MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 16/1971

Arbeitsgemeinschaft über die Arbeiten von SHIMURA zur komplexen Multiplikation

13.4. bis 17.4.1971

Die Arbeitsgemeinschaft behandelte diesmal unter der Leitung von R.Langlands (Bonn) Arbeiten von G.Shimura zur komplexen Multiplikation. Aus dem umfangreichen Werk Shimuras zu diesem Thema wurden zwei typische Resultate gewählt: 1.) Die Konstruktion von Modulmannigfaltigkeiten [1] und 2.) Die klassenkörpertheoretische Beschreibung der Modulkörper [2]. Bei 1.) handelt es sich darum, algebraische Faser-Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, deren Basispunkte eineindeutig den Isomorphieklassen abelscher Varietäten eines gegebenen Typs Ω (d.h. mit Polarisation, Endomorphismenring, N-Teilungspunkten) entsprechen und deren Fasern jeweils einen Vertreter der entsprechenden Isomorphieklasse darstellen. Die konstruierten Mannigfaltigkeiten sind universell und in arithmetischer Hinsicht folgendermaßen ausgezeichnet: Der betrachtete Typ Ω bestimmt einen algebraischen Zahlkörper k_Ω, über dem die Fasermannigfaltigkeit derartig erklärt werden kann, daß $k_\Omega(u)$ für jeden Basispunkt u der Modulkörper der Faser über n ist. Der Modulkörper $k_\Omega(u)$ erfährt dann in 2.) für abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation eine klassenkörpertheoretische Kennzeichnung als abelsche Erweiterung eines gewissen, ebenfalls durch den Typ Ω bestimmten Teilkörpers K' in k_Ω .

[1] G.Shimura, Moduli and fibre systems of abelian varieties, Ann. of Math. 83, 294-338 (1966).

[2] G.Shimura - Y.Taniyama, Complex Multiplication of abelian varieties, Publ. of the Math. Soc. of Japan 6 (1961).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer:

R.Bueza, Saarbrücken
R.Berndt, Hamburg
Herr und Frau Böge, Heidelberg
Th.Bröcker, Regensburg
P.Draxl, Paris
W.Fischer, Bielefeld
E.Freitag, Münster
G.Frey, Heidelberg
P.Gabriel, Bonn
E.Gottschling, Mainz
P.Halmel, Bonn
G.Harder, Bonn
H.Helling, Bielefeld
K.Kiyek, Saarbrücken
M.Knebusch, Saarbrücken
M.Kneser, Göttingen
H.Lange, Göttingen
R.Langlands, Bonn
K.Legrady, Hamburg
E.Maus, Göttingen
H.J.Nastold, Münster
Rentschler, Straßburg
Rohlfs, Bonn
M.Stuhler, Göttingen
G.Tamme, Göttingen
T. tom Dieck, Saarbrücken

Vortragsauszüge:

E. Gottschling: Riemannsche Formen, Θ-Funktionen, Parametrisierung polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten durch die Siegelsche Halbebene, Einbettungen in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Es sei Δ ein Gitter im $\mathbb{C}^n$ mit Rang $\Delta = 2n$. Eine Riemannsche Form auf dem komplexen Torus $\mathbb{C}^n/\Delta$ ist eine alternierende $\mathbb{R}$-bilineare Form $\xi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ mit $\xi(\Delta, \Delta) \subset \mathbb{Z}$, $\xi(z,iw) = \xi(w,iz)$, $\xi(z,iz) \geq 0$, $z,w \in \mathbb{C}^n$. Eine holomorphe Funktion Θ im $\mathbb{C}^n$ heißt Thetafunktion zu Δ, wenn $\Theta(z+w) = \Theta(z)\exp[s_\omega(z)]$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\omega \in \Delta$ mit einer linearen Funktion s_ω gilt. Jede Thetafunktion induziert eine Riemannsche Form. Ein komplexer Torus, auf dem eine nicht ausgeartete Riemannsche Form existiert, ist eine abelsche Mannigfaltigkeit. Zwei Riemannsche Formen ξ, ξ' auf $\mathbb{C}^n/\Delta$ heißen äquivalent, wenn $k\xi = k'\xi'$ mit geeigneten $k,k' \in \mathbb{N}$ gilt. Jede Äquivalenzklasse von nicht ausgearteten Riemannschen Formen heißt Polarisation von $\mathbb{C}^n/\Delta$. Bei geeigneter Basiswahl im $\mathbb{C}^n$ besitzt Δ als Basis die Spalten einer Matrix $(Z\ e)$, wobei Z ein Punkt der Siegelschen Halbebene $\mathcal{H}_n$ ist und $e = \mathrm{diag}[e_1,\dots,e_n]$, $e_1 | e_2 | \dots | e_n$ die Diagonalmatrix aus den Elementarteilern von ξ. Durch Übergang zu einer äquivalenten Form kann $e_1 = 1$ angenommen werden. Zwei polarisierte abelsche

