MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 10|1971

Partielle Differentialgleichungen
28.2. bis 6.3.1971

Die sechste Tagung "Partielle Differentialgleichungen" stand unter der Leitung von W. Haack(Berlin), E. Heinz (Göttingen) und G. Hellwig (Aachen). Wegen des starken Interesses bemühte sich die Tagungsleitung, die Teilnehmerzahl zu begrenzen. Daher kamen 60 Teilnehmer, 36 Vorträge wurden gehalten. Die Vorträge galten allen Teilgebieten der partiellen Differentialgleichungen, wobei wieder nichtlineare Probleme und Funktionalanalytische Methoden im Vordergrund standen.

Die Betreuung in den schönen neuen Gebäuden des Institutes war vorbildlich.

Teilnehmer

K.W. Bauer (Graz)
N. Bazley (Genf)
R. Böhme (Göttingen)
M. Brelot (Paris)
C. Bureau (Brüssel)
G. Cimmino (Bologna)
H.O. Cordes (Otterndorf, Berkeley)
H. Drehmann (Stuttgart)
J. Dufner (Freiburg)
M.S.P. Eastham (London)
G. Fichera (Rom)
H. Florian (Graz)
J. Frehse (Frankfurt)
W. Haack (Berlin)
M. Harth (Mainz)
E. Heinz (Göttingen)
G. Hellwig (Aachen)
St. Hildebrandt (Bonn)
E. Hölder (Mainz)
F. Hoppensteadt (New York)
W. Jäger (Münster)
J. Leray (Paris)
K. Jörgens (München)
F. John (New York)

H. Kalf (Aachen)
D. Kaul (Mainz)
E. Kreyszig (Düsseldorf)
R. Kress (München)
R. Leis (Bonn)
O. Liess (Bukarest)
I.S. Louhivaara (Jyväskylä,Finnl.)
C. Miranda (Neapel)
Cathleen S. Morawetz (New York)
F. Natterer (Hamburg)
R. Nevanlinna (Helsinki)
J.C.C. Nitsche (Minneapolis)
Ch.R. de Prima (Pasadena)
Marianne Reichert (Frankfurt)
H.-W. Rohde (Aachen)
A. Schatz (New York)
I. Segal (Cambridge/Mass.)
C.G. Simader (München)
U. Staude (Mainz)
K. Steinbrunn(Stuttgart)
F. Stummel (Frankfurt)
K. Steffen (Mainz)
G.L. Tautz (Freiburg)
F. Tomi (Göttingen)
E. Voigt (Karlsruhe)
W. van Wahl (Göttingen)
W. Walter (Karlsruhe)
S. Weber (Braunschweig)
N. Weck (Bonn)
J. Weidmann (München)
W. Wendland (Darmstadt)
P. Werner (Stuttgart)
K.-O. Widman (Uppsala)
E. Wienholtz (München)
C.H. Wilcox (Genf)
R. Wüst (Aachen)

Vortragsauszüge

K.W. BAUER: Differential- und Integraloperatoren bei partiellen Differentialgleichungen, Teil I (zusammen mit H. Florian)

Ausgehend von der Darstellung der in einfach zusammenhängenden Gebieten definierten Lösungen der Differentialgleichung

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0, \quad \varepsilon = \pm 1 , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

mit Hilfe von Differentialoperatoren werden die folgenden Verallgemeinerungen behandelt.

(A) $$F(z,\bar{z})w_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0, \quad n \in \mathbb{N} .$$

F bezeichnet dabei eine beliebige im betrachteten Gebiet definierte Lösung der Differentialgleichung $F(\log F)_{z\bar{z}} + 2 = 0$.

(B) Übertragung des allgemeinen Darstellungssatzes auf die in Zylindergebieten des Raumes $\mathbb{C}^2$ definierten holomorphen bzw. meromorphen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(1+z_1z_2)^2 w_{z_1z_2} + n(n+1)w = 0 \text{ bzw. } F(z_1,z_2)w_{z_1z_2} - n(n+1)w = 0 .$$

(C) Abbildung von Lösungen der Differentialgleichung $\Delta_{2N}U = 0$ auf Lösungen der Differentialgleichung

$$\omega^2\Delta_{2N}w + \varepsilon n(n+1)w = 0 \text{ mit } \omega = 1 + \varepsilon\sum_{k=1}^{N} z_k\overline{z}_k .$$

(D) Darstellung von Lösungen inhomogener Differentialgleichungen.

H. FLORIAN: Differential- und Integraloperatoren bei partiellen Differentialgleichungen, Teil II (zusammen mit K.W. Bauer)

Im Teil II des Doppelvortrages werden zuerst verschiedene Typen von Integraloperatoren zur Darstellung von Lösungen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen betrachtet. Einige dieser Typen werden zur Lösung der Differentialgleichung

$$Fw_{zz^*} - n(n+1)w = 0 \quad \text{mit} \quad F = \frac{[\varphi(z)+\psi(z^*)]^2}{\varphi'(z)\psi'(z^*)}$$

herangezogen. U.a. wird auch gezeigt, wie sich durch einen "Polynomoperator" eine integralfreie Darstellung gewinnen läßt. Dieses Resultat entspricht der Darstellung durch den Differentialoperator, der im Teil I von Herrn K.W. Bauer gebracht wird.

Ähnliche Resultate, integralfreie Darstellungen und Zusammenhänge zu Differentialoperatoren lassen sich auch bei der folgenden Differentialgleichung mit 2N unabhängigen Veränderlichen

$$\sum_{i=0}^{N} w_{z_iz_i^*} + \lambda B(r)w = 0 \quad \text{mit} \quad B = \frac{4\alpha^2 r^{2\cdot\alpha-2}}{(1+\varepsilon r^{2\alpha})^2}$$

gewinnen.

N. BAZLEY: Variational Methods for Nonlinear Eigenvalueproblems

Recently M. Reeken, B. Zwahlen and the lecturer have investigated variational characterizations of solutions of nonlinear eigenvalue problems of the form $A(u) = \lambda u$ in a Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(G)$, for G a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Here A can be written as $A(u) = Bu + C(u)$, where B is self-adjoint with eigenvalues of finite multiplicity diverging to infinity and C(u) is a positive gradient operator of odd order. A minimum principle for one of the solutions is given with corresponding existence theorems. It is shown by example that in certain λ-intervals this variational solution may coincide with eigenfunctions positive in G. Sufficient conditions to guaranty this case are given under additional hypothesis for B and C. Our results generalize and extend an earlier work of M. Berger.

R. BÖHME: Nichtlineare Störung der isolierten Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren

Es wurde eine Verallgemeinerung einer Behauptung von M.S. Berger bewiesen.

Ist L ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H und λ_0 ein isolierter Eigenwert von L von der Vielfachheit $m < \infty$, sind φ_1 und φ_2 nichtlineare Operatoren vom Variationstyp in H, die auf einem geeigneten Teilraum $\hat{H}$ von H definiert sind, dann gibt es unter weiteren Bedingungen an φ_1 und φ_2 mindestens 2 normierte Lösungen $\{u,\lambda\}$ in $H \times \mathbb{R}$ für das nichtlineare Eigenwertproblem

$$Lu + \varphi_1(u) = \lambda(u+\varphi_2(u)),$$

wobei λ nahe λ_0 ist, wenn die Normierung für u klein ist.

Sind φ_1 und φ_2 ungerade, so ist die Anzahl der Lösungen mindestens 2m.

M. BRELOT: Über die Erweiterung in harmonischen Raümen der Besonderheiten der klassischen Potentialtheorie in der Ebene

In der Ebene gibt es keine Greensche Funktion, keine superharmonische Funktion, die nicht konstant und ≥ 0 ist. Der logarithmische Kern ist nicht > 0 .

Diese Unterschiede zur Theorie im $\mathbb{R}^3$ haben Ähnlichkeiten in der axiomatischen Theorie, wenn es keine positive Potentialfunktion gibt.

G. CIMMINO: <u>Zum Eindeutigkeitsbeweis der Lösungen bei Dirichletproblemen</u>

Für die Lösungen u(x) einer linearen, elliptischen, partiellen Differentialgleichung der Ordnung 2m in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, werden beim Dirichletproblem etwas verallgemeinerte Randbedingungen in Betracht gezogen: die der Funktion u(x) und ihren m-1 ersten Normalableitungen vorgeschriebenen Randwerte sollen nämlich im Sinne der mittleren Konvergenz angenommen werden, und sie können alsdann durch beliebige quadratsummierbare Funktionen ausgedrückt werden. Die Existenz der Lösung dieses verallgemeinerten Dirichletproblems ist in einfachen Sonderfällen leicht zu bestätigen. Der Eindeutigkeitsbeweis im Falle der Gleichungen zweiter Ordnung folgt aus einer für die Lösungen der homogenen Gleichung geltenden Monotonieeigenschaft von L^2-Normen auf Mannigfaltigkeiten, die sich an den Rand annähern; es wird gezeigt, daß eine analoge Schlußweise auch im Falle der Gleichungen höherer Ordnung benutzt werden kann.

H.O. CORDES: <u>Grenzpunktfall bei Potenzen elliptischer Differentialoperatoren</u>

<u>Satz 1</u> Alle Potenzen des Beltrami-Laplace-Operators auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit sind im Raum $C_0^{\infty}(\Omega)$ als unbeschränkte Operatoren von $G = L^2(\Omega, do)$ (do = Oberflächenmaß) wesentlich selbstadjungiert (d.h. es herrscht der "Grenzpunktfall".)

<u>Satz 2</u> Für den Ausdruck $H = -\Delta + q$, $q \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$ gebe es eine lokal Lipschitzstetige Funktion $\sigma(x)$ (nichtnegativ), d.d. (i) $\sigma(x^0) = 0$ für ein festes x^0, (ii) $\lim_{x\to\infty} \sigma(x) = \infty$, (iii) $|\nabla\sigma| = \{g^{ik}\sigma_{x_i}\sigma_{x_k}\}^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{q}$, (iv) $|\nabla\sigma| \leqq c e^{\gamma\sigma}$, $c, \gamma > 0$.

<u>Behauptung:</u> Es gibt $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \ldots\ldots$ derart daß (i)-(iv) (mit $\gamma_j = \gamma_m$) den Grenzpunktfall für $(-\Delta+q)^j$, $j = 1,\ldots,m$, nach sich zieht.

Bemerkungen: 1) Satz 1 für m=1 stammt von Goffney und Roelcke. 2) Ähnliche Überlegungen für Potenzen von Operatoren auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$ wurden von H. Triebel angestellt. 3) Ein beliebiger selbstadjungierter elliptischer Ausdruck zweiter Ordnung mit reellen und glatten Koeffizienten kann durch Einführung geeigneter Metrik und passende Transformation der abh. Veränderlichen stets auf die Form $-\Delta + q$ gebracht werden.

J. DUFNER: Zulässige Randbedingungen für Systeme linearer partieller DGLn 2.Ordnung vom elliptisch-parabol. Typ

Betrachtetes System: (S) $Lu = -\alpha^{ij}\partial_i\partial_j u + \beta^i\partial_i u + \gamma u = \varphi$ in Ω, $\dim\Omega = n$, $i,j = 1,\dots,n$, wobei $\alpha^{ij} = \alpha^{ji} = (\alpha^{ij})'$, $\beta^i = (\beta^i)'$ und γ glatte pxp-Matrizen, φ glatte p-vektorwertige Funktion und $\alpha^{ij}_{k\ell}\, x^k_i\, x^\ell_i \geq 0$ in Ω ($x^k_i \in R$, bel.), $\gamma + \gamma' - \beta^i_{x_i} - \alpha^{ij}_{x_i x_j} > 0$ in $\overline{\Omega}$. Es wird die Notwendigkeit eines gesonderten Zulässigkeitsbegriffs für Randbedingungen für die Lösungen von (S) gezeigt - trotz Transformationsmöglichkeit von (S) in ein Friedrichssches "positives" System 1.Ordnung. - Die Formulierung "zulässiger" (differentieller) Randbedingungen für (S) geschieht mit Hilfe vorgegebener pxp-Matrizen $A^1,\dots,A^n$ mit $A^i n_i = 0$ ($(n_1,\dots n_n)$ = äuß.Normale) und mittels Aufspaltungen von $Q := \alpha^{ij} n_i n_j$ und $\tilde{b} = (\beta^i + \alpha^{ij}_{x_j}) n_i + \tilde{A}$ ($\tilde{A}$=Fkt.(A^j)), so daß gewisse algebraische Beziehungen erfüllt sind. - Sätze: Eindeutigkeit glatter Lösungen, Existenz schwacher Lösungen, klassische Randwertannahme glatter schwacher Lösungen, Existenz glatter Lösungen in Sonderfällen ("Lösung"=Lösung des RWP's (S) mit Mu=o, Mu=o zulässige Randbedingung). - Genaue Struktur zulässiger Randbedingungen in Fällen p = 1,2.

