{\aleph_1}$ → Es gibt keine Souslin-Bäume (d.h. keine Souslin-Kontinua)

2.) $\underset{\sim}{A}_{\aleph}$ → Die σ-Algebra der Rechtecke in $P(\aleph^+)$ ist gleich mit $P(\aleph^+)$.

Weiterhin wurden einige Beweismöglichkeiten aus der erwähnten Literatur angegeben, aus $\underset{\sim}{A}$ zu folgern, daβ $2^{\aleph_0}$ nicht reellwertig meβbar ist.

A. PRESTEL: Ackermanns Mengenlehre

Ackermanns Mengenlehre ist eine Klassentheorie mit der zweistelligen ∈ (Element) Beziehung und einer Konstanten V (= Klasse aller Mengen). Die Axiome besagen

1) Zwei Klassen mit denselben Elementen sind gleich.

2) Alle Mengen mit einer gewissen Eigenschaft bilden eine Klasse.

3) Elemente und Teilklassen von Mengen sind wieder Mengen.

4) Trifft eine ∈-Eigenschaft (gegeben durch eine Formel, in der die Konstante V nicht vorkommt, Parameter aus V jedoch vorkommen können) nur auf Mengen zu, so bilden alle Mengen mit dieser Eigenschaft wieder eine Menge.

Nimmt man noch hinzu

5) Jede nichtleere Menge besitzt bzgl. ∈ ein minimales Element,

so gilt [Levy, Grewe, Reinhardt], daβ in V, dem Bereich aller Mengen, genau alle Sätze der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre gelten.
Für diese Tatsache wurde ein einfacherer Beweis gegeben unter der zusätzlichen Voraussetzung:

2') Jeder durch eine Eigenschaft gegebene Teil einer Klasse ist selbst eine Klasse.

A. Prestel, Bonn