Mannigfaltigkeiten mit in dieser Weise normierten Riemannschen Formen sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Punkte in der Siegelschen Halbebene durch eine paramodulare Substitution auseinander hervorgehen. Mit Hilfe von Thetareihen wird gezeigt, daß jede nicht ausgeartete Riemannsche Form durch Thetafunktionen induziert wird. Die zu einem festen Exponentensystem s_ω, $\omega \in \Delta$ gehörigen Thetafunktionen bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum L der Dimension det(e). Der zum Exponentensystem ms_ω, $\omega \in \Delta$, $m \in \mathbb{N}$ gehörige Vektorraum L^m hat daher die Dimension $m^n \det(e) =: N+1$. Es sei $g_0, \ldots, g_N$ eine Basis von L^m. Für $m \geq 3$ wird durch $(z,Z) \mapsto (g_0(z,Z), \ldots, g_N(z,Z))$, $(z,Z) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{Y}_n$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}^n/\Lambda$ auf eine abelsche Mannigfaltigkeit $A_e(Z)$ im $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ gegeben. Die Nullstellenmengen der Thetafunktionen aus L^m liefern für $m \geq 3$ ein amples vollst. lineares System von Divisoren auf $A_e(Z)$, welches genau aus den Hyperebenenschnitten von $A_e(Z)$ besteht.

P. Gabriel: Der Chow-Punkt eines positiven Zyklus im projektiven Raum. Anwendung auf den Modulkörper einer polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit.

Jedem positiven Zyklus Z der Dimension r im projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ wird ein positiver Divisor D(Z) in $\mathbb{P}_n^{*(r+1)}$ zugeordnet. Dabei besteht der Träger von D(Z) aus allen Folgen $(H_0, \ldots, H_r) \in \mathbb{P}_n^{*(r+1)}$ von Hyperflächen, die den Träger von Z gemeinsam schneiden. Hat Z den Grad d, so hat D(Z) den Multigrad (d,d, ... ,d), d.h. es wird durch ein multihomogenes Polynom des Grades (d,d, ... ,d) beschrieben. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind die homogenen Koordinaten des Chow-Punktes $C(Z) \in \mathbb{P}_m$, $m = \binom{d+n}{n}^{r+1}$, von Z.

Sei nun V eine projektive Varietät und L ein sehr "ampler" invertierbarer Modul auf V mit $\dim \Gamma(V,L) = n+1$. Bezeichnet k den Grundkörper, so bestimmt jeder Isomorphismus $f : k^{n+1} \xrightarrow{\sim} \Gamma(V,L)$ eine Einbettung $f' : V \to \mathbb{P}_n$. Die Chow-Punkte C(f,V) der Bilder f'(V) spannen eine lokal abgeschlossene Untervarietät eines projektiven Raums $\mathbb{P}_m$ auf. Diese Varietät F(f,V) und ihr Abschluß $\overline{F(f,V)}$ in $\mathbb{P}_m$ liefern eine Invariante der Isomorphieklasse von (V,L). Insbesondere ist der kleinste Körper, worauf $\overline{F(f,V)}$ als Untervarietät von $\mathbb{P}_m$ definiert werden kann, von Bedeutung.

K. Legrady: Einführung des Definitionskörpers. Beweis von Theorem 5.1 in [1].

Zu jedem Typ $\Omega = (T, \mathfrak{M}, v_1, \ldots, v_s)$ mit Teilungspunkten gibt es einen algebraischen Zahlkörper k_Ω mit folgender charakteristischer Eigenschaft: Genau dann ist ein Automorphismus σ von $\mathbb{C}$ die Identität auf k_Ω, wenn mit $\mathfrak{P} = (A, \mathcal{C}; t_2, \ldots, t_s)$ auch $\mathfrak{P}^\sigma$ vom Typ Ω ist.

Für jedes $\mathfrak{P}$ vom Typ Ω ist k_Ω im Modulkörper von $\mathfrak{P}$ enthalten.

Beim Beweis wird die Existenz von Fasermannigfaltigkeiten abelscher Varietäten vom Typ Ω benutzt.

H. Helling: Konstruktion einer universellen Fasermannigfaltigkeit $\mathfrak{F} = \{V, W, h, f_{ab}\}$ elliptischer Kurven mit N-Teilungspunkten.

Herstellung eines singularitätenfreien Modells für den Basisraum V (Zariski-offen in einer projektiv normalen Kurve) mit Hilfe automorpher Formen zur Hauptkongruenzgruppe Γ_N der Stufe N : $V \cong \Gamma_N \backslash \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ = obere Halbebene). Konstruktion von W aus der geringfügig modifizierten Weierstraß-Normalform für Gleichungen vom Geschlecht 1. Reduktion des Definitionskörpers nach A. Weil. Ergebnis: $\mathfrak{F}$ ist über k_Ω definierbar und bis auf bireguläre Transformation über k_Ω eindeutig bestimmt und hat die folgenden Eigenschaften: Jede Faser ist vom Typ Ω; $\mathfrak{F}$ enthält jede PEL-Struktur vom Typ Ω bis auf Isomorphie genau einmal als Faser; die Koordinaten eines Punktes u von V erzeugen den Modulnkörper über k_Ω der Faser über u. Jede Fasermannigfaltigkeit von PEL-Strukturen elliptischer Kurven vom Typ Ω kann regulär in $\mathfrak{F}$ geworfen werden.

K. Kiyek: Konstruktion einer universellen Fasermannigfaltigkeit.

Es wird gezeigt: Zu vorgegebenem Typ $\Omega = (e; a_1, \ldots, a_s)$ gibt es eine Fasermannigfaltigkeit $\mathfrak{F} = (V, W, f, h, Y, f_1, \ldots, f_s)$ mit folgenden Eigenschaften: $V = H_n/\Gamma$ ist Zariski-offen und singularitätenfrei, desgleichen W. Ist $z \in H_n$, so ist $(A_e(z), \mathcal{C}_e(z), t_1(z), \ldots, t_s(z))$ (d.h. die durch den Typ Ω definierte polarisierte abelsche

Varietät) zu genau einem $\mathfrak{A}_u$ (Faser von $\mathfrak{F}$) isomorph ($u \in V$); es ist sogar jedes $\mathfrak{A}$ vom Typ Ω zu genau einem $\mathfrak{A}_u$ isomorph. Hierbei wird vorausgesetzt: $n > 1$, $\Gamma\,(=M_e(a_1,\ldots,a_s))$ hat keine Elemente endlicher Ordnung, operiert also fixpunktfrei auf H_n.

<u>G. Harder:</u> <u>Fasersysteme bei beliebigem Γ.</u>

In diesem Vortrag wurden Fasersysteme von einem Typ Ω betrachtet, für die die zugehörige Gruppe Γ nicht notwendig torsionslos ist. Es wurde gezeigt, daß man auf H_n/Γ die Struktur einer quasiprojektiven algebraischen Mannigfaltigkeit erklären kann und daß es zu jedem Fasersystem

$$\psi' : W' \to V'$$

mit normaler Basis V' und Fasern vom Typ Ω einen wohlbestimmten Morphismus

$$\psi : V' \to H_n/\Gamma$$

konstruieren kann, der die folgende Eigenschaft besitzt: Ist Ω^* ein "feinerer" Typ als Ω, so daß die zugehörige Gruppe Γ^* torsionslos ist und ist

$$\begin{array}{ccc} W'' & \longrightarrow & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V'' & \longrightarrow & V' \end{array}$$

ein Fasersystem vom Typ Ω^* über $W' \to V'$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V'' & \xrightarrow{\psi''} & H_n/\Gamma^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ V' & \xrightarrow{\psi'} & H_n/\Gamma \end{array}$$

kommutativ. Dabei ist ψ'' der Morphismus, der die universelle Familie auf H_n/Γ^*, die nach dem vorangehenden Vortrag existiert, in die gegebene Familie auf V'' überführt. Es wurde dann noch gezeigt, daß der Körper k_Ω als Definitionskörper für H_n/Γ gewählt werden kann.

M. Knebusch: Aussage des ersten Hauptsatzes (S.128) aus "Shimura, Taniyama, "Complex Multiplication of abelian Varieties", und Beispiele.

Zunächst wurde erklärt, was man unter dem Typ $(K, \{\varphi_i\}, \mathfrak{f})$ einer prinzipalen einfachen abelschen Varietät mit komplexer Multiplikation und Polarisation $\mathcal{P} = (A, i, \mathcal{C})$ zu verstehen hat. Auf der Menge der Isomorphieklassen der $\mathcal{P}$ von festem Typ über $\mathbb{C}$ hat man einen "Abstand" $\{\mathcal{P}_1 : \mathcal{P}\}$ mit Werten in der Gruppe $\mathcal{L}(K)$ der eindimensionalen nichtausgearteten positiv definiten hermiteschen Formen $(\mathfrak{b}, \rho)/\mathfrak{o}_K$ $\{\mathfrak{b}$ Ideal von $\mathfrak{o}_K$, ρ totalpositiv im totalreellen Teilkörper K_0 von K, $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}} = (\rho)\}$. Sei nun $k/\mathbb{Q}$ ein galoischer Zahlkörper, über dem eine vorgegebene Varietät $\mathcal{P} = (A, i, \mathcal{C})$ definiert ist und $k \supset K$. Dann umfaßt k auch den dualen Körper $K^* := \mathbb{Q}(\{\sum_{i=1}^{n} \xi^{\varphi_i} \mid \xi \in K\})$ und es gilt:

Genau dann hat zu einem $\sigma \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ die Konjugierte $\mathcal{P}^\sigma$ denselben Typ wie $\mathcal{P}$, wenn σ den Körper K^* festläßt, und genau dann ist überdies $\mathcal{P}^\sigma = \mathcal{P}$, wenn σ auch den Modulkörper k_0 von $(A, \mathcal{C})$ festläßt. Daher gibt $\sigma \longrightarrow (\mathcal{P}^\sigma : \mathcal{P})$ einen Monomorphismus

$$\mathrm{Gal}(k_0K^*/K^*) \hookrightarrow \mathcal{L}(K) .$$

Insbesondre ist k_0K^*/K^* abelsche Erweiterung. Der Hauptsatz besagt nun: Sei $(K^*, \{\psi_1, \ldots, \psi_m\})$ der duale Typ zu $(K, \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$. k_0K^*/K^* ist überall unverzweigt und für das Artinsymbol $(\ldots, k_0K^*/K^*)$ gilt:

$$[(\mathfrak{a}, k_0K^*/K^*)] = \Big(\prod_{1}^{m} \mathfrak{a}^{\psi_\alpha} , N_{K^*/\mathbb{Q}}\, \mathfrak{a}\Big) \in \mathcal{L}(K) .$$

Ist A eine elliptische Kurve, also $K/\mathbb{Q}$ imaginärquadratischer Körper, so ist $K^* = K$ und $k_0 = \mathbb{Q}(j(A))$ und der Kern des Artinsymbols besteht genau aus den Hauptidealen von K. Somit ist $K(j(A))/K$ der Hilbertsche Klassenkörper.

Indem man den Hauptsatz auf $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ mit l Primzahl $\neq 2$ und die Jacobische A zu der Kurve $y^2 = 1 - x^l$ mit geeigneter Operation von $\mathfrak{o}_K$ und irgend einer über $\mathbb{Q}$ definierten Polarisation $\mathcal{C}$ anwendet, erhält man, weil jetzt $k_0K^* = K^*$, einen Satz von Stickelberger (Math. Annalen 37, 1890): Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathbb{Z}[\zeta]$

gibt es ein $\mu \in \mathbb{Z}[\zeta]$, so daß $N\mathfrak{a} = \mu\bar{\mu}$ und $\prod_{1}^{g} \mathfrak{a}^{\varphi_i} = (\mu)$ ist. Dabei ist $g = \frac{l-1}{2}$ (= das Geschlecht der Kurve) und $\varphi_i \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ durch $\varphi_i(\zeta^i) = \zeta$ festgelegt.

R. Baeza: Konstruktion von abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation.

In diesem Vortrag wurde gezeigt, daß ein System (F , $\{\varphi_i\}$), das aus einem Zahlkörper F von Grad 2n über $\mathbb{Q}$ und n verschiedenen Isomorphismen φ_i von F in $\mathbb{C}$ besteht, genau dann ein CM-Typ ist, wenn F eine total imaginäre quadratische Erweiterung K eines total reellen Körpers K_o enthält, so daß die Isomorphismen φ_i ($1 \leq i \leq n$) über K nicht paarweise konjugiert komplex sind. In einer abelschen Varietät (A,i) von Typ (F, $\{\varphi_i\}$) kann man einen 2n-dimensionalen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathfrak{m}$ in F finden, so daß A analytisch isomorph zu $\mathbb{C}^n/D(\mathfrak{m})$, ist, mit $D(\mathfrak{m}) = \{(\alpha^{\varphi_1}, \dots, \alpha^{\varphi_n}) \mid \alpha \in \mathfrak{m}\}$. Ist nun (K , $\{\varphi_i\}$) ein CM-Typ (K total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Körpers K_o) und $\mathbb{C}^m/D(\mathfrak{m})$ die abelsche Varietät dazu, so entsprechen die nicht entarteten Riemannschen Formen E auf $\mathbb{C}^m/D(\mathfrak{m})$ mit der Eigenschaft $E(S(\zeta)u,v) = E(u,S(\bar{\zeta})v)$ $\forall u,v \in \mathbb{C}^m$, $\zeta \in K$ $(S(\zeta) = \mathrm{diag}[\zeta^{\varphi_1}, \dots, \zeta^{\varphi_m}])$ den Elementen $\zeta \in K$ mit $-\zeta^2 \in K_o$ total positiv und $\mathrm{Im}\,\zeta^{\varphi_i} > 0$. Dann sieht die Form E folgendermaßen aus:

$$E(u,v) = \sum_{i=1}^{m} \zeta^{\varphi_i}(u_i\bar{v}_i - \bar{u}_i v_i) \quad \forall \ u,v \in \mathbb{C}^m .$$

Zuletzt wurde gezeigt, daß für einen primitiven CM-Typ (K , $\{\varphi_i\}$) mit abelscher Varietät (A,i) gilt: K ist genau dann ein Definitionskörper für (A,i), wenn A über k definiert ist und $k \supset K^*$ (dabei ist K^* der Körper des dualen Typs (K^* , $\{\psi_i\}$) ~~sei~~ zu (K , $\{\varphi_i\}$)).

J. Ritter: $\mathfrak{a}$-Multiplikationen von abelschen Mannigfaltigkeiten über beliebigen Körpern.

Betrachtet werden abelsche Mannigfaltigkeiten über k mit: $F \subset \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$, wobei F Zahlkörper ist. Es gilt dann: $|F:\mathbb{Q}| \leq 2\dim A$, und Gleichheit impliziert, daß F in $\mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}$ sein eigener Zentralisator ist. Sei nun die Gleichheit erfüllt und außerdem

$F \cap \operatorname{End} A = R$ der Ring aller ganzen Zahlen von F; (A,F) heißt dann prinzipal. Eine $\mathfrak{a}$-Multiplikation zwischen (A,F) und (A',F) ist eine Isogenie $\lambda_{\mathfrak{a}}: (A,F) \xrightarrow[R]{} (A'_{\mathfrak{a}}, F)$, so daß $k(\lambda_{\mathfrak{a}} x) = k(\mathfrak{a} x)$ ist für einen (jeden) allgemeinen Punkt $x \in A$. Es wird gezeigt: (0) A' ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt

(1) $\nu(\lambda_{\mathfrak{a}}) = N(\mathfrak{a})$ (2) $\lambda_{\mathfrak{a}} \lambda_{\mathfrak{b}} = \lambda_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$

(3) $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \Leftrightarrow k(\mathfrak{a} x) \supset k(\mathfrak{b} x) \Leftrightarrow \exists \mu: A'_{\mathfrak{a}} \to A'_{\mathfrak{b}}$ mit $\mu \lambda_{\mathfrak{a}} = \lambda_{\mathfrak{b}}$

(4) $\operatorname{Hom}_R(A, A'_{\mathfrak{a}}) = \lambda_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^{-1}$; jede Isogenie ist eine Multiplikation.

(5) $A'_{\mathfrak{a}} \underset{R}{\cong} A'_{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\gamma$ mit einem $\gamma \in R$.

Im Fall der Charakteristik 0 hat man: $C^n/D(\mathfrak{b})$ ist eine $\gamma\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$ - Transformation von $C^n/D(\mathfrak{a})$ (mit $\gamma \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$) und jede Isogenie hat diese Gestalt. (Die beiden Tori sind dabei vom Typ $(F, \{\varphi_i\})$; $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind Ideale aus F (prinzipale Tori)). Insbesondere gibt es zu einem Typ genau h(=h(F) = Klassenzahl) nichtisomorphe Tori.

<u>G. Frey:</u> <u>Separable Isogenien als $\mathfrak{a}$-Multiplikationen.</u>

Es wurde folgender Satz bewiesen: (Voraussetzungen wie oben) Sei λ eine separable Isogenie von (A,F) auf (A',F). Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$ des Rings R der ganzen Zahlen von F, so daß λ über R isomorph zu $\lambda_{\mathfrak{a}}$ ist.

<u>R. Berndt:</u> <u>Primidealzerlegung des $N_{\mathfrak{P}}$-ten Potenzhomomorphismus.</u>

Einige Tatsachen aus Shimuras Theorie der Reduktion mod $\mathfrak{p}$ wurden zusammengestellt und der Shimurasche Beweis des folgenden Satzes wurde referiert:

Sei $(F, \{\varphi_i\})$ ein CM-Typ, $(K^*, \{\psi_\alpha\})$ das Duale dazu und (A,i) eine abelsche Mannigfaltigkeit vom Typ $(F, \{\varphi_i\})$, definiert über einem Zahlkörper k. (A,i) sei prinzipal. Ferner seien p eine Primzahl, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K^*, das p teilt und $\mathfrak{P}$ ein Primideal von k, das $\mathfrak{p}$ teilt. Dabei sei p so beschaffen, daß A keinen Defekt für $\mathfrak{P}$ (*gute Reduktion für $\mathfrak{P}$) hat und p in F unverzweigt ist. $(\tilde{A}, \tilde{i})$ bezeichne die Reduktion von (A,i) mod $\mathfrak{P}$, $\pi_{\mathfrak{P}}$ den $N_{\mathfrak{P}}$-ten Potenzhomomorphismus von $\tilde{A}$ auf $\tilde{A}^{N_{\mathfrak{P}}}$ und $\tilde{\pi}$ den

$N\gamma$-ten Potenzendomorphismus von $\tilde{A}$. Dann gilt:
(π1) $\prod \gamma^{\psi_\alpha}$ ist ein Ideal von F und $(\tilde{A}^{N\gamma}, \tilde{i}^{N\gamma}, \pi_\gamma)$ ist eine $\prod_\alpha \gamma^{\psi_\alpha}$ - Transformation von $(\tilde{A}, \tilde{i})$.
(π2) Es gibt ein $\pi_0 \in F$ mit $\tilde{i}(\pi_0) = \pi$ und es gilt

$$(\pi_0) = \prod_\alpha (N_{k/K^*} \gamma)^{\psi_\alpha}$$

H. Lange: Polarisierte abelsche Varietäten vom Typ $(K, \{\varphi_i\})$.

Es wurde der Typ einer polarisierten abelschen Varietät definiert und ein Kriterium für die Isomorphie zweier polarisierter abelscher Varietäten mit derselben zugrundeliegenden Varietät vom Typ $(K,(\varphi_i))$ bewiesen, sowie ein Kriterium für die Existenz einer polarisierten abelschen Varietät von vorgegebenem Typ angegeben.

U. Stuhler: Das Transformationsverhalten polarisierter abelscher Varietäten vom gleichen Typ.

Einem Tupel polarisierter abelscher Varietäten P, P_1 vom selben verfeinerten CM-Typ $(K,(\varphi_i),f_0)$ werden eine Invariante $\{P_1 : P\} = (\mathfrak{a}, f(\lambda))$, nämlich eine bestimmte Klasse hermitescher Formen, zugeordnet; dabei ist $\lambda : (A,i) \to (A_1,i_1)$ eine $\mathfrak{a}$-Multiplikation. Es wurden einige für den Hauptsatz nützliche Propositionen bewiesen.

E. Maus: Beweis des Hauptsatzes der komplexen Multiplikation abelscher Varietäten.

Der Hauptsatz lautet: Sei $(K^*,(\varphi^*))$ ein primitiver CM-Typ und $(K,(\varphi))$ der duale dazu. H_0 bestehe aus denjenigen Idealen von K^*, zu denen ein $\mu \in K$ existiert mit $\prod \mathfrak{a}^{\varphi_i^*} = (\mu)$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \mu\bar{\mu}$. (Dann ist H_0 eine mod 1 erklärte Idealgruppe aus K^*). Sei (A,i) eine abelsche Varietät vom Typ $(K,(\varphi))$, $\mathcal{C}$ eine Polarisation von A und sei k_0 der Modulkörper von $(A,\mathcal{C})$. Dann ist k_0K^* der (unverzweigte) Klassenkörper über K^* zur Idealgruppe H_0.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf die Reduktion abelscher

Varietäten. Daher ist zuerst nachzuweisen, daß alle auftretenden algebraisch-geometrischen Objekte o.E. so gewählt werden können, daß sie über einem algebraischen Zahlkörper k erklärbar sind; k enthalte K*. Die Berechnung von $[(\mathfrak{a}, k_0K^*/K^*)]$ (s. S. 6) für einen Frobenius $\sigma_{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{y}, k_0K^*/K^*)$ benutzt einerseits das Resultat aus S. 9, wonach der $\mathfrak{N}(\mathfrak{y})$-Potenzierungshomomorphismus $\pi_{\mathfrak{y}}$ eine $\prod \mathfrak{y}^{\varphi_i^*}$-Multiplikation ist, und andererseits die Berechnung inverser Bilder von Zyklen unter $\pi_{\mathfrak{y}}$. Man erhält

$$[\sigma_{\mathfrak{y}}] = (\prod_i \mathfrak{y}^{\varphi_i^*}, \mathfrak{N}(\mathfrak{y})) .$$

Der Rest des Beweises folgt aus der Klassenkörpertheorie.

E.Maus, Göttingen