M.S.P. EASTHAM: The Periodic Schrödinger Equation

The Schrödinger equation

$$\Delta\psi(x) + \{\lambda - q(x)\}\psi(x) = 0$$

in N dimensions, where q(x) is periodic, arises in solid state physics in the theory of crystals. When N=1 there is a considerable mathematical theory but almost none when N > 1. In this lecture, a start is made on the theory for N > 1. The equality of the stability set and the spectrum is proved and the existence of the stability intervals is established.

G. FICHERA: A Dirichlet Problem for a Hyperbolic Equation

A Dirchlet problem for the wave equation in two independent variables is studied. A special boundary is considered such that the Dirichlet problem for this boundary can be conceived as a limiting case of the classical Goursat problem for the wave equation. An existence and uniqueness theorem is proved and the singularities of the solution are investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence of a smooth solution are given.

H. FLORIAN: Differential- und Integraloperatoren bei partiellen Differentialgleichungen, Teil II

Vortragsauszug hinter dem Vortrag von K.W. Bauer.

J. FREHSE: Zum Regularitätsproblem bei nichtlinearen elliptischen Systemen und Gleichungen höherer Ordnung.

Der erste Teil des Vortrages befaßt sich mit elliptischen Systemen nichtlinearer EulerscherDifferentialgleichungen, die aus Variationsproblemen vom Typ $\int F(x,u,\nabla u)dx = \min$, $x \in R^n$, $u(x) \in R^s$, n,s beliebig, ganz, stammen (allgemeiner: Systeme in Divergenzform).

Unter der Voraussetzung, daß die j-ten partiellen Ableitungen von F für $j = 2,\ldots, l+1$, gleichmäßig beschränkt sind und $n \leq 21$ ist, wird gezeigt, daß das elliptische System eine (eindeutige) im Sobolevraum H^{l+1} und damit in $C^{1+\alpha}$ liegende Lösung besitzt (zunächst bei periodischen Randbedingungen und genügend kleinem Grundgebiet). Damit ist gezeigt, daß auch für elliptische Systeme in mehr als 2 Dimensionen eine Regularitätstheorie möglich ist, wenn die Koeffizienten des Systems genügend gutartig sind. (Das Gegenbeispiel von Giusti und Miranda verletzt die getroffenen Voraussetzungen).

Der zweite Teil des Vortrages befaßt sich mit der allgemeinen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung der Ordnung 2m in Divergenzform. Unter Wachstums- und Koerzitivitätsvoraussetzungen wird gezeigt, daß jede im Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, liegende schwache Lsg. u stetig ist, wenn mp=n ist. Die Bedingung mp=n kann nicht verbessert werden.

Damit ist ein füheres Resultat des Verfassers, das nur die Beschränktheit von u behauptet, verfeinert worden. (Herrn Widman aus Uppsala gelang es inzwischen, sogar die Hölderstetigkeit der Lösungen und weitere Resultate zu beweisen.)

W. HAACK: Lineare hyperbolische Systeme mit parabolischer Anfangskurve

Ein lineares System von 2 partiellen Differentialgleichungen für 2 Funktionen u, v in 2 Variablen läßt sich im allgemeinen auf die Form bringen

$$\frac{1}{\varrho} U_x - V_y = c_1 U + c_2 V + c_3 \; ; \; \varrho D U_y + V_x = \bar{c}_1 U + \bar{c}_2 V + \bar{c}_3 \; .$$

U, V sind Linearkombinationen von u, v. Für $D = y^\nu \cdot \hat{D}$, $(\hat{D} \neq 0)$, $0 < \nu < 2$ ist die x-Achse $(y = 0)$ parabolische Kurve mit "Hüllfall" (1). Es wird gezeigt:

Für $0 < \nu < 1$ hat das Cauchy-Problem mit den Vorgaben $U(x,0)$, $V(x,0)$ εC^1 genau eine schwache Lösung. Für $1 \leqq \nu < 2$ ist allein durch Vorgabe von $U(x,0) \varepsilon C^1$ und einer Norm für $V(x,0)$ eine schwache Lösung bestimmt; sie existiert, wenn in einem Streifen $0 \leqq y \leqq \delta \neq 0$ die Bedingungen $|\bar{c}_1|$; $|\bar{c}_2|$ $\leqq$ konst$\cdot y^\lambda$ mit $\lambda > \nu - 1$ erfüllt sind (2).

(1) Haack-Wendland, Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen, Kap. 15

(2) Haack, Kolloquium über Analysis, Jyväskylä 1970 (Springer)

E. HEINZ: Instabile Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Es sei Γ eine geschlossene, rektifizierbare Jordankurve im $\mathbb{R}^3$, die einer Sehnen-Bogenbedingung genügt, und $\gamma(\Gamma)$ sei die Menge aller Vektorfunktionen $x = x(w)$ $(w = u+iv)$ der Klasse $C^1(B) \cap C^0(\bar{B})$ $(B = \{|w| < 1\})$ mit $|x(w)| \leqq 1$ und endlichem Dirichlet-Integral, die ∂B schwachmonoton auf Γ abbilden. Es wird gezeigt: Wenn x_1 und x_2 zwei isolierte Minima des Funktionals

$$E(x) = \iint\limits_B (x_u^2 + x_v^2 + \frac{4H}{3}(x, x_u, x_v))\,du\,dv$$

im Sinne der Metrik $|x_1 - x_2| = \max_{\bar{B}} |x_1(w) - x_2(w)|$ sind und $|H| < \frac{1}{2}$ gilt, dann gibt es eine instabile Fläche $x^* = x^*(w) \varepsilon \gamma(\Gamma)$ konstanter mittlerer Krümmung H, die von Γ berandet wird, d.h. $x^* \varepsilon \gamma(\Gamma)$ löst die Differentialgleichungen $\Delta x^* = 2H(x_u^* \wedge x_v^*)$, ${x_u^*}^2 = {x_v^*}^2$, $x_u^* x_v^* = 0$, und die Abbildung $x^* : \partial B \to \Gamma$ ist topologisch.

St. HILDEBRANDT: <u>Neue Existenz- und Regularitätssätze für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung</u>

Sei $B = \{ w = u+iv : |w| < 1 \}$, E^3 = 3-dim. euklid. Raum, Γ eine geschlossene Jordankurve in E^3, H eine reellwertige Funktion der Klasse $C^{0+\alpha}(E^3)$, $0 < \alpha < 1$. Dann betrachte man die folgende allgemeine Fassung des Plateauschen Problems:

Bestimme eine Fläche $x: \bar{B} \to E^3$ von der Klasse $C^0(\bar{B}) \cap C^{2+\alpha}(B)$, die "von Γ berandet wird", d.h. die ∂B monoton (topologisch) auf Γ abbildet und in B den Gleichungen

$$\Delta x = 2H(x) x_u \wedge x_v$$

$$|x_u| = |x_v| \quad , \quad x_u \cdot x_v = 0$$

genügt. Solche Abbildungen x sind Flächen der mittleren Krümmung $H(x)$ in x mit Ausnahme der Verzweigungspunkte w, in denen $|\nabla x(w)|$ verschwindet. Diese liegen aber isoliert in B. Es wurde eine Reihe von Existenz- und Regularitätssätzen für das obige Problem angegeben und deren Beweis skizziert.

F. HOPPENSTEADT: <u>Cauchy Problems with small Parameters: Inner and outer Solutions</u>

Consider the problem

$$\varepsilon du/dt = F(t,u,\varepsilon) \quad , \qquad u|_{t=0} = u^0(\varepsilon) \quad ,$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, u is an element of some Banach space E, F is a (possibly unbounded) mapping of E and t is a real variable. The dependence on the parameter ε of solutions of this problem is studied with the conditions that (i) The reduced problem, $0 = F(t,u,0)$, has a solution, $u = u_o(t)$, on some interval $0 \leqq t \leqq T$; and (ii) The operator $F_u(t,u_o(t),0)$ is invertible in some sense. Applications of these general remarks are made to nonlinear parabolic equations.

E. JÖRGENS: Das Spektrum der N-Teilchen-Schrödinger-Operatoren I

I. Es werden Schrödingeroperatoren S für N-Teilchen-Systeme im freien Raum und im Feld betrachtet. Über die Operatoren, die die Wirkung des Feldes bzw. der Wechselwirkungen beschreiben, wird nur vorausgesetzt, daß sie Δ-kompakt sind, wobei Δ der Laplace-Operator bezüglich der Variablen ist, auf die der jeweilige Operator "wirkt". Es werden n-Körperkräfte ($n \leqq N$) und nicht-lokale Wechselwirkungen zugelassen. Außerdem wird die Symmetrie des Operators bezüglich der Permutation identischer Teilchen berücksichtigt; ist D eine irreduzible unitäre Darstellung dieser Gruppe von Permutationen, so wird dieser ein Teilraum H_D des Hilbertraums zugeordnet, der S reduziert.

J. WEIDMANN: Das Spektrum der N-Teilchen-Schrödinger-Operatoren II

II. Es wird das wesentliche Spektrum der Einschränkung S_D von S auf diesen Teilraum H_D bestimmt. Für jedes D ist das wesentliche Spektrum von S_D eine Halbgerade $[\mu_D, \infty)$. μ_D kann mit Hilfe der unteren Grenzen von (ebenfalls auf geeignete Teilräume eingeschränkten) Schrödingeroperatoren für Teilsysteme angegeben werden. Im Fall eines freien Systems (d.h. ohne äußeres Feld) betreffen diese Aussagen den durch Separation der Schwerpunktsbewegung entstehenden "internen" Operator. Diese Resultate sind Verallgemeinerungen früherer Resultate von M.G. Žislin; gleichzeitig wird der Beweis wesentlich verkürzt.

F. JOHN: Wie werden gespannte Platten zu Membranen?

Die Lösungen der Plattengleichung

$$(h^2\Delta^2 - M)w = 0 \ , \quad M = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

(h = Plattendicke, a_{ik} = Spannungskomponenten) werden mit Lösungen der Membrangleichung $Mu = 0$ verglichen. Wichtig ist dabei, daß die Matrix der a_{ik} positiv definit ist (d.h. die Hauptspannungen positiv sind). Sei $||w|| = \sup |w|$ im Definitionsbereich D von w. Für geeignete Lösungen u von $Mu = 0$ gilt dann $|w-u| = O(h^2 r^{-2}||w||)$ in Punkten mit Abstand > r vom Rand von D. Dabei kann im allgemeinen u nicht dieselben Randwerte wie w haben. Beweise für konstante a_{ik} durch Konstruktion einer geeigneten Fundamentallösung. Für variable a_{ik} werden Energieintegrale benutzt.

H. **KALF**: <u>Über die Selbstadjungiertheit halbbeschränkter gewöhnlicher oder elliptischer Differentialoperatoren mit stark singulärem Potential</u>

Vorgegeben: (1) $Du(x) := -\Delta_n u(x) + q(x)u(x)$ mit $q(x) \geq \frac{\beta}{|x|^2}$ in $R_n^+ := R_n - \{0\}$.

$(q \in Q_{\alpha,loc}(R_n^+),\ n \geq 3$; leichte Modifikationen für $n = 1,2)$

Mit Hilfe einer Ungleichung von Hardy kann man zeigen, daß der (1) zugeordnete "minimale" Operator T_0 in $C_0^\infty(R_n^+)$ für $\beta \geq -(\frac{n-2}{2})^2$ halbbeschränkt nach unten ist. Ohne Benutzung der Theorie der Sesquilinearformen im Hilbertraum läßt sich nun zeigen, daß seine Friedrichs-Fortsetzung durch $D(T_F) = \{u | u \in H^2_{loc}(R_n^+) \cap L^2(R_n);\ \nabla u, Du \in L^2(R_n)\}$ explizit charakterisiert werden kann. Bislang wurde (Friedrichs, Math.Ann.109, 1933/34; Kato, Perturbation Theory) stets zusätzlich $\int_{R_n} q^+|u|^2 dx < \infty$ $(q^+ := \frac{|q|+q}{2})$ gefordert. Die Existenz dieses Integrals läßt sich aber aus den übrigen Voraussetzungen bereits folgern.

Die Hardysche Ungleichung erlaubt in Verbindung mit einem Kriterium von J.Walter (Math.Scand.25,1969) den Nachweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit von T_0 für $\beta > 1-(\frac{n-2}{2})^2$ (Jörgens, Math.Scand.15,1964: $\beta > 1$). Die Konstante $1 - (\frac{n-2}{2})^2$ ist bestmöglich. Die Methode läßt sich auf allgemeine elliptische Differentialoperatoren 2.Ordnung ausdehnen.

Für den Fall des eindimensionalen Sturm-Liouville-Operators liefert sie ein neues Kriterium für das Vorliegen des Grenzpunktfalls bei x=o:

$$\int_0^x \sqrt{\frac{k}{p}}\,dt < \infty \qquad \liminf_{x\to 0+} \left\{ \left(\int_0^x \sqrt{\frac{k}{p}}\,dt\right)^2 \left[q+\frac{1}{4ph_\gamma^2}\right] \right\} > 1 ,$$

Welches im Gegensatz zu den von Sears (ILMS 24,1949)

$$\int_0^x \sqrt{\frac{k}{p}}\,dt < \infty \qquad \liminf_{x\to 0+} \left\{ \left(\int_0^x \sqrt{\frac{k}{p}}\,dt\right)^2 \left[q-\frac{(p\varphi')'}{\varphi}\right] \right\} > \frac{3}{4}$$

($h_\gamma(x) := \left| \int_\gamma^x \frac{dt}{p} \right|$, γ geeignet; $\varphi := (kp)^{-\frac{1}{4}}$) die Existenz 2.Ableitungen von kp nicht benötigt.

J. LERAY: Lineares Cauchysches Problem für analytische Anfangsdaten mit polaren Singularitäten

Das Problem kann leicht auf den Fall reduziert werden, bei dem das zweite Glied 0 ist. Dann verzweigt sich seine Lösung auf den Charakteristiken, die die Singularitäten der Cauchyschen Anfangsdaten enthalten; diese Verzweigungen können mit den elementaren Funktionen $z \to z^\alpha$ $(\alpha\varepsilon C)$ und $z \to z^\beta \log z$ $(\beta\varepsilon \mathbb{N})$ beschrieben werden. Diesen Satz hat Hamada (Public.of Res.Inst.Math.Sc.Kyoto Univ.1969) mit schwierigen Sätzen von Mizohata (J.Math.Kyoto Univ.1962) bewiesen. Ein leichterer Beweis ist aber möglich; er ist auf neue Eigenschaften der Majoranten begründet; er wird bald von C.Wagschal veröffentlicht werden.

Andere Singularitäten können dann ebenfalls behandelt werden.

O. LIESS: Über das Cauchyproblem für L.P.D.O mit konstanten Koeffizienten

Es sei $P(D)\colon C^\infty(R^n) \to C^\infty(R^n)$ ein linearer P.D.O. m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in n Veränderlichen $(x_1,\ldots,x_n)$, wobei x_n nichtcharakteristisch für P(D) ist. Es sei noch $d_0\colon C^\infty(R^n) \to C^\infty(R^{n-1})$ der Operator $d_0 f = f|_{x_n=0}$. Wir betrachten das Cauchyproblem

$$P(D)u = 0,\; d_0\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^s u = \varphi_s,\; s = 0\ldots,m-1,\; \text{für } \varphi_s\varepsilon C^\infty(R^{n-1}),\; u\varepsilon C^\infty(R^n).$$

Dies Problem ist trivialerweise nur dann lösbar, wenn $\varphi_s \in \left\{ d_o\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^s \ker P \right\}$.

Umgekehrt gilt folgender Satz:

Satz: Die Bedingungen $\varphi_s \in \left\{ d_o\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^s \ker P \right\}$ sind notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Chauchyproblems genau dann, wenn für das dem Operatoren $P(0)$ zugeordnete Polynom $P(\xi)$ ($\xi \sim -i \frac{\partial}{\partial x}$) die folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt eine von $\xi \in \mathbb{C}^{n-1}$ unabhängige Konstante C, so daß für beliebige zwei Wurzeln $z_1(\xi') \neq 0$, $z_2(\xi') \neq 0$ des Polynoms $z \to P(\xi', z)$

$$|\mathrm{Im}\, z_1(\xi')| \leq c\, |\mathrm{Im}\, z_2(\xi')| + |\mathrm{Im}\, \xi'| + \ln(2 + |\xi'|)$$

gilt.

Ein ähnlicher Satz wird für das nichthomogene Cauchyproblem angegeben.

C. MIRANDA: Sur un probleme de geometrie differentielle pour une surface close et convexe

Ou donne des théorémes d'existence et d'unicité pour une surface close et convexe verifiant une équation elliptique de la forme

$$F(r_1+r_2,\ r_1 r_2, \xi) = g(\xi)$$

ou r_1 et r_2 sont les rayons de courbure prinipaux de la surface et ξ est sa normale.

C.S. MORAWETZ: Scattering and Decay for the Nonlinear Klein Gordon Equation

According to a theorem of Jörgens, the non-linear Klein-Gordon equation $\square u + mu + \alpha u^3 = 0$ has a unique solution for prescribed Cauchy data at $t = 0$. If these data admit a bounded solution for the linear equation ($\alpha = 0$) and have compact support it can be shown that the solution for the nonlinear problem approaches a solution of the linear problem as $t \to \infty$. The convergence is in the energy norm. This confirms a conjecture of I.Segal. (Joint work with W.Strauss.)

J.C.C. Nitsche: Minimalflächen mit beweglichen Rändern

Eine verallgemeinerte Version des Plateauschen Problems lautet wie folgt: "Man bestimme eine Fläche kleinsten Inhalts und vorgeschriebenen topologischen Typs, die von einem aus festen Kurven, stützenden Flächen und beweglichen Rändern vorgeschriebener Länge bestehenden Rahmen berandet ist." Über das Verhalten der Lösungsfläche auf den beweglichen Randteilen ist noch recht wenig bekannt. Verschiedene Beispiele illustrieren die Besonderheiten und Schwierigkeiten des Problems beweglicher Ränder, welches mit dem isoperimetrischen Problem auf Flächen zusammenhängt, aber komplizierter ist. Im vorliegenden Vortrag, der Auszüge einer längeren Untersuchung gab, wurde folgendes bewiesen: "Die beweglichen Teile des Randes sind differentialgeometrische Kurven der Klasse C^2 konstanter Raumkrümmung. Auf der Lösungsfläche selbst sind sie Asymptotenlinien konstanter geodätischer Krümmung."

I. SEGAL: Classical and quantized nonlinear relativistic equations

The present status of the classical theory is described, as regards: existence, unicity, regularity; temporal decay and scattering theory; relation to the theory of symplectic manifolds.

The mathematical formulation of the quantized theory is indicated, and the status of the existence theory in a two-dimensional space-time (for scalar equations) is described.

C.G. SIMADER: Zum Dirichletproblem für nichtelliptische Differentialgleichungen

Sei $L := \sum\limits_{|s| \leq r} a_s D^s$ $(s=(s_1,\ldots,s_n))$ ein Differentialoperator der Ordnung $r \in \mathbb{N}$ mit konstanten Koeffizienten $a_s \in \mathbb{C}$. Sei $G \subset R^n$ offen, $f \in L_2(G)$ und $t \in \mathbb{N}$. Unter einer schwachen Lösung des Problems "$Lu = f$" mit homogenen Dirichletdaten der Ordnung t versteht man ein $u \in H_0^t(G)$ mit $(u, L'\phi)_0 = (f,\phi)_0$ $\forall \phi \in C_0^\infty(G)$, wobei $L' := \sum\limits_{|s| \leq r} \bar{a}_s (-1)^{|s|} D^s$.

P.Hess, der dieses Problem eingehend studierte, (Dissertation ETH Zürich, Ann.Acad.Sci.Fennicae AI 434, 1969), betrachtete auch eine Ungleichung der Form $(*) \mathrm{Re}(L\phi,\phi)_0 \geqq c_1\|\phi\|_t^2 - c_2\|\phi\|_0^2 \ \forall \phi\in C_0^\infty(G)$, $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$. Wir konnten zeigen, daß dann notwendig $r \geqq 2t$ gilt und hinreichend die Existenz eines $E > 0$ und $R \geqq 0$ ist, so daß für alle $\xi \in R^n$ mit $|\xi| \geqq R$ gilt: $(**)$ $\mathrm{Re} \sum\limits_{2t\leqq|\ \ |\leqq r} a_s(-i\ \ )^s \geqq E|\ \ |^{2t}$.

Mit $(*)$ läßt sich sehr einfach die Existenzfrage lösen, falls G beschränkt. Bislang ungeklärt ist die Frage nach der Regularität der schwachen Lösungen, zumal Operatoren, welche $(**)$ erfüllen, nicht hypoelliptisch zu sein brauchen. Jedoch gilt für das analog formulierte Problem für periodische Lösungen, daß aus $f\in H_\pi^k$, $u\in H_\pi^t$ und u schwache Lösung folgt: $u\in H_\pi^{2t+k}$, falls nur $(*)$ erfüllt ist.

K. STEFFEN: <u>Neue Lösungen des Plateau-Problems für Flächen konstanter mittlerer Krümmung</u>

Wir suchen Flächen konstanter mittlerer Krümmung H im R^3, die von einer rektifizierbaren Joradankurve Γ berandet werden, d.h. Lösungen des Plateau-Problems

$$x\in C^0(\bar{B},\mathbb{R}^3)\cap C^2(B,\mathbb{R}^3),\ B:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+v^2<1\right\};$$

$$(*_H)\qquad \Delta x = 2Hx_u\times x_v\ ,\ x_u^2 = x_v^2,\ x_u\cdot x_v = 0 \text{ in } B\ ;$$

$$x|_{\partial B} : \partial B \to \Gamma \text{ topologisch.}$$

H.C. Wente definierte eine Fortsetzung des Volumenfunktionals $V(x): = \frac{1}{3}\int\limits_B x\cdot(x_u\times x_v)du\,dv$ von $C^0(\bar{B},\mathbb{R}^3)\cap H_1^2(B,\mathbb{R}^3)$ auf die Klasse $\mathcal{J}(\Gamma)$ aller Flächen x des Sobolevraumes $H_1^2(B,\mathbb{R}^3)$ mit stetiger, schwach monotoner Randabb. $x|_{\partial B}: \partial B\to\Gamma$ und zeigte (erscheint in Math.Z., 1971), daß Lösungen des Variationsproblems

$$(**_k)\qquad \mathfrak{D}(x): = \int\limits_B(x_u^2 + x_v^2)du\,dv \rightharpoonup \text{Min. auf } \left\{x\in\mathcal{J}(\Gamma):V(x) = K\right\}$$

auch das Plateau-Problem $(*_H)$ für ein geeignetes $H\in\mathbb{R}$ lösen. Wir untersuchen die Abhängigkeit der Lösungen zu $(**_K)$ von K und erhalten folgende Ergebnisse für $d(K): = \inf\left\{D(x):x\in\mathcal{J}(\Gamma),\ V(x) = K\right\}$ und

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\mathcal{H}(K) := \left\{ H \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathcal{F}(\Gamma) \text{ mit } V(x) = K,\ D(x) = d(K),\ x \text{ löst } (*_H) \right\}$:

<u>Satz:</u> (i) d ist lokal lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$.

(ii) $d(K) \sim 2\sqrt[3]{36\pi}\,|K|^{2/3}$ bei $|K| \to \infty$ und $d \nearrow$ für $K \geq K_+(\Gamma)$, $d \searrow$ für $K \leq K_-(\Gamma)$

(iii) $\liminf\limits_{L \nearrow K} \frac{d(L)-d(K)}{L-K} \geq -4 \inf \mathcal{H}(K) \geq -4 \sup \mathcal{H}(K) \geq \limsup\limits_{L \searrow K} \frac{d(L)-d(K)}{L-K}$

(IV) Für fast alle $K \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{H}(K) = \left\{ -\frac{1}{4} d'(K) \right\}$ einwertig. $\mathcal{H}$ ist beschränkt und Graph $\mathcal{H}$ abgeschlossen, $\mathcal{H}$ ist fast überall auf $\mathbb{R}$ stetig.

(v) $\mathcal{H}(K) \sim -\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3K}}$ bei $|K| \to \infty$, $o \notin \mathcal{H}(K)$ für hinreichend große $|K|$.

<u>Korollar:</u> Für unendlich viele $H>o$ und $H<o$ hat $(*_H)$ mindestens zwei Lösungen.

F. STUMMEL: <u>Störungstheorie der Rand- und Eigenwertaufgaben partieller Differentialgleichungen</u>

Der Vortrag gibt einen Überblick über eine neue Störungstheorie der Rand- und Eigenwertaufgaben partieller Differentialgleichungen. Betrachtet werden dabei nicht nur Störungen der Koeffizienten und inhomogenen Terme der Differentialgleichungen, sondern auch sehr allgemeine Störungen des Grundgebietes und des Randes. Unter sehr schwachen Voraussetzungen über die Konvergenz der Koeffizienten und Grundgebiete erhält man die starke und schwache Konvergenz der Lösungen inhomogener Gleichungen. Für Eigenwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit diskretem Spektrum wird die Konvergenz der Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit nach und der zugehörigen algebraischen Eigenräume gezeigt. Die Ergebnisse dieser Störungstheorie gehen wesentlich über die bisher bekannten Resultate hinaus. Grundlegendes Hilfsmittel ist dabei eine neue funktionalanalytische Theorie der sogenannten diskreten Konvergenz linearer Operatoren (s.F.STUMMEL, Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I: Math.Ann.,190, 45-92,1970.II. Erscheint in Math.Z.III: Erscheint demnächst)

F. TOMI: Minimalflächen, die über Hindernisse gespannt werden

Gegeben sei eine nichtleere, echte Teilmenge M des $\mathbb{R}^3$ und eine in M gelegene Jordankurve Γ. Es wird dann nach der Existenz einer Fläche gefragt, welche kleinsten Flächeninhalt besitzt unter allen in M enthaltenen Flächen, die außerdem von Γ berandet werden. Für abgeschlossenes M wird die Existenz einer solchen Minimalfläche im Sobolevraum H_2^1 gezeigt. Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit wird man auf eine nichtlineare Variationsungleichung geführt, für deren Lösungen man einen Regalaritätssatz zeigen kann. Es ergibt sich: Falls ∂M zu C^3 gehört, so gehört die Minimalfläche zu $C^{1+\alpha}$.

W. von WAHL: Zeitlicher Abfall der Lösungen homogener Wellengleichungen

In der Streutheorie der nichtlinearen Klein-Cordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + mu = F(x,t,u), \quad m \geq 0 ,$$

im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ wird die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Lösungen für $t \to \pm \infty$ gestellt. Bei diesem Problem spielt das asymptotische Verhalten der Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + mu = 0 ,$$

d.h. der Operatoren $\cos(-\Delta + m)^{1/2} t$, $\sin(-\Delta + m)^{1/2} t . (-\Delta + m)^{-1/2}$ eine wichtige Rolle. Mit Hilfe der klassischen Darstellungsformeln, wie sie etwa im Buch von Courant und Hilbert zu finden sind, wird als Beispiel der benötigten Abschätzungen der Beweis der folgenden Ungleichung skizziert (n=3):

$$||\sin(-\Delta + m)^{1/2} t (-\Delta + m)^{-1/2} \varphi||_{C^0(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\text{const}}{t} \left\{ ||\nabla \varphi||_{L^1(\mathbb{R}^3)} + ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^3)} \right\},$$

$$t > 0, \; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) .$$

W. WALTER: Existenz- und Konvergenzsätze für die Grenzschicht-Differentialgleichung aufgrund der Linienmethode

Die (longitudinale) Linienmethode zur Lösung parabolischer Differentialgleichungen besteht darin, die räumlichen Variablen, nicht jedoch die zeitliche Variable, zu diskretisieren. Ein parabolisches Anfangs-Randwertproblem geht dabei über in ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Unter Benutzung der Theorie der (gewöhnlichen) Differentialgleichungen lassen sich Konvergenz- und Existenzsätze für allgemeine nichtlineare parabolische Probleme auf diesem Weg beweisen.

Im Vortrag wird eine Existenztheorie für die zweidimensionalen, stationären Grenzschicht-Gleichungen auf dieser Grundlage entwickelt. Die v.Mises-Transformation wird benutzt.

S. WEBER: Allgemeine elliptische Randwertprobleme: Eindeutigkeitssatz und Spektrum-Eingrenzung

Behandelt werden elliptische Randwertprobleme $(P-\lambda Q)u=F \;:\Longleftrightarrow$ $\left\{(p-\lambda q)u=f\right.$ in beschränktem Gebiet $G\subset\mathbb{R}_n, (p_j-\lambda q_j)u=f_j \;/_{j=1}^{m}$ auf dem Rand $\left.\partial G\right\}$. Voraussetzungen: ∂G ist C^∞-regulär. p, q, p_j, q_j sind partielle Differentialoperatoren der Ordnung $2m, r<2m, m_j<2m, r_j<m$ mit Koeffizienten aus $C^0(\bar G)$, $C^1(\bar G), C^{2m-m_j}(\partial G), C^{2m-m_j+1}(\partial G)$. p ist in G gleichmäßig und eigentlich (properly) elliptisch. $\{p_j\}$ überdeckt (cover) p. Für die stetige Abbildung $P-\lambda Q : H^{2m}(G) \to L_2(G) \times \bigtimes_{j=1}^{m} H^{2m-m_j-1/2}(\partial G)$, wobei die H-Räume starke Sobolev-Räume sind, kann gezeigt werden

Satz 1: A-priori-Abschätzungen für $u\in H^{2m}(G)$.

Satz 2: $\lambda\in\mathbb{C}$ ist Resolventen- oder Eigenwert. Das Spektrum ist eine höchstens abzählbare Menge ohne endlichen Häufungspunkt, $\dim \mathcal{N}(P-\lambda Q)<\infty$.

Satz 3: hat der nicht-selbstadjungierte Teil von p eine Ordnung $k<2m$ und gelten gewisse Definitheits-, Kommutativitäts- und Beschränktheitsbedingungen, so liegt das Spektrum innerhalb einer Parabel vom Grade $\frac{k}{2m}$ um eine Hälfte der Realteil-Achse.

J. WEIDMANN: Das Spektrum der N-Teilchen-Schrödinger-Operatoren II

Vortragsauszug hinter dem Vortrag von K. Jörgens

P. WERNER: Grundzüge der Spektraltheorie der Maxwelloperatoren und Anwendungen auf das asymptotische Verhalten von Lösungen der zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen

Im Anschluß an Arbeiten von Eidus (1962) und Shenk (1966) über den skalaren Laplaceoperator Δ werden die Grundzüge der Spektraltheorie für den vektoriellen Δ-Operator in Außenräumen mit elektrischen Randbedingungen $n \times E = 0$, $\nabla \cdot E = 0$ oder magnetischen Randbedingungen $n \times (\nabla \times H) = 0$, $n \cdot H = 0$ entwickelt. Insbesondere wird in beiden Fällen ein geeigneter selbstadjungierter Erweiterungsoperator konstruiert. Mit Hilfe des Prinzips der Grenzabsorption wird ein Zusammenhang zwischen der Spektralschar und den Ausstrahlungslösungen des Randwertproblems der vollständigen Reflexien für die zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen angegeben. Im Gegensatz zum skalaren Fall enthält das Spektrum einen Eigenwert $\lambda = 0$, und zwar mit der Vielfachheit n im elektrischen Fall und der Vielfachheit p im magnetischen Fall, wobei n die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten $F_1, \ldots F_n$ der Randfläche, p das topologische Geschlecht von $F_1 + \ldots + F_n$ bedeutet. Als Anwendung ergeben sich Darstellungen für die Lösung des Rand- und Anfangswertproblems für die zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen, die eine Diskussion des asymptotischen Verhaltens für $t \to \infty$ ermöglichen. Insbesondere lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für das Abklingen der Lösung und für die Gültigkeit des Prinzips der Grenzamplitude angeben.

K.-O. WIDMAN: Lokale Schranken für Lösungen einer Klasse elliptischer Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung

Schwache Lösungen von Gleichungen der Form

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\sum_{|\alpha|\leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\alpha}(x, D^m u) = 0$$

werden untersucht. Die F_{α} erfüllen

$$|\xi|^p \leqq \sum_{|\alpha|=m} F_{\alpha}(x,\xi)\xi^{\alpha}$$

und

$$|F_{\alpha}| \leqq c|\xi|^{p-1}, \qquad |\alpha| \leqq m$$

mit $p > 1$. Von den Lösungen nimmt man an, daß sie im Raum $W^{m,p}$ liegen. Es wird dann gezeigt, daß im Fall $p = n/m$, wo n die Dimension des vorliegenden Raumes ist, die Lösungen nicht nur beschränkt sind, sondern auch einer Ungleichung der Form

$$|u(x)|^p \leqq K\varrho^{-n} \int_{|x-y|\leqq \varrho} |u(y)|^p dy$$

genügen.

C.H. WILCOX: A coerciveness Inequality for a Class of Nonelliptic Operators and its Applications

The lecture deals with operators of the form

$$\Lambda = -iE(x)^{-1} \sum_{j=i}^{n} A_j D_j$$

where $x \varepsilon R^n$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $E(x)$ and the A_j are mxm Hermitian matrices, $E(x)$ is positive definite and the A_j are constants. Λ is essentially selfadjoint on the Hilbert space $\mathcal{H}$ with inner product

$$(u,v) = \int_{R^n} u(x)^* E(x) v(x) dx .$$

It is assumed that

$$\operatorname{rank}\Big(\sum_{j=i}^{n} A_j p_i\Big) = m-k \quad \text{for all} \quad p \varepsilon R^n - \{0\}.$$

(Λ is elliptic if and only if k=o). The principal result states that Λ is coercive on $N(\Lambda)^{\perp}$, the orthogonal complement in $\mathcal{H}$ of the nullspace $N(\Lambda)$; that is, there exists a $K > 0$ such that

$$\sum_{j=1}^{n} ||D_j u||^2 \leqq K^2(||\Lambda u||^2 + ||u||^2) \text{ for all } u \in D(\Lambda) \cap N(\Lambda)^{\perp} .$$

Applications are given to the Cauchy problem for $D_t u = -i\Lambda u$ and to spectral and scattering theory for Λ .

R. WÜST: Zur Störung selbstadjungierter Operatoren

Sei $(X,(\cdot,\cdot),||\cdot||)$ ein Hilbertraum, A,B lineare Operatoren in X mit Definitionsbereichen D(A) und D(B). Es gilt folgende Verallgemeinerung des Störungssatzes von Rellich:

Satz Falls a) A wes. selbstadjungiert

b) B symmetrisch, $D(B) \supset D(A)$

c) $||Bx|| \leqq a\, ||x|| + ||Ax||$, $x \in D(A)$,

dann ist A+B wes. selbstadjungiert.

Voraussetzung c) kann nicht abgeschwächt werden durch

$$c^*) \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{a(\varepsilon)} \bigwedge_{x \in D(A)} (||Bx|| \leqq a(\varepsilon)||x|| + (1+\varepsilon)||Ax||),$$

wie Beispiele aus dem Bereich gewöhnlicher Differentialoperatoren zeigen. [erscheint in Math.Z., 119, 276-280,(1971)]

W. Wendland (Darmstadt)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft