MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 12|1971

Mathematische Statistik

14. 3. bis 20. 3. 1971

Die diesjährige Tagung über Mathematische Statistik wurde von W. UHLMANN (Würzburg) geleitet.

In 25 Vorträgen wurde deutlich, daß sich die Forschung in der Mathematischen Statistik z. Zt. recht verschiedenen Gebieten zuwendet. Neben konkreten Test- und Schätzproblemen wurden vor allem die maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen statistischer Probleme behandelt. Klassische Fragestellungen wurden verallgemeinert und mit den Methoden der Entscheidungstheorie behandelt. Mehrere Vorträge befaßten sich mit asymptotischen Eigenschaften von stochastischen Prozessen, andere untersuchten asymptotische Verteilungen von Statistiken. Auch über offene Fragen, die in der praktischen Arbeit des Statistikers auftauchen, wurde referiert und diskutiert.

Wegen der Vielfalt der behandelten Bereiche erscheint eine Gliederung der Vortragsauszüge nach Sachgruppen nicht angebracht; die nachstehenden Vortragszusammenfassungen stehen deshalb in alphabetischer Reihenfolge der Autoren.

Vom Tagungsleiter wurde von den Vortragenden die Angabe der Zeitschrift erbeten, in der gegebenenfalls die im Vortrag dargestellte Arbeit publiziert wird; die eingegangenen Angaben sind am Schluß der Zusammenfassungen angefügt.

T e i l n e h m e r

Bartenschlager, H., Frankfurt
Basler, H., Würzburg
Bierlein, D., Regensburg
Bock, H.H., Freiburg
Borges, R., Giessen
Brown, C.C., Erlangen
Bühler, W., Heidelberg
Dinges, H., Frankfurt
Eicker, F., Freiburg
Fabius, J., Leiden
Fieger, W., Karlsruhe
Gerstenkorn, T., Lodz
Gute, B., Regensburg
Hinderer, K., Hamburg
Kendall, D.G., Cambridge
Kloß, H., Karlsruhe
Krafft, O., Münster
Krauth, J., Düsseldorf
Kurotschka, V., Ann Arbor
Kuss, U., Heidelberg
Lehn, J., Regensburg
Lienert, G.A. Düsseldorf
Ludwig, O., Bad Nauheim
Maag, U.R., Zürich
Mammitzsch, V., München
Morgenstern, D., Freiburg
Neuhaus, G., Münster
Plachky, D., Münster
Puri, M.L., Bloomington
Randolph, P., Las Cruces
Ressel, P., Münster
Sarkadi, K., Budapest
Schach, S., Baltimore
Schaefer, M., Münster
Scheller, H., Tübingen
Sendler, W., Wien
Tusnády, G., Budapest
Uhlmann, W. Würzburg
Vogel, W., Bonn
Vogt, H., Würzburg
Weiss, E.-A., Bonn
Witting, H., Münster
Wöhrle, K., Freiburg
Wolff, H., Braunschweig
van Zwet, W.R., Leiden

Vortragsauszüge

H. BARTENSCHLAGER: Charakterisierung der zulässigen Verfahren bei multiplen Entscheidungsproblemen mit endlicher Hypothesenmenge

Ein Entscheidungsproblem wird gegeben durch ein Maß Q auf $(\mathbb{R}^{n+}, B^n)$, eine endliche Entscheidungsmenge $\mathcal{E}$ und eine Verlustmatrix V. Wir fragen nach der Darstellung der zulässigen Entscheidungsverfahren als Funktionen auf dem $\mathbb{R}^{n+}$. Diese Darstellung wird gegeben durch Zerlegungen des $\mathbb{R}^{n+}$ in mit den Teilmengen von $\mathcal{E}$ indizierte Kegel und durch Limites solcher Zerlegungen. Weiter wird gezeigt, daß jede zulässige Zerlegung einer "allgemeinen" a-priori-Verteilung zugeordnet werden kann.

R. BORGES: Eine neue Approximation der hypergeometrischen Verteilung

Es sei $H(k; N, K, n)$ die Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung, wobei N (K) die Anzahl aller (der roten) Kugeln in der Urne und n den Stichprobenumfang bedeutet. Es sei

$$y_k = \sqrt{(n + 1/3)\cdot \frac{N + 2/3}{(N - n + 1/3)}}\, [\vartheta(1-\vartheta)]^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\vartheta}^{\frac{k+a}{n+2a}} [s(1-s)]^{\alpha-1}\, ds$$

mit $\vartheta = \frac{K+a+b}{N+2a+2b}$, wobei a, b, α noch frei gewählt werden können.

Dann ist die Differenz

$$\Phi(y_k + 1/2) - H(k; N, K, n)$$

von der Ordnung $\sqrt{\frac{N-n}{n\, N\, \vartheta(1-\vartheta)}}$ für $n, N,$ "groß" und zwar gleichmäßig in k. (Dabei bedeutet $\Phi(y)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung). Die angegebene Differenz ist genau dann von der Ordnung

$\frac{N-n}{n\, N\, \vartheta(1-\vartheta)}$, wenn

$$(1) \quad \alpha = \frac{2}{3} + \frac{n + 1/3}{3(N-n + 1/3)}$$

$$(2) \quad (a - \frac{1}{6}) = \frac{n + 1/3}{N-n+ 1/3} (b - \frac{1}{6})$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Für $a = b = 1/6$ und $N = 20$, $n = 5$ bis 10 und alle K mit $1 \leq K \leq N$ sowie $k = 0,\ldots,n$ liegen bereits gute numerische Ergebnisse vor. Es sollen noch weitere Paare a, b, insbesondere der Fall $a + b = 0$ untersucht werden.

C.C. BROWN: Eine Konfidenzkugel zum χ^2-Test

It is possible to obtain a lower bound on the χ^2 test function for the one sample case from which a confidence sphere for the probability vector can be constructed. This confidence sphere specialises to the confidence interval of the binomial test in the case of one degree of freedom.

F. EICKER: Siehe Schluß

J. FABIUS: Random division of an interval

A random vector $X = (X_1,\ldots,X_r)$ with all $X_j \geq 0$ and $\sum_1^r X_j = 1$ is called i-neutral (c.f. Connor, Mosiman, J.A.S.A. 64 (1969), 194) iff the $\frac{X_j}{1-X_i}$, $(j \neq i)$, are independent of X_i.

Thm: If $r \geq 3$, $EX_j > 0$ $(\forall j)$, and X is j-neutral for all j,

then: either $P(\max_i X_i = 1) = 1$,

or $P(X = a) = 1$ for some a,

or X has a Dirichlet distribution.

Cor: Any truly random distribution function, which is tailfree for all trees of partitions (c.f. Fabius, Ann. Math. Statist. 35, (1964), 846) either has a jump of size 1 at a random point, or has two fixed points as its only points of increase, or is a Dirichlet process as defined by Ferguson.

W. FIEGER: <u>Suffizienz bei verschiebungsinvarianten Schätzproblemen</u>

Ziel des Vortrags ist es, eine Umkehrung des Satzes von Rao-Blackwell über suffiziente Statistiken anzugeben für den Fall, daß $X_1,\dots,X_n$ unabhängige Wiederholungen einer Zufallsgröße X mit $F_X(x)\in\mathcal{F}=\{G(x-\lambda):\lambda\in R^1\}$ (mit vorgegebenem totalstetigen $G(x)$) sind. Es gilt: $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}):\ R^n \to R^m$ sei eine "gegen Verschiebungen des Skalennullpunkts invariante" Abbildung; gibt es zu jeder konvex von $d-\lambda$ abhängenden Schadensfunktion $s(\lambda,d)$ eine verschiebungsinvariante Funktion $d_o(\mathfrak{t}):R^m \to R^1$, derart daß $d_o(\mathfrak{t}(\mathfrak{x}))$ ein (bezüglich $s(\lambda,d)$) bestes Schätzverfahren für den unbekannten Lageparameter liefert, so ist $\mathfrak{t}(X_1,\dots,X_n)$ eine suffiziente Statistik.

T. GERSTENKORN: <u>Über die Geschichte der Rekursionsformeln für die Momente von Wahrscheinlichkeitsverteilungen</u>

Das Ziel des Vortrags ist eine Übersicht über den Wissensstand auf dem Gebiet der Forschung der Rekursionsformeln für die gewöhnlichen und zentralen Momente von diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen anzugeben.

Die Übersicht beginnt mit den Arbeiten von K. Pearson (1895, 1899, 1924) und geht durch die Arbeiten von V. Romanovsky (1923), R. Frisch (1925), A. Guldberg (1933), R. Risser und C.E. Traynard (1933, 1957), A.R. Crathorne (1934), A.T. Craig (1934), A.A. Krishaswami Ayyangar (1934), A. Noack (1950), A.R. Kamat (1963). Zusammen mit den Ergebnissen dieser Verfasser sind die angewandten Methoden angeboten. Die eigenen Resultate des Vortragsautors werden in einer anderen Vorlesung vorgestellt werden. Das Material des Vortrags wird in Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), Warszawa 1971, Band LXXXIII veröffentlicht werden.

O. KRAFFT (und E. SONNEMANN): <u>Bemerkungen zu Shannon's 5-buchstabigem Kanal</u>

Bereits für das einfachste nichttriviale Beispiel eines gedächtnislosen, diskreten Kanals, für den die Nullfehler-Kapazität C_o von der Länge der Worte abhängt - nämlich für Shannon's 5-buchstabigen Kanal - hat sich C_o bisher nicht bestimmen lassen. Im Vortrag werden einige mit der Lösung verbundene Schwierigkeiten erläutert und einige Resultate angegeben, die vermuten lassen, daß $C_o = \frac{1}{2}\log 5$ gilt.

J. KRAUTH: <u>Trennung von Rangtupeln mit gleichem Wert der Prüfgröße</u>

Bei den finiten Rangtests bewirken gleiche Werte der Prüfgröße einen Schärfeverlust gegenüber einem optimalen Test für das betreffende Problem. Nun kann man einseitige Rangtests häufig als lokal beste Tests herleiten, die unverfälschte Tests zum Niveau α sind. Diese lokal besten Tests ergeben sich als eine erste Approximation an den i.a. schwer zu bestimmenden lokal gleichmäßig besten Test. Durch sukzessive Anwendung höherer Approximationen gelingt es, Rangtupel mit gleichem Wert der Prüfgröße zu trennen und so den lokal gleichmäßig besten Test immer besser zu approximieren. Neben dem Fisher-Yates-Test wird der Wilcoxon-Test betrachtet (im Zweistichprobenproblem) und zwar als lokal bester Test sowohl gegen logistische Translationsalternativen als auch gegen Lehmannalternativen. Speziell für die letzteren ergeben sich geschlossene Formeln für ein nach n_1 Schritten abbrechendes Verfahren und der lokal gleichmäßig beste Test wird als unverfälschter Test zum Niveau α nachgewiesen.

G.A. LIENERT: <u>Offene Fragen</u>

Es wird angeregt, Tests für folgende praktisch bedeutsamen Fragestellungen zu entwickeln:

1) Einen Wilcoxon-Mann-Whitney-Test für nicht identische (heteromere) Verteilungen, der auf Lokationsunterschiede anspricht.

2) Ein analoger Test, der auf Lokations- <u>und</u> Dispersionsunterschiede anspricht.

3) Einen Test für zwei verbundene Stichproben, der nur auf Dispersion reagiert (analog dem parametrischen Test von Pitman, 1937, Biometrika) und einen Test der gleichen Art, der auf Lokations- und Dispersionsunterschiede reagiert.

Die Notwendigkeit dieser Tests wird anhand empirischer Beispiele illustriert.

Weiter wird angeregt zu untersuchen, wie Stichprobenvektoren daraufhin geprüft werden können, ob sie einer multivariaten Normalverteilung gehorchen. Empirische Daten lassen die Existenz nicht hyperlinearer Regressionen zwischen den Variablen vermuten, in welchem Falle die Anwendung parametrischer multivariater Analysemethoden kontraindiziert ist, da die multivariate Verteilung nicht durch die bivariaten Randverteilungen repräsentiert wird.

G.A. LIENERT: Über den zweiseitigen Test bei diskreten und asymmetrisch verteilten Prüfgrößen

Es wird anhand eines konkreten Forschungsbeispiels zur Anwendung des Kendall'schen Tau-Tests gefragt, wie man bei Vorliegen von Rangbindungen in beiden Rangreihen (x,y) und daraus resultierender asymmetrischer Verteilung der Prüfgröße S (Kendall-score) zweiseitig testen soll. Unter drei vorgeschlagenen Möglichkeiten ergibt sich in der Diskussion der Teilnehmer eindeutig eine Präferenz dafür, an jedem Ast der Prüfverteilung $\frac{\alpha}{2}$ Anteile abzugrenzen und auf eine Minimierung der Annahmeregion für $H_o: \tau = o$ gegen $H_1: \tau \neq o$ zu verzichten.

V. KUROTSCHKA: Optimale Versuchspläne bei allgemeinen Modellen der Varianzanalyse

Unter Zugrundelegung der drei wichtigsten Optimalitätskriterien (G-, D-, und A-Optimalität) werden optimale Versuchspläne für Modelle der Varianzanalyse entwickelt. Es werden Modelle mit und ohne Zwischenwirkungen untersucht, und optimale Versuchspläne bei verschiedenen Beschränkungen der einzelnen Stichprobenumfänge charakterisiert. Die erzielten Ergebnisse gestatten insbesondere Optimalitätsaussagen über unvollständige Blockpläne, wie z.B. Lateinische Quadrate, Youden-Quadrate, replizierte Lateinische Quadrate und Verallgemeinerungen dieser Blockpläne.

U. KUSS: "Maximum Probability"-Methode und ihre Anwendung auf festen Stichprobenumfang

Die "Maximum Probability"-Schätzung von Weiss und Wolfowitz (1969) hat die Eigenschaft, den Grenzwert des Risikos - bei vorgegebener Verlustfunktion - zu minimieren, und zwar für jeden Parameter $\Theta_o \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$.

Zwei Sätze geben Bedingungen an, unter denen die M.P.-Methode dasselbe ergibt wie die Maximum Likelihood-Methode. Dazu gehören insbesondere die "regulären" Fälle von R.A. Fisher, so daß die neue Methode der älteren äquivalent ist, wenn letztere optimal ist.

Es werden aber auch Beispiele gegeben (2-dim. Exponentialverteilung, Weibull-Vert.), bei denen die neue Methode andere und bessere Ergebnisse

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

als die ältere liefert.

Schließlich wird das vernünftigste Vorgehen bei <u>festem</u> Stichprobenumfang dargestellt und kurz begründet.

U.R. MAAG: Über Varianten der Teststatistiken von Kolmogorow und Smirnow

Für die Verteilungsfunktionen der von Pyke vorgeschlagenen Varianten der Teststatistiken von Kolmogorow und Smirnow, üblicherweise mit C_n^+, C_n^- und C_n bezeichnet, geben wir asymptotische Formeln, welche neben der Grenzverteilung ein Glied in $n^{-1/2}$ enthalten. Aus diesen Entwicklungen und den bereits bekannten für die Statistiken D_n^+, D_n^-, D_n, V_n und K_n lassen sich Entwicklungen für die Prozentwerte berechnen. Diese Formeln enthalten neben dem entsprechenden asymptotischen Prozentwert einen Korrekturterm in $n^{-1/2}$, welcher konstant ist für die ganze Verteilung. Die auf diese Weise erhaltenen Approximationen für die Prozentwerte sind für $n \geq 20$ genügend genau, so daß sie in Anwendungen gebraucht werden können.

V. MAMMITZSCH: Sequentielle Tests

Wir betrachten folgendes Modell (Richter 1963): Gegeben seien

a) ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ mit Hypothesen (W.-Maßen) $P_1, \ldots, P_n$ auf $\mathfrak{F}$,

b) eine Folge von Informationsmengen (σ-Körpern über Ω)

$$\mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{F}, 1 \leq k \leq \infty ,$$

c) Schadensbereiche $\emptyset \neq S(\omega\,;\,t) \subset R^n$ für $1 \leq t < \infty$, $\omega \in \Omega$

bezw. $\emptyset \neq S(\omega\,;\infty) \subset R^n \cup \{\vec{\infty}\}$ für $\omega \in \Omega$.

Dann besteht ein sequentieller Test (T, s) aus einer Stopzeit T und einer Schadensfunktion s, die wie folgt definiert sind:

a) $T: \Omega \to \{1, \ldots, k\}$ derart, daß $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ für alle $t \leq k$;

b) $s: \Omega \to R^n \cup \{\vec{\infty}\}$ derart, daß $s(\omega) \in S(\omega\,; T(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$,

s auf $\{T = t\}$ $\mathfrak{F}_t$-meßbar für alle $t \leq k$,

$P_\nu(s = \vec{\infty}) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Die für den Fall endlicher k und beschränkter Schadensbereiche bekannten Aussagen über die Existenz und Konstruktion optimaler Tests werden verallgemeinert auf den Fall beliebiger k und unbeschränkter Schadensbereiche.

Die Arbeit erscheint voraussichtlich in der Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 1971.

D. MORGENSTERN: Über die seltsamen Würfel von Efron und ihre Verallgemeinerung

Der Existenzsatz von Usiskin (Ann.Math.Stat. 35 (1964) S. 857) für $n \geq 3$ unabhängige Zufallsvariable mit $P(X_i < X_{i+1}) \geq c_n > \frac{1}{2}$ $(X_{n+1} \equiv X_1)$ läßt sich so deuten, daß ein Spieler einen der n"Würfel" wählen darf und ihn der andere mit einem geeignet-ausgewählten anderen "besseren Würfel" besiegen kann. Einfaches Beispiel für $n = 3$ je gleiche Wahrscheinlichkeiten für 1, 6, 8 bzw. 2,4,9 bzw. 3,5,7. Verallgemeinerung auf 7 "Würfel", von denen 2 ausgewählt werden dürfen und doch immer einer übrigbleibt, der besser ist als jeder dieser beiden (für weniger als 7 Würfel ist dies unmöglich). Zurückführung dieser Art von Fragestellungen auf graphentheoretische Frage durch den Satz: Jeder gerichtete Graph läßt sich durch "Würfel" realisieren, die den Ecken entsprechen und deren "besser-sein" der gegebenen Kantenrichtung entspricht. Verallgemeinerungen auf 3 wählbare Würfel (bei < 15 Würfeln unmöglich) ist offen, ebenso optimale Wahrscheinlichkeiten.

G. NEUHAUS: Zur Konvergenz stochastischer Prozesse mit mehrdimensionalem Zeitparameter

Es wird ein Raum D_k von Funktionen auf dem k-dimensionalen Einheitsquader eingeführt, der den bekannten Raum $D[0,1]$ verallgemeinert. Durch die Definition einer "Skorohod"-Metrik d auf D_k wird der metrische Raum (D_k,d) polnisch. Kompakte Teilmengen von D_k lassen sich mit Hilfe eines geeignet definierten "Oszillationsmoduls" charakterisieren, woraus sich Kriterien für die schwache Folgenkompaktheit einer Folge von Maßen auf der Borelschen σ-Algebra über D_k ergeben. Als eine Anwendung der Theorie läßt sich die schwache Konvergenz des empirischen Prozesses für vektorwertige Zufallsgrößen (bei wachsendem Stichprobenumfang) beweisen. Der Grenzprozess ist eine Verallgemeinerung der "Brownschen Brücke".

Erscheint in: AMS August 1971

D. PLACHKY: Suffizienz und Fortsetzungen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Es seien $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ σ - Körper mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $\mathfrak{A}$. Bezeichnet ferner $K(\mathfrak{A}, \nu, \mathfrak{B})$ die konvexe Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße μ über $\mathfrak{B}$ mit $\mu \mid \mathfrak{A} = \nu$, so werden die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1: $\mu \in K(\mathfrak{A}, \nu, \mathfrak{B})$ ist genau dann extremal, wenn $\mathfrak{A}$ für $\{ \mu' \mid \mu'$ μ-stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß über $\mathfrak{B} \}$ suffizient ist.

Satz 2: Für einen σ - Körper $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ gilt genau dann, daß aus $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{F}$ für $\mu_i \in K(\mathfrak{A}, \nu, \mathfrak{B})$, $i=1,2$, folgt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{F}$ für $K(\mathfrak{A}, \nu, \mathfrak{B})$ paarweise suffizient ist.

Die beiden Sätze werden an einigen Beispielen erläutert.

M.L. PURI: Generalized Multivariate One Sample Problems

For stochastic vectors, not necessarily identically distributed, the sign-invariant permutation distribution theory of rank order statistics is developed and utilized in the construction of a class of conditionally distribution-free tests for diagonal symmetry. The asymptotic distribution of the rank order statistics, when the null hypothesis of sign invariance is not necessarily true, is also obtained. The asymptotic power properties of the tests are also studied.

P. RESSEL: Vektorwertige Maße und schwachstationäre Prozesse

Die bekannten eineindeutigen Beziehungen zwischen den nicht-negativen endlichen Maßen auf dem $(\mathbb{R}_1, \mathcal{L}_1)$ und den zugehörigen Verteilungsfunktionen bzw. charakteristischen Funktionen gelten auch für zwei spezielle Klassen vektorwertiger Maße. Zum einen sind das die sog. orthogonalen Maße mit Werten in einem separablen Hilbertraum H, deren charakteristische Funktionen für $H = L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \omega)$ gerade die schwachstationären Prozesse auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \omega)$ darstellen und deren Verteilungsfunktionen sog. Prozesse mit orthogonalen Zuwächsen sind. Die zweite Klasse, die sog. multiplikativen Maße, haben als Wertebereich die Projektionsoperatoren auf einem separablen Hilbertraum H. Hier sind die Verteilungsfunktionen unter dem Namen "Spektralscharen" bekannt, während die charakteristischen Funktionen sich als stetige Homomorphismen von

$\mathbb{R}_1$ nach $\mathcal{U}(H)$, die Menge der unitären Operatoren auf H, erweisen. Mit Hilfe des Umkehrsatzes für orthogonale Maße wird ein neuer Beweis des Satzes von STONE über Einparametergruppen unitärer Operatoren angegeben. Außerdem wird gezeigt, wie man aus einem schwach-stationären Prozeß X (mit $\mathbb{R}_1$ als Zeitbereich) ein multiplikatives Maß gewinnen kann, für dessen charakteristische Funktion U gilt $U_t X(o) = X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_1$.

K. SARKADI: Über die exakte Verteilung der Teststatistik von Kolmogorow

Epanechnikov hat die folgende Formel bewiesen (Teor.Veroyatn. 13 (1968) 725-730)

$$P(|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon) = n! \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{n-\nu} \cdot$$

$$\cdot \sum_{o=p_o< p_1< \dots < p_\nu < p_{\nu+1} = n} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{F_o^{p_{i+1}-p_i}\left[F_o\left(\frac{p_i}{n}+\varepsilon\right)-F_o\left(\frac{p_{i+1}}{n}-\varepsilon\right)\right]}{(p_{i+1}-p_i)!},$$

wo $F(x)$ eine stetige Verteilung und $F_n(x)$ die entsprechende empirische Verteilungsfunktion ist; $\varepsilon < 1/2$ und

$$F_o(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ x & \text{"} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{"} \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Der ursprüngliche Beweis beruht auf rekursiven Beziehungen über mehrfache Integrale. Der Zweck des Vortrages ist, einen einfacheren Beweis zu geben.

Erscheint voraussichtlich in Periodica Math.Hung., Vol. 2.

W. SENDLER: Einige maßtheoretische Fragen im Zusammenhang mit dem Testen einfacher Hypothesen

Sind P,Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, α eine reelle Zahl, $0 \leq \alpha \leq 1$, sowie $\bar{\varphi}_\alpha$ ein trennscharfer Test für das Problem (α, P, Q), so hat die Abbildung $\alpha \to i_{(PQ)}(\alpha) := \int \bar{\varphi}_\alpha \, dQ$ einige bemerkenswerte Eigenschaften; insbesondere läßt sich die punktweise Konvergenz von $i_{(PQ_n)}$ gegen $i_{(PQ)}$ in $(0,1]$ mit Konvergenzbegriffen für W-maße in Zusammenhang bringen. Einige Ergebnisse lassen sich auf den Fall verallgemeinern, daß die "Alternativhypothesen" beliebige beschränkte, jedoch nicht notwendig positive Maße sind. Unter anderem erhält man eine Charakterisierung der uniformen Topologie im Raum aller beschränkten Maße.

Literaturangabe:

W. Sendler: Einige maßtheoretische Sätze bei der Behandlung trennscharfer Tests, Zeit. Wahrscheinlichkeitsth. (1971) 18, 183-196

W. Sendler: Über eine Verallgemeinerung des Testens einfacher Hypothesen (wird einger. bei:Sitzungsberichte d. Akademie).

S. SCHACH: Über die schwache Konvergenz einer Folge von Markoffschen Prozessen

In dieser Arbeit wird die schwache Konvergenz einer Folge von klassischen Ehrenfest-Prozessen und von Prozessen, die mit diesen eng verwandt sind, bewiesen. Alle diese Prozesse beschreiben die Zufallsverteilung von N Kugeln auf K Urnen und die Übergänge von Kugeln zwischen den Urnen. Es zeigt sich, daß für ein Modell mit stetigem Zeitparameter die schwache Konvergenz leichter zu beweisen ist, als für das ursprüngliche klassische Modell mit diskreter Zeit. Der diskrete Fall kann dann auf den stetigen zurückgeführt werden. In allen Fällen konvergieren die stochastischen Prozesse mit $N \to \infty$ zu einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Mehrere Anwendungen der Resultate werden diskutiert.

Die Arbeit erscheint voraussichtlich in: Ann. Math. Stat. (1971) 2.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

G. TUSNÁDY: On testing density functions

There are different methods of estimating the exact density $f(x)$ by an empirical density function $f_n(x)$ from a sample with n elements. The consistency of these estimators is proved, i.e. it is proved that the random variable

$$\delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} | f(x) - f_n(x)|$$

tends to 0 with probability 1 if the density $f(x)$ is smooth enough. P. Révész stated the problem of testing the density with a test similar to the Kolmogorov test on empirical distributions. This needs the knowledge of the asymptotic distribution of δ_n. The latter was given by P. Révész for a concrete estimator f_n. The aim of this report is to give the asymptotic distribution of δ_n for other estimators of the density.

The paper will be published in: Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica
or Periodica Mathematica Hungarica

H. WOLFF: Konvergenzbedingungen bezüglich Iterationskoeffizienten bei stochastischen Approximationsverfahren

Der Robbins-Monro-Prozeß (R-M-P) zur Schätzung der Nullstelle einer Regressionsfunktion $M(x)$ und der Kiefer-Wolfowitz-Prozeß (K-W-P) zur Schätzung des Maximums von $M(x)$ werden bezüglich ihrer Iterationskoeffizienten untersucht.

Unter bestimmten Voraussetzungen über $M(x)$ und der zugrunde liegenden ZVn $y(x)$ wird versucht, die Menge der Iterationskoeffizienten, die die Konvergenz der Prozesse nach sich ziehen, möglichst vollständig anzugeben.

Für die im R-M-P auftretende Koeffizientenfolge $\{ a_n \}$ wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen über $M(x)$ und $y(x)$ die Bedingung

$$(1) \quad a_n \to o \;, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \to \infty \quad (n \to \infty)$$

notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Prozesses ist. Für die im K-W-P auftretenden Folgen $\{ a_n \}$ und $\{ c_n \}$ werden die üblichen Bedingungen für diese Parameter abgeschwächt auf

$$(2) \quad c_n \to o \;, \quad a_n c_n^{-2} \to o \;, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \to \infty \quad (n \to \infty) .$$

Unter Zusatzvoraussetzungen über $M(x)$ folgt, daß $\{c_n\}$ nicht Nullfolge sein muß. Für den Sonderfall $c_n \equiv c = \text{const.}$ ist hier dann (1) ebenfalls wieder notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Prozesses.

W.R. van ZWET: The likelihood-ratio test for the multinomial distribution

Let $X = (X_1,\dots,X_k)$ have a multinomial distribution with parameters N and $p = (p_1,\dots,p_k)$; let $\Lambda \subset \{p : p_i \geq 0, i=1,\dots,k, \sum p_i = 1\}$ be a non-empty subset of the parameter space and p^0 an arbitrary point in Λ. For $N = 1,2,\dots$ consider the likelihood-ratio test (LR test) of size α_N for testing the hypothesis $H : p = p^0$ against the alternative $K : p \in \Lambda - \{p^0\}$. If $\beta_N(p)$ is the power of this test at p and $\beta_N^+(p)$ is the envelope power at p for size α_N, then $R_N(p) = \beta_N^+(p) - \beta_N(p)$ denotes the shortcoming of the size $-\alpha_N$ LR-test at p.

Theorem. If $\alpha_N \to 0$ and $-\log \alpha_N = o(N)$ then $\sup_{p \in \Lambda} R_N(p) \to 0$ for $N \to \infty$.

This theorem is discussed and its connection with a result of Hoeffding is pointed out. The theorem is the result of joint work with J. Oosterhoff. If will be published in the proceedings of the sixth Berkeley Symposium.

F. EICKER: Zwei elementare Beweise für die asymptotische Normalität von Summen von Funktionen von Ordnungsstatistiken

Durch die Forderung der Differenzierbarkeit und einer Lipschitzbedingung (oder etwas ähnlichem) werden die in der Summe auftretenden Funktionen zunächst linear so approximiert, daß der Fehler die gewünschte asymptotische Normalverteilung nicht stört. Bei diesem üblichen, einleitenden Schritt werden die Ordnungsstatistiken außerdem auf solche der Gleichverteilung über $(0,1)$ transformiert. Die asymptotische Normalität der so linearisierten Summe kann einmal sehr einfach mithilfe einer Formel von Kiefer nachgewiesen werden, wonach die Ordnungsstatistiken gleichmäßig fast sicher bis auf einen Fehler von im wesentlichen der Ordnung $n^{-3/4}$ durch Werte der empirischen Verteilungsfunktion der Stichprobe ersetzt werden können.

Zum anderen kann man, ebenfalls sehr einfach und elementar, die Unabhängigkeit der Quotienten aufeinanderfolgender Ordnungsstatistiken von U(0,1) ausnützen und mit Linearkombinationen derselben die ursprüngliche Summe approximieren.

Zusammenstellung des Tagungsberichtes:

H. B a s l e r , H. V o g t (Würzburg)