MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 18/1971

Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik

25.4. bis 1.5.1971

Zum dritten Male bereits konnte eine Tagung "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" in Oberwolfach stattfinden. Sie stand wieder unter der Leitung von B.Brosowski (Göttingen) und E.Martensen (Darmstadt). Bemerkenswert war, daß auch diesmal der Kreis der behandelten Probleme gegenüber den beiden vorhergehenden Tagungen zu diesem Thema erweitert worden ist. Insbesondere erstreckten sich die Vorträge auf Probleme der Reaktorphysik, Meteorologie, Strömungsphysik, Elastizitätstheorie, Bestimmung der Figur der Erde und auf Probleme mit freiem Rand.

Die engen Beziehungen zwischen physikalischen Gegebenheiten, der mathematischen Theorie und der numerischen Behandlung von Problemen wurde wieder an vielen Stellen offenkundig. Bemerkenswert war, daß bei einem großen Teil der in diesem Jahr gehaltenen Vorträge numerische Lösungswege für die besprochenen Probleme im Vordergrund standen.

Durch den auch diesmal bewußt klein gehaltenen Kreis der Teilnehmer (32 mit 22 Vorträgen) wurden eingehende Diskussionen und fruchtbarer Gedankenaustausch ermöglicht. Ein bemerkenswertes Novum auf dieser Tagung war, daß ein Diskussionsabend über "die Situation der Mathematischen Physik und Angewandten Mathematik" veranstaltet worden ist.

Es wurden insbesondere Fragen der Studienplangestaltung und des Vorlesungsangebotes für denjenigen Kreis von Mathematikstudenten erörtert, die beabsichtigen, als wissenschaftliche Mitarbeiter in Forschungsinstituten tätig zu sein, die auf Forschungsgebiete orientiert sind, wo der Einsatz mathematischer Verfahren zur Lösung physikalischer Probleme im Vordergrund steht.

Dem Institut und seinem Personal gebührt herzlicher Dank dafür, daß es den harmonischen Verlauf der Tagung ermöglichte.

Teilnehmer

M.Andrié, Bonn
P.Biermann, Göttingen
B.Brosowski, Göttingen
F.Ebersoldt, Jülich
E.Grafarend, Bonn
K.P.Hadeler, Erlangen
K.U.v.Hagenow, München
M.Haimovici, Iasi
K.v.Haselberg, Offenbach
K.-H.Hauer, Göttingen
R.Kreß, München
R.Kußmaul, Stuttgart
E.Martensen, Darmstadt
E.Meister, Tübingen
F.Natterer, Hamburg
D.C.Pack, Glasgow
R.Rautmann, Karlsruhe
M.Reeken, Genf
H.Sohr, Tübingen
B.Steffen, Göttingen
W.Törnig, Jülich
W.Velte, Würzburg
A.I.van de Vooren, Groningen
H.L.de Vries, München
H.Wacker, München
N.Weck, Bonn
R.Wegmann, München
H.J.Weinitschke, Berlin
W.Wendland, Darmstadt
J.Werner, Hamburg
H.Wittmeyer, Linköping
L.Wuytack, Löwen

Vortragsauszüge

A.I. van de Vooren: Die Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen für die Strömung einer ebenen halb-unendlichen Platte oder einem parabolischen Zylinder entlang.

Es wird ein Randwertproblem für die Navier-Stokesschen Gleichungen formuliert, womit die Strömung um einem para= bolischen Zylinder (Sonderfall: die halbunendliche ebene Platte) exakt beschrieben wird. Dies ist möglich durch Ein= führung von parabolischen Koordinaten, wobei das Gebiet ein Kwadrant wird. Die Randwerte ins Unendliche müssen mit ein Verfahren von inneren und äusseren Entwicklungen bekommen werden, wobei die äussere Entwicklung korrespondiert mit der Potentialströmung und die innere mit der Grenzschicht. Das Randwertproblem ist numerisch gelöst worden mit einem Einzelschritt-Relaxationsverfahren. Das Kwadrant ist auf passender Weise nach einem Rechteck transformiert worden. Für beliebige Reynoldssche Zahlen werden Ergebnisse für die Schubspannung am Zylinder, den Widerstand und den Druck ge= zeigt.

R. Kreß: Ein Neumannsches Problem bei kraftfreien Feldern

Vektorfelder v im R^3, die einer der beiden äquivalenten Gleichungen $[\mathrm{rot}\ v\ ,\ v] = 0$ bzw. $\mathrm{rot}\ v + \alpha v = 0$ ge= nügen, wobei α ein im allgemeinen ortsabhängiger Skalar bedeutet, heißen kraftfreie Felder. Physikalisch sind sie zu verstehen als Magnetfelder mit verschwindender Lorentz= kraft. Es wird ein Existenzbeweis geführt für ein Neumann= sches Problem, bei dem es sich darum handelt, in einem weitgehend allgemeinen Definitionsbereich B Lösungen von $\mathrm{rot}\ v + \alpha v = 0$ bei konstantem α mit vorgeschriebenen Normalkomponenten auf dem Rande ∂B zu finden.

E. Grafarend: Die reale Figur der Erde als nichtlineares potentialtheoretisches Problem mit freiem Rand

Die charakteristische Randwertaufgabe der Poisson-Laplace-Gleichung, mit der die reale Figur der Erde beschrieben wer= den kann, wird als typisch nichtlinear und frei klassifiziert. Es wird eine Lösungstheorie mit nichtlinearen Integral= gleichungen für die singulären Dichten einer einfachen und einer Doppelschicht vorgeführt. Das dabei auftretende typische Problem der sog. freien Oberflächenintegrale wird exakt gelöst.

Literatur:

E.Grafarend und W. Niemeier: The free nonlinear boundary value problem of physical geodesy, Bull. Geodesique, J. Int. Ass. Geodesy, Paris 1971

B. Steffen: Bemerkung zu Problemen mit freiem Rand

Für zweidimensionale Probleme mit freiem Rand wird ein Mass für die Näherung eines Randes an einen anderen vorgeschlagen und gezeigt, daß gewisse häufig verwandte Verfahren zur Lösung von freien Randproblemen der Laplace-Gleichung eine gute Näherung an die Lösung erkennen können.
Unter gewissen Voraussetzungen gilt nämlich:
Die Tangentialableitung der Lösung eines Neumannproblems zu $\Delta u=0$ bzw. die Normalableitung eines Dirichletproblems sind stetig gegen eine Variation des Randes.

M. Haimovici: Über die Randwertprobleme der partiellen elliptischen Differentialgleichungen

Es handelt sich um die Integration einer elliptischen Diffe= rentialgleichung, wenn die unbekannte Funktion auf dem Rande $\dot{D}$ des Gebietes als blos quadratisch summierbar vorgegeben ist. Zunächst konstruiert man eine Funktion w, mit den auf den Rande vorgeschriebenen Werten und mit den Bedingungen $w \in W_2^{(1)}(D)$, $w \in L_2(\bar{D})$. Diese Funktion wird dann mittels Polynome P_N approximiert, so daß $\| w - P_N \|^2_{L_2(D)}$ +

$$+ \| w - P_N \|^2_{L_2(S)} + \| w - P_N \|_{W_2^{(1)}(D_N)} < \varepsilon$$

wobei $\bar{D}_N \in D$ und $\bar{D}_N \to D$. Dann wird eine Funktion u_N konstruiert, die auf $\dot{D}$ dieselben Werte als P_N annimmt. Es wird gezeigt, daß diese gegen eine Funktion u strebt, so daß $\| u - u_N \|_{L_2(D)} \to o$. Dieselbe Grenze u ist in D differenzierbar und eine Lösung der Gleichung und in $\bar{D}$ quadratisch summierbar. Doch kann das Riemann'sche Integral unendlich sein, wie es z.B. in dem bekannten Beispiel von Hadamard vorkommt.

K. v. Haselberg: <u>Initialisation, ein Anfangswertproblem hyperbolischer Differentialgleichungen aus der numerischen Wettervorhersage.</u>

Die numerische Wettervorhersage erfordert, das Anfangswert=problem eines Systems hyperbolischer Differentialgleichungen zu lösen. Die vom Problem her unabhängigen Anfangsdaten erfüllen jedoch in Wirklichkeit sehr angenähert noch gewisse Bedingungen, die bis heute nicht genau zu formulieren waren. Schon empirisch gewonnene Anfangswerte verlegen diese so stark, daß die Modellatmosphäre mit heftigen Ausgleichsvor=gängen reagiert, die den realen Bewegungsablauf völlig über=decken. Für ein vereinfachtes Modell werden solche Bedingungen aufgewiesen. Über die Anwendung dieser Bedingungen auf reali=stischere Modelle und die dabei auftretenden Probleme wird be=richtet.

H. Wacker: <u>Behandlung von Nichtlinearitäten in Banach-Räumen.</u>
(zus. mit M. Feilmeier)

Die Fixpunktgleichung Ax=x (1) soll in einem Banach-Raum mittels Einbettung gelöst werden. Dabei geht (1) über in die Problemfamilie (2): $x(s)=A(s,x)$, $s \in [0,1]$. x(0) sei be=kannt b.z.w. leicht berechenbar und für s=1 ergebe sich wieder (1).

Die Fortführung der Lösung für wachsendes s führt - etwa über das Newtonverfahren - auf eine Folge linearer Probleme. Für die Fortsetzbarkeit der Kette werden globale und lokale Kriterien angegeben.
Der Fall, daß die Kette nicht weiterzuführen ist oder sich Lösungen abspalten, wird für vollstetige b.z.w. abgeschlossene Operatoren behandelt. Für eine Reihe von Problemklassen liegen bereits numerische Erfahrungen vor.

F. Ebersoldt: Lösungen einer allgemeinen Neutronen-Transport-Gleichung in Verbindung mit Problemen der Reaktor=physik.

Die Bestimmung des stationären Neutronenfeldes und der kritischen Masse eines Kernreaktors kann erfolgen durch Lösung einer line=aren, homogenen Integro-Differentialgleichung für bestimmte Werte eines freien Parameters (verallgemeinertes Eigenwertpro=blem). Bei sehr allgemein gehaltener Formulierung des Problems wird im Rahmen einer L^2-Theorie untersucht, welche der Eigen=lösungen technisch realisierbar sind und zu physikalisch signifikanten Eigenwerten gehören. Ferner wird die Frage der Eindeutigkeit des kritischen Zustandes untersucht.

L. Wuytack: Zwei neue Verfahren zur Extrapolation mittels rationaler Funktionen.

Es werden zwei neue Extrapolationsverfahren angegeben. Die beiden Verfahren sind entwickelt aus dem Gebrauch von Ketten=brüchen als interpolierende Funktionen und unendlich als Extrapolationspunkt. Einige Beziehungen mit dem Algorithmus von Bulirsch und Stoer (zur rationalen Extrapolation) und dem ε- Algorithmus (zur Bestimmung der Limes einer Folge) werden gezeigt. Einige Beispiele illustrieren den Gebrauch dieser Verfahren und ihre Konvergenz.

P. Biermann: Numerische Behandlung sehr großer Matrizen im Zusammenhang mit der Lösung elliptischer Systeme partieller Differentialgleichungen.

Eine Lösungsmethode wird beschrieben, um zweidimensionale stationäre Unterschallströmungen beim Massenaustausch enger Doppelsterne zu berechnen. Durch Einführen von Differenzen= quotienten in einem kartesischen Gitterpunktnetz sowie durch Linearisieren bezüglich einer Anfangslösung bekommt man ein Newton-Verfahren analoges Iterationsverfahren. Bei jedem Iterationsschritt müssen zur Bestimmung der Korrekturen große lineare Gleichungssysteme aufgelöst werden. Durch ge= schickte Auswahl von Untermatrizen bekommt man eine große Matrix, bei der nur 5 diagonale Reihen von Untermatrizen be= setzt sind, für ein 13 Punkte Differenzennetz um jeden Punkt. Auf diese Untermatrizen wird das Gaußverfahren angewandt. Auf einer IBM 360/91 benötigt das Verfahren 10 Sekunden pro Iterationsschritt bei 750 x 750 Matrizen, 2 Minuten bei 1750 x 1750 Matrizen.

M. Andrié: Dynamische Systeme und Symmetriegruppen

Zu einem Hamiltonschen dynamischen System auf einer 2N-dimen= sionalen symplektischen Mannigfaltigkeit existiere eine Lie= algebra L von Integralen der Bewegung, die 2N-1 funktional unabhängige Integrale enthält. Sind die Integralkurven der zugehörigen Hamiltonschen Vektorfelder vollständig, so existiert eine globale zusammenhängende Symmetriegruppe G, die auf einer Zusammenhangskomponente einer Fläche konstanter Energie transitiv operiert. Der Raum der Bahnen auf dieser Fläche definiert eine (2N-2)-dimensionale symplektische Mannigfaligkeit. Ist G kompakt, so erhalten wir ein Faser= bündel mit den Bahnen als Fasern. Diese sind diffeomorph zu S^1. Die Mannigfaltigkeit der Bahnen ist eine Überlagerung eines Orbits von G im Dualraum L'. Die Überlagerungsab= bildung ist äquivariant bezüglich der koadjungierten Dar= stellung von G in L'. Beim 3-dim. harmon. Oszillator existiert die globale Symmetriegruppe SU(3). Die lokale Symmetriegruppe SO(4) beim Keplerproblem kann nicht global erweitert werden.

K.-H. Hauer: Dreidimensionale freie Randwertprobleme mit axialer Symmetrie

Voraussetzungen: Sei $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi) \neq 0$ eine Parameterdarstellung einer Kurve C, wie in Abb. 1 dargestellt. Die Normale von C in den Punkten s_1 und s_2 möge mit der y-Achse zusammenfallen. G sei das von der y-Achse und der Kurve C begrenzte Gebiet. $G^* = \{x \geq 0\} \setminus G$.

Abb.1

Satz: Sei $u=u(x,y)$ eine Funktion, welche in G^* die Differential=gleichung $u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x} u_x = 0$ erfüllt und deren Gradient im Un=endlichen glm. gegen eine vektorielle Konstante $(u_{\infty,x}, u_{\infty,y})$ kon=vergiert. Dann erfüllen die Tangentialableitung $u_t \cdot (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ und die Normalableitung $u_n \cdot (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ auf der Kurve C folgende Inte=gralgleichung:

$$(1)\quad u_n(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(\varphi,\psi)\, u_t(\psi)\,d\psi = -2u_{\infty,x}\dot{x}(\varphi) - 2u_{\infty,y}\dot{y}(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} L(\varphi,\psi)\, u_n(\psi)\,d\psi$$

Umgekehrt gilt: Seien $(u_{\infty,x}, u_{\infty,y})$ eine vorgegebene Konstante, u_t und u_n auf C stetige Funktionen, so daß (1) erfüllt ist. Dann existiert ein $u=u(x,y)$ mit $u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x} u_x = 0$ in G^*, dessen Gradient im Unendlichen glm. gegen die vorgegebene Konstante konvergiert und auf C die Tangentialableitung $u_t(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ und die Normalableitung $u_n(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ besitzt.

Anwendung: Das freie Randwertproblem, die Oberfläche einer rotierenden, axialsymmetrischen Polytropen zu bestimmen, lautet: Es sind ein Rand C, Funktionen u und u^* zu bestimmen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(2)\quad u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x} u_x = -(u + \tfrac{1}{2}\cdot c\cdot x^2)^n \text{ in G (vgl. Abb. 1)}$$

$$(3)\quad u^*_{xx} + u^*_{yy} + \frac{1}{x} u^*_x = 0 \text{ in } G^*$$

$$(4)\quad u = -\tfrac{1}{2}\cdot c\cdot x^2,\quad u = u^*,\quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} \text{ auf C (c und n sind phys. Konst.)}$$

(5) $u(0,0) = 1$

Bedingung (3) läßt sich durch Formel (1) in eine "Randbedingung" umformulieren.

Formeln für die Kerne K und L:

$$K(\varphi,\psi) = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[x(\varphi)\cos\alpha - x(\psi)\right] \dot{y}(\varphi) - \left[y(\varphi)-y(\psi)\right] \cos\alpha\, \dot{x}(\varphi) \right\} x(\psi)\; A(\varphi,\psi)\,d\alpha$$

$$L(\varphi,\psi) = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[x(\varphi) - x(\psi)\cos\alpha\right] \dot{x}(\varphi) + \left[y(\varphi)-y(\psi)\right] \dot{y}(\varphi) \right\} x(\psi)\; A(\varphi,\psi)\,d\alpha$$

$$A(\varphi,\psi) = \left(\left[x(\varphi)\right]^2 - 2x(\varphi)x(\psi)\cos\alpha + \left[x(\psi)\right]^2 + \left[y(\varphi)-y(\psi)\right]^2 \right)^{-3/2}$$

K.P. Hadeler: Existenzsätze für inverse Eigenwertprobleme

Es wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das folgende inverse Eigenwertproblem gezeigt.

Problem: Sei $A = (a_{jk})$ eine reell-symmetrische Matrix der Ordnung n. Gesucht ist eine reelle Diagonalmatrix V, so daß A+V vorgeschriebene reelle Eigenwerte $\bar{s}_1, \dots, s_n$ hat.

Satz: Sei

$$g_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}|, \quad j=1, \dots, n$$

und $s_j - s_{j+1} > 2g_j$, $s_j - s_{j+1} > 2g_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$

Dann besitzt obiges Problem in

$$\left\{ V = (v_j \;\; {}_{jk}) : s_1 \geq v_1 \geq \dots \geq v_n \geq s_n \right\}$$

genau eine Lösung. Diese erfüllt

$$|v_j - s_j| \leq g_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Der Beweis wird mit Hilfe des topologischen Abbildungsgrades (Homotopie-Invarianz, Rothesches Eindeutigkeitsprinzip) geführt.

N. Weck: Zur Lösungstheorie der Maxwellschen Gleichungen für anisotrope, inhomogene Medien

Es seien S ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, $\mu(x)$, $\varepsilon(x)$ gleichmäßig positiv definite Matrizen, $\omega \in \mathbb{C}$. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E - i\omega\mu H &= J \\ \operatorname{rot} H - i\omega\varepsilon E &= K\,, \quad n \times E\,|_{\partial S} = 0\,. \end{aligned}$$

Dieses Randwertproblem kann auf den Fall $J, K \in D_0$ (quellenfreie Felder) reduziert werden, und es läßt sich für $\omega = i$ lösen. Die Lösung E hat die Form $E = S_{\mu,\varepsilon} J + T_{\mu,\varepsilon} K$ mit linearen Operatoren $S_{\mu,\varepsilon}$, $T_{\mu,\varepsilon} : D_0 \to L_2$. Es wird gezeigt, daß für beliebiges ω die Fredholmsche Alternative gilt, falls $T_{\mu,\varepsilon}$ vollstetig ist, und daß dies genau dann gilt, wenn $T_{\mu,\varepsilon}$ für $\mu = \varepsilon = \mathrm{id}$ (isotroper Fall) vollstetig ist. Letzteres ist für Gebiete mit stückweise glattem Rand richtig.

H.L. de Vries: Eine Eigenwertabschätzung bei nichtnormalen Matrizen

(zusammen mit R. Kreß und R. Wegmann)

Sei $A = (a_{ij})$ eine n x n Matrix mit der konjugierten Transponierten A^* und der euklidischen Norm

$$\|A\| := \Big(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}$$

Von SCHUR stammt die Ungleichung

$$\sum_i |\lambda_i|^2 \leqq \|A\|^2 \tag{1}$$

für die Eigenwerte λ_i von A. Gleichheit in (1) herrscht genau dann, wenn A normal ist, d.h. wenn $D := AA^* - A^*A$ verschwindet.

Die Ungleichung (1) wird verschärft zu

$$(2) \qquad \sum_i |\lambda_i|^2 \leqq (\|A\|^4 - \tfrac{1}{2}\|D\|^2)^{1/2} .$$

Für nichtnormale Matrizen A gilt Gleichheit in (2) genau dann, wenn $A = \alpha(vw^* + rwv^*)$ ist mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ und einem Paar orthonormierter Vektoren v und w. Die Ungleichung (2) ist die bestmögliche Abschätzung für $\sum |\lambda_i|^2$ durch $\|A\|$ und $\|D\|$.

K.U. von Hagenow: <u>Differenzenverfahren zur Lösung eines fast parabolisch ausgearteten Systems hyperbolischer Differentialgleichungen</u>

Es wird ein explizites Differenzenschema für das System von Differentialgleichungen

$$\lambda^2 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + A = o$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} = Q$$

angegeben für den Fall $\lambda^2 \ll 1$.

Neben der physikalischen Herkunft des Systems werden Stabilität und Konvergenz des Verfahrens diskutiert.

Abschließend werden numerische Beispiele angegeben und z.T. mit explizit angebbaren Lösungen des Systems verglichen.

H. Wittmeyer: <u>Iterative Lösung eindimensionaler Eigenwert-Variationsprobleme</u>

Der eindimensionale Integrand des Variationsproblemes sei quadratisch homogen in n Funktionen und ihren Ableitungen nach der Integrationsvariablen. Jede dieser n Funktionen möge in dem vom Eigenwert freien Teil mit genau der m-ten Ableitung als höchster vorkommen. Das zur Lösung vorgeschlagende Iterationsverfahren hat im Prinzip die gleichen Konvergenzeigenschaften wie die gebrochene Iteration von H. Wielandt [1] mit schrittweise verbessertem Näherungswert für den Eigenwert. Diesem gegenüber hat es jedoch folgende Vorteile:

1. Kleine Differenzen großer Zahlen werden vermieden.
2. In dem neuen Verfahren braucht man bei jedem Iterationsschritt nur (n.m) homogene Anfangswertprobleme zu lösen, während man bei der gebrochenen Iteration jeweils zusätzlich ein inhomogenes Anfangswertproblem lösen muß.

Als Beispiel wird ein schwingender Timoshenkobalken behandelt.

Literatur:

[1] H. Wielandt, Beiträge zur mathematischen Behandlung komplexer Eigenwertprobleme V. Bestimmung höherer Eigenwerte durch gebrochene Iteration. AVA-Bericht (Göttingen) B 44/J37 (1944).

H. Sohr: Limesräume und Evolutionsgleichung

Zu einem gerichteten System von normierten Räumen kann ein Limesraum konstruiert werden, der eine Verallgemeinerung darstellt sowohl des unendlichen Tensorproduktes J.v. Neumanns als auch der approximierenden Banachraumfolgen von Trotter. In einem solchen Raum erhält man Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen. Weiter können mit Hilfe dieser Limesräume schwache Lösungen von Evolutionsgleichungen $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ (also insbesondere von Schrödingergleichungen) konstruiert werden unter Abschwächung der sonst üblichen Voraussetzung der Konstanz des Definitionsbereiches von A(t). Prinzip: Die Evolution eines Zustandes führt aus dem Ausgangsraum hinaus in einen Limesraum hinein und wird dann zurückprojiziert. Auf ähnliche Weise erhält man auch schwache Lösungen einer "gestörten" Gleichung der Form $\dot{\varphi} = (A+B)\varphi$.

H. J. Weinitschke: Bemerkungen über Wärmespannungen

Wärmespannungen bei großen Temperaturänderungen und endlichen Deformationen von Platten und Schalen sind in der Aeroelastizi= tät und im Kernreaktorbau von erheblichem Interesse und sind bisher wenig untersucht worden. Die relevanten nichtlinearen Randwertprobleme für flache Schalen bei quasistationärer mechanisch= thermischer Belastung werden formuliert und Methoden zu ihrer Lösung angegeben. Störungsrechnung liefert nur für sehr kleine Werte der Parameter hinreichend genaue Ergebnisse, für größere Belastungen muß man die Gleichungen numerisch lösen. Hier haben sich insbesondere Verfahren der Einbettung zusammen mit Newton-Verfahren bewährt, bei geeigneter Handhabung auch in der Nähe von singulären Stellen (Beullasten). Bei extrem großen Werten der Parameter erhält man die Lösung durch Methoden der asymptotischen Integration. Am Beispiel des Plattenstreifens läßt sich zeigen, daß die bei der Methode der inneren und äußeren Entwicklung auf= tretenden Konvergenzfragen exakt beantwortet werden können.

R. Rautmann: Anwendung globaler Existenz- und Abschätzungs= sätze für gewöhnliche Differentialgleichungen auf eine Anfangsrandwertaufgabe der Hydrodynamik

Für Richtungsfelder, die funktional von der Schar ihrer Integral= kurven abhängen, läßt sich unter einer allgemeinen Voraussetzung über die Art dieser Abhängigkeit die Existenz der Integralkurven im Großen beweisen. Damit wird ein Ergebnis aus einer Arbeit von T.Kato (Arch.rat.mech.An. 25(1967),S.188-200) im Anschluß an etwa gleichzeitig durchgeführte Untersuchungen des Referenten erweitert. Unter verschärften Annahmen können die Integralkurven iterativ und mit Angabe von Fehlerschranken berechnet werden. Wir wenden dieses allgemeine Verfahren an, um die globale Lösbarkeit der Anfangsrandwertaufgabe einer modifizierten Euler-Helmholtz'schen Gleichung in dreidimensionalen einfach zusammenhängenden, hinreichend glatt berandeten Gebieten zu zeigen. Die Lösungen der modifizierten Aufgabe bilden Näherungslösungen des klassischen Problems in folgendem Sinn: Defekt- und Fehlerabschