MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 14 /1971

Mathematische Logik

28.3. bis 3.4.1971

Die diesjährige Tagung zur mathematischen Logik wurde von den Herren H. Hermes (Freiburg) und K. Schütte (München) geleitet. Es wurden 23 Vorträge gehalten, die Themen aus der Beweistheorie, der intuitionistischen Logik, der Modelltheorie, der Mengenlehre und der Wissenschaftstheorie behandelten.

Die DVMLG hielt während der Tagung ihre Mitgliederversammlung ab.

Teilnehmer

Aczel, P.H. Manchester
Bammert, J.W., Freiburg
Barendregt, H.P., Utrecht
Bernays, P., Zürich
Carstengerdes, W., Wolfsburg
Czermak, J., München
van Dalen, D., Utrecht
Deißler, R., Freiburg
Diener, K.-H., Köln
Diller, J., München
Döpp, K., Hannover
Drieschner, R., Braunschweig
Ebbinghaus, H.-D., Freiburg
Engeler, E., Minneapolis
Essler, W.K., München
Felgner, U., Heidelberg
Fenstad, J.E., Oslo
Fiedler, H., Bonn
Frey, G., Innsbruck
Gloede, K., Heidelberg
Görnemann, Sabine, Kiel
Gupta, H.H., Bonn
Hermes, H., Freiburg
Hindley, R., Swansea
Janich, P., Erlangen
Juhos, B., Wien
Kneebone, G.T., London
Koppelberg, B.J., Bonn
Läuchli, H., Zürich
Luckhardt, H., Marburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Marek, W., Utrecht
Markwald, W. Freiburg
Menne, A., Hamburg
Mitschke, G., Darmstadt
Müller, G.H., Heidelberg
Müller, H., Hannover
Oberschelp, A., Kiel
Oberschelp, W., Hannover
Osswald, H., München
Pfeiffer, H., Hannover
Podewski, K.-P., Hannover
Potthoff, K., Kiel
Prestel, A., Bonn
Scarpellini, B., Basel
Schnorr, C.-P., Saarbrücken
Schütte, K., München
Schwabhäuser, W., Bonn
Schwichtenberg, H., Münster
Specker, E., Zürich
Thiel, Chr., Erlangen
Troelstra, A.S., Amsterdam
Weispfenning, V., Heidelberg

Vortragsauszüge

W. MAREK : Constructibility in Impredicative Set Theory

We prove that if $M + C$ is consistent then $M + C + V = L$ is also consistent. Also some other results about M. (M is Morse-Mostowski Impredicative Set Theory and C is certain class form of axiom of choice.)

K. GLOEDE : Große Kardinalzahlen und die konstruktible Hierarchie

Nachdem D. SCOTT 1961 gezeigt hatte, daß die Existenz einer meßbaren Zahl mit dem GÖDELschen Konstruktibilitätsaxiom $V=L$ unverträglich ist, wurde dieses Ergebnis durch die Arbeiten von GAIFMAN, ROWBOTTOM und SILVER wesentlich verstärkt. Insbesondere zeigte SILVER 1966, daß aus der Existenz einer Zahl mit der Partitionseigenschaft $\varkappa \rightarrow (\omega_1)^{<\omega}$ die Existenz einer Klasse C von Ordinalzahlen folgt, die die Klasse L erzeugt und deren Elemente in dem Modell L nicht-unterscheidbar sind ("$0^{\#}$ existiert"). Die Bedingung

$\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}$ läßt sich abschwächen durch teilweise Relativierung nach einem ZF-Modell M, und es ergeben sich analoge Sätze über die Existenz nicht-unterscheidbarer Mengen. Insbesondere erhält man eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Aussage "$0^{\#}$ existiert", die echt schwächer als die SILVERsche Bedingung ist.

W.K. ESSLER : Induktive Methoden und Lernen aus der Erfahrung

c sei eine Funktion, die für Paare von Sätzen (ev. mit erfüllbarem Zweitglied) definiert ist und als Werte reelle Zahlen annimmt.

Es wird folgendes bewiesen:

c sei streng kohärent (d.h. c erlaube in der Anwendung keine Wetten, die einen Gewinn, nicht jedoch einen Verlust ausschließen), c sei symmetrisch und erfülle gewisse Irrelevanzbedingungen sowie die Limeskonvention für Gegenstandsausdrücke.

(1) Dann ist c keine anti-induktive Methode;

(2) dann ist c keine a-induktive Methode genau dann, wenn c das Reichenbachprinzip erfüllt;

(3) falls $\Psi(\xi)$ keine Quantoren enthält und k eine natürliche Zahl ist, gilt: $c(\bigwedge\xi\Psi(\xi), \Psi(\alpha_1)\wedge\ldots\wedge\Psi(\alpha_k)) = 0$.

W. SCHWABHÄUSER : Aufgaben zur Modelltheorie

1. Sei $\mathfrak{T}_\Lambda$ bzw. $\mathfrak{T}_{<\Lambda}$ die Menge aller Theorien (d.h. Mengen T von Formeln der PL 1.Stufe mit $Cn(T)=T$), deren Sprache gleich Λ bzw. eine Teilsprache von Λ ist. Man untersuche Verbandseigenschaften. Zu $\mathfrak{T}_\Lambda$ vgl. Tarski, Grundzüge des Systemenkalküls (Fund. math. 25/26). $\mathfrak{T}_{<\Lambda}$ ist ein vollständiger Verband, der (im Gegensatz zu $\mathfrak{T}_\Lambda$) i. a. nicht distributiv ist.

2. Gesucht eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich in einer Theorie T die Relationskonstanten R_j gleichwertig durch Funktionskonstanten ersetzen lassen.
Lösung: Für jedes auftretende R_j gilt:

$$(\overset{=1}{\bigvee} \rightarrow R_j \underbrace{x\ldots x}_{n_j}) \in T \quad \text{oder} \quad (\overset{=1}{\bigvee} \rightarrow \neg R_j \underbrace{x\ldots x}_{n_j}) \in T$$

(n_j = Stellenzahl von R_j, $\overset{=1}{\bigvee} \underset{df}{=} \forall x \forall y \; x=y$) .

3. Bedeute OF, NOF bzw. AOF die Klasse der angeordneten, der nicht-archimedisch angeordneten bzw. der archimedisch angeordneten Körper. Für die zugehörigen (elementaren) Theorien hat man bekanntlich Th(NOF)=Th(OF) . Es ist jedoch $Th(AOF) \supsetneqq Th(OF)$.

Erscheint in Modelltheorie I (BI Mannheim 1971).

C.-P. SCHNORR : Optimale Gödelisierungen

Sei $P^k(R^k)$ die Menge der k-stelligen p.r. (total rek.) Funktionen. $g : N \rightarrow N$ heiße linear beschr., wenn $\overline{\lim_n}\, g(n)/n < \infty$. $\Phi \in P^2$ heißt optimale Gödelisierung, wenn

$$\bigwedge_{\Psi \in P^2} \; \bigvee_{g \in R^1, \text{lin.beschr.}} \qquad (\Psi = \Phi(g \times id)) \; .$$

Grundlegende Sätze der rekursiven Funktionentheorie, wie das Rekursionstheorem und der Isomorphiesatz für Gödelisierungen kann man für optimale Gödelisierungen verschärfen. $K_\Phi(h) \underset{def}{=} \min\{i \mid h = \Phi_i\}$ sei die Programmkomplexität von $h \in P^1$ bzgl. $\Phi \in P^2$ ($\Phi_i \underset{def}{=} \Phi(i,*)$) . Zu einer optimalen Gödelisierung Φ und $\Phi \in P^2$ existiert stets ein $C \in N$ mit $K_\Phi(h) \leq K_\Phi(h) C$ $(h \in P^1)$. Es wird ein Zusammenhang zwischen $K_\Phi(h)$ und der relativen Häufigkeit des

Auftretens von Gödelnummern zu h in einer optimalen Gödelisierung hergestellt. Es ergeben sich aus dem Begriff der optimalen Gödelisierung Folgerungen für die Konstruktion von Programmiersprachen.

J.E. FENSTAD : The game quantifier

Game-theoretic ideas were introduced by discussing the comparison of sequence trees in Π^1_1-theory by means of the so-called "basic tree lemma". This led to the definition of prewellorderings in terms of the game-quantifier.

Next a similar analysis was applied to the Kondo-Addison uniformization theorem, leading to a game-theoretic reformulation due to Y.Moschovakis, which under suitable assumptions of determinateness yields uniformization results on all odd levels of the projective hierarchy.

Finally the game-quantifier was related to the theory of inductively definable sets and the Suslin-Kleene theorem.

H.P. BARENDREGT : The ω-rule for the λ-calculus

We define the ω-rule for the λ-calculus as follows:

If $MZ = NZ$ for all Z without free variables, then $M = N$.

Obviously the ω-rule implies extensionality.

Two questions avise

1. Is the λ-calculus + ω-rule consistent?
2. Is the ω-rule provable in the λ-calculus + extensionality?

Partial answers to these questions will be given.

K.-P. PODEWSKI : Zur transzendenten Erweiterung topologischer Körper

Sei $(K, \mathcal{T})$ ein unendlicher topologischer Körper, $\mathfrak{V}$ eine Umgebung der 0 und G die Menge aller abgeschlossenen Mengen. Mit $\mathfrak{M}$ soll eine Menge von Filtern $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subseteq K$ bezeichnet werden. Definition: Eine Abbildung μ von G in den Positivbereich P einer halbgeordneten Gruppe heißt freier $\mathfrak{M}$-vollständiger P-Filter, wenn gilt: 1. $\mu(A) \leq \mu(B)$, falls $A \subseteq B$, 2. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. 3. $\mu(K) > 0$, 4. $\mu(\{x\}) = 0$ für $x \in K$. 5. Für alle $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon > 0$ gibt es $A \in \mathfrak{F}$ mit $\mu(A) < \varepsilon$. Satz: Existiert zu jedem $\mathfrak{M}$, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{V}}} \times \overline{\overline{K}}$ ein $\mathfrak{M}$-vollständiger freier P-Filter, dann gibt es eine Körpertopologie $\mathcal{T}'$ auf $K(x)$ mit $\mathcal{T}' \upharpoonright K = \mathcal{T}$. Neben den lokalkompakten Körpern erfüllen auch alle abzählbaren Körper mit abzählbarer Basis die Voraussetzung des Satzes.

D. van DALEN : Anwendung der Kripke-Semantik

Mit Hilfe der Kripke Semantik werden Modelle konstruiert, um Unabhängigkeitsfragen und relative Konsistenzfragen bezüglich Untersystemen der intuitionistischen Arithmetik klären zu können.

Es werden Varianten von der intuitionistischen Version von Robinsons's System RHA untersucht.

Gezeigt wird, daß die Entscheidbarkeit der Identitätsrelation unabhängig von RHA ist, und daß eben $\exists x \neg \forall y (x = y \vee x \neq y)$ konsistent bezüglich RHA ist. Die Resultate werden verschärft zu RHA mit stabiler Identität und mit Entfernungsrelation.

H. OSSWALD : Über einen Homomorphie- und Unterstrukturbegriff in der Kripke Semantik

Zwischen Kripke-Modellen werden ein Homomorphiebegriff und ein Unterstrukturbegriff als Verallgemeinerungen der entsprechenden klassischen Begriffe definiert, und es werden dann die Formeln in der intuitionistischen Logik mit Identität syntaktisch charakterisiert, die bei diesen Begriffen invariant bleiben.

A.S. TROELSTRA : Einige Bemerkungen über Realisierbarkeitsbegriffe und hereditär rekursive Operationen

Besprechung einiger Anwendungen von Varianten und Erweiterungen des Kleene'schen Realisierbarkeitsbegriffes und der hereditär rekursiven Operationen.

B. SCARPELLINI : Formal konstruktives Modell für Barrekursion höheren Typs

Ein früher gefundenes Modell für die Barreskursion vom höheren Typ wird so abgeändert, daß ein Modell erhalten wird, welches konstruktiv im unten erklärten Sinn ist.

Sprache: L der "second order arithmetic"

Funktoren: Terme für Funktionen.

Z_o: Intuitionistische Zahlentheorie mit Auswahlaxiom, in L formuliert.

Abkürzungen: α_x für $\lambda y \alpha(x,y)$ | $\alpha(x,y)$ für $\alpha(\langle x,y\rangle)$, $\langle x,y\rangle$ für Paarungsfunktion $\frac{1}{2}((x+y)^2+3x+y)$ | $\alpha \equiv \beta$ für $(x)(\alpha(x)=\beta(x))$ | $\bar{\alpha}(x)$ für $\Delta_1[\alpha,x]$ | $\bar{\alpha}(x) * \beta$ für $\Delta_2[\alpha,x,\beta]$.

Formeln: H1, H2, H3, HA1, HA2, HA3 bezeichnen der Reihe nach:

$$(s)_{<x}M(\alpha_s) \rightarrow (Q(\overline{\alpha}(x),x) \vee \neg Q(\overline{\alpha}(x),x))$$

$$(s)_{\leq x}M(\alpha_s) \wedge Q(\overline{\alpha}(x),x) \rightarrow Q(\overline{\alpha}(x+1),x+1)$$

$$(s)M(\alpha_s) \rightarrow (\exists x)Q(\overline{\alpha}(x),x)$$

$$(s)_{<x}M(\alpha_s) \wedge Q(\overline{\alpha}(x),x) \rightarrow A(\overline{\alpha}(x),x)$$

$$(s)_{<x}M(\alpha_s) \wedge (\beta)[M(\beta) \rightarrow A(\overline{\alpha}(x)*\beta,x+1)] \rightarrow A(\overline{\alpha}(x),x)$$

$$(s)_{<x}M(\alpha_s) \rightarrow A(\overline{\alpha}(x),x).$$

Regel EBIR: Sind H1 - H3, HA1, HA2 bewiesen, so ist HA3 beweisbar.

System EBI: Z_o + EBIR

Satz A: EBI ist so stark wie die klassische Analysis.

Beweis: Mit Hilfe eines konstruktiven Modells der Barrekursion, das in EBI formalisierbar ist.

W. CARSTENGERDES : Logische Systeme mit unendlich langen Formeln

Es werden mehrsortige logische Systeme L1, L2, L1(Σ_n) und L2(Σ_n) mit abzählbar unendlich langen Formeln dargestellt. Es wird gleichzeitig eine Arithmetisierung der Systeme vorgenommen und eine unendliche Disjunktion von abzählbar unendlich vielen Formeln in L1 und L2 nur zugelassen, wenn die Menge der Nummern dieser Formeln rekursiv aufzählbar ist. Für L1(Σ_n) bzw. L2(Σ_n) müssen diese Mengen zu Σ_n gehören. Dabei ist Σ_n die Menge der arithmetischen Mengen, die durch pränexe Formeln mit n Quantoren und einem Existenzquantor als erstem Quantor charakterisiert werden, wobei einem Existenzquantor ein Allquantor und umgekehrt folgen muß. Es wird gezeigt, daß diese Systeme widerspruchsfrei sind, indem die Schnitt-Elimination bewiesen wird. Außerdem wird gezeigt, daß die Systeme $L1(\Sigma_n)$ und $L2(\Sigma_n)$ äquivalent sind und daß Interpolationssätze gelten.

U. FELGNER : The Axioms of linear dependent choices

Let DC^α be the axiom of dependent choices of length α (α a cardinal) - Lévy 1964 - DC^ω is the Bernays (1942) - Tarski (1948) axiom of dependent choices - and let LDC^α be the restriction of DC^α to linear ordering relations:

LDC^α : If $\langle X, \leq \rangle$ is a linear ordered set such that for all subwellorderings Y of type $\beta < \alpha$ there exists $z \in X$ with $\forall y \in Y : z > y$, then $\langle X, \leq \rangle$ has a subwellordering of type α.

We investigated the interdependence between the axioms DC^α, LDC^α and AC^α. Jensen showed that $AC^\omega \to LDC^\omega$ is not a theorem of ZF. We proved by means of Cohen's forcing method the following:

Theorem 1: $(AC^\omega \wedge LDC^\omega) \to DC^\omega$ is not provable in ZF.

Theorem 2: $LDC^\omega \to AC^\omega$ is not provable in ZF.

This gives the complete picture of implications among DC^ω, LDC^ω, AC^ω provable in ZF (obviously : $ZF \vdash DC^\omega \to LDC^\omega$, $ZF \vdash DC^\omega \to AC^\omega$).

G.T. KNEEBONE : Mathematical logic in relation to ordinary mathematics

Mathematical logic is now much more a theory of logical structure than a theory of correct inference, and we may ask what it has to say to the working mathematician. Various specific questions relating to the use of mathematical logic in ordinary mathematics are considered. Then a number of philosophical issues are raised: (i) The implications of the fact that a mathematical assertion is only complete in the context of a theory; (ii) the role of formal systems in mathematics; (iii) the question whether axiomatic set theory has any content; (iv) the question of the source of mathematical truth, especially if a negative answer is given to (iii).

K. POTTHOFF : Enderweiterungen von Nichtstandardmodellen der natürlichen Zahlen

Durch Konstruktion von elementaren Submodellen von Ultrapotenzen wird bewiesen:

Satz: $\mathfrak{M}$ sei starke elementare Erweiterung eines Relationensystems $\mathfrak{N} = (N, <, R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots)_{\alpha<\gamma}$, $\mathfrak{M}^*$ sei elementar äquivalent, aber nicht isomorph zu $\mathfrak{N}$. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $|M'| = \max\{|M|, |M^*|\}$

2) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ sind elementar einbettbar in $\mathfrak{M}'$.

(Der Einfachheit halber identifizieren wir im folgenden $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ mit Bildern unter diesen Einbettungen)

3) $\mathfrak{M}'$ ist Enderweiterung von $\mathfrak{M}$.

4) Alle Elemente von $M^* - N$ sind größer als alle Elemente von M .

5) M^* ist konfinal mit M' und $M^* - N$ ist koinitial mit $M' - M$.

B. JUHOS : <u>Geometrie und Wahrscheinlichkeit</u>

Die Ausdrücke "Raum" und "Wahrscheinlichkeit" werden der triadischen Erkenntnisanalyse unterzogen. Es zeigt sich dabei eine weitgehende Analogie zwischen den drei Raum- und drei Wahrscheinlichkeitsbegriffen. Den Erlebnisräumen, den logisch-mathematischen Räumen und dem physikalischen Raum stehen die Erlebniswahrscheinlichkeit, die logisch-mathematischen Wahrscheinlichkeitsrelationen und die physikalische Wahrscheinlichkeit gegenüber. Augenfällig ist die Analogie zwischen der die geometrisch-metrischen Systeme ordnenden Funktion (d.i. der Krümmungstensor) und der die wahrscheinlichkeitsmetrischen Systeme ordnenden Funktion (G-Funktion). Auch die Parallelität von physikalischer Geometrie und physikalischer Wahrscheinlichkeit, die beide Phänomenordnungen, wenn auch verschiedener Form, kennzeichnen, läßt die erkenntnislogische Analogie der Ausdrücke "Geometrie" und "Wahrscheinlichkeit" erkennen.

B.J. KOPPELBERG : <u>Nichtreguläre Ultrafilter</u>

Sei $\varkappa$ meßbar, ρ Kardinalzahl $\geq\varkappa$, F $\varkappa$-vollständiger, uniformer Ultrafilter auf ρ , μ Kardinalzahl mit $\omega\leq\mu<\varkappa$, G nicht σ-vollständiger U.F. auf μ . Für $H = G \bar{x} F$ ergibt sich dann:

1) H ist uniformer, nicht σ-vollst. U.F. auf $\mu\times\rho$.

2) Für jede Kardinalzahl λ mit $2^{\mu}<\mathrm{cf}\,\lambda$ und $\lambda\leq\varkappa$ gilt: Ist $H'\subseteq H$ und $|H'|=\lambda$, so existiert $H''\subseteq H'$ mit $|H''|=\lambda$ und $\forall x\in P_{\varkappa}(H'') \bigcap x\in H$.

3) Ist γ die kleinste Kardinalzahl, so daß jedes $G'\subseteq G$ mit $|G'|\geq\gamma$ eine unendliche Teilmenge mit nichtleerem Durchschnitt enthält, so gilt das Entsprechende für γ in bezug auf H .

Weiterhin wurde kurz über das Verhalten der im Satz erwähnten nichtregulären Ultrafilter bei Abbildungen von $\mu\times\rho$ auf Kardinalzahlen $<\varkappa$ und bei bestimmten Cohenererweiterungen berichtet.

R. DRIESCHNER : Zur dialogischen Deutung der Logik

Eine Dialogsprache sei ein Graph $E : A \to \mathfrak{P}A$, dessen Knoten als Aussagen gedeutet werden, wobei die Aussage x ein Einwand gegen y heiße, wenn $x \in E(y)$; bei $E(x) = \emptyset$ heiße x Primaussage. Ein Dialog in E über die These x sei ein n-tupel $D = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Aussagen von E mit $x = x_1$. D stütze x_i , wenn D keinen in D vorkommenden Einwand gegen x_i stützt. Sei $\Delta = \{D | D \text{ Dialog in } E\}$ und $\Sigma \leq \{\sigma | \sigma : \Delta \to \Delta\}$ eine Menge von Strategien, so daß für $\sigma \in \Sigma$ und $D \in \Delta$ stets $\sigma(D)$ eine Fortsetzung von D ist und die These x von D stützt [entkräftet], wenn D x entkräftet [stützt]; σ heiße logisch, wenn $\sigma(D)-D$ keine Primaussagen enthält; σ heiße (logische) Gewinnstrategie für x , wenn für jedes $\tau \in \Sigma$ die Folge $\langle x \rangle, \sigma(\langle x \rangle)$, $\tau(\sigma(\langle x \rangle)), \ldots$ mit einem x stützenden Dialog endet.

Dann lassen sich zu zahlreichen Logiksystemen $\mathfrak{L}$ durch geeignete Wahl von $E : A \to \mathfrak{P}A$ und Σ solche Teilmengen $A' = \{x \in A | \text{ für } x \text{ existiert eine logische Gewinnstrategie}\}$ von Aussagen aussondern, die als Übersetzung der in $\mathfrak{L}$ gültigen Aussagen lesbar sind.

H. PFEIFFER : Über Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen

Es wird nach der Methode von H.BACHMANN ein Bezeichnungssystem B für Ordinalzahlen mit Hilfe von Normalfunktionen und Hauptfolgen konstruiert, das eine Erweiterung des Bachmannschen Systems auf Zahlenklassen mit beliebigem endlichen Index darstellt. Sei Σ das System der SCHÜTTEschen Klammersymbole mit $1, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ als Grundsymbolen und der Stufenbedingung. Es werden zwei injektive ähnliche Abbildungen von Σ in B und von B in Σ effektiv angegeben und damit gezeigt, daß B und Σ dieselben Ordinalzahlen bezeichnen.

H. SCHWICHTENBERG : Beweistheoretische Charakterisierung einer Erweiterung der Grzegorczyk-Hierarchie

Es wird eine weitere Charakterisierung der Grzegorczyk-Robbin-Klassen $\mathcal{E}_\alpha$ für $\alpha < \omega^\omega$ angegeben. (Vgl. Vortragsauszüge der Tagung vom 6. - 10.4.1970). Ausgangspunkt ist Kreisels Resultat, daß die ε_0-rekursiven (ordinal rekursiven) Funktionen mit den in der klassischen Zahlentheorie beweisbar rekursiven Funktionen zusammenfallen. Es liegt nahe, einen Zusammenhang zwischen Kompliziertheitsmaßen (Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$) für zahlentheoretische Beweise und der $\mathcal{E}_\alpha$-Hierarchie zu suchen. Gentzens Ordinalzahlzuordnung erweist sich hierfür als ungeeignet. Für einen intuitionistischen Sequenzenkalkül mit implikations- und negationsfreien Formeln läßt sich jedoch eine Ordinalzahlzuordnung angeben, so daß folgendes gilt: Eine Funktion f heiße beweisbar total, wenn es ein φ mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n, y$ gibt, so daß φ den Graphen von f (im Standardmodell) definiert und gilt $\vdash \exists y \varphi$.

Sei $\mathcal{F}_\alpha = \{f \mid f$ beweisbar total mit Ordinalzahl $< \omega^{\alpha+1}\}$ für $\alpha < \omega^\omega$. Dann ist $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$ für $\alpha < \omega^\omega$.

P. ACZEL : <u>A new approach to the Bachmann method for describing countable ordinals</u>

We give an alternative method to that of Bachmann for describing countable ordinals using hierarchies of normal functions indexed by a segment of ordinals in the third number class.

<u>Definition</u> of normal $\theta_\nu : \Omega_2 \to \Omega_2$ by induction on $\nu \leq \Omega_2$. Given θ_μ for $\mu < \nu$ let $\bar{\theta}_\nu(\alpha,\beta) = \begin{cases} \theta_\alpha(\beta) & \text{if } \alpha < \nu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. For $\alpha < \Omega_2$ let $Cl_\nu(\alpha)$ be the closure of $\alpha \cup \{0,\Omega\}$ under $+$ and $\bar{\theta}_\nu$. Let $\overline{Cl}_\nu(\alpha) = \begin{cases} Cl_\nu(\alpha) \cap \Omega & \text{if } \alpha \leq \Omega \\ Cl_\nu(\alpha) & \text{otherwise} \end{cases}$ and let θ_ν be the unique normal function whose range is $\{\alpha \mid \overline{Cl}_\nu(\alpha) = \alpha\}$.

<u>Theorem.</u> (1) $\theta_\Omega(0)$ is the first strongly critical ordinal.

(2) $\theta_{\Omega_2}(0) = \varphi_{F_{\omega_2+1}(1)}(1)$ in Bachmann's notation

The definition has natural extensions to hierarchies of normal functions on the finite and transfinite number classes and we conjecture that the ordinals obtained are closely related to those of Pfeiffer and Isles.

H. MÜLLER : <u>Lösbarkeit und Lösung spezieller Gleichungen der elementaren Mengenlehre</u>

Der Vortrag behandelt die Frage der Berechtigung induktiver Definitionen im Rahmen der Mengenlehre. Induktiv definierte Mengen lassen sich auffassen als Lösung gewisser Gleichungen, im einfachsten Fall von der Form

$$(G)\, X = A \cup R''X \quad [R''X := \{y \mid \exists x (x \in X \wedge (x,y) \in R)\}] .$$

Ist R fundiert, so ist (G) eindeutig lösbar. Sind A,R außerdem rekursiv aufzählbar, so ist die Lösung von (G) rekursiv aufzählbar. Entsprechende Resultate ergeben sich für kompliziertere Typen induktiver Definitionen sowie für simultan induktiv definierte, endliche Mengensysteme.

H. Osswald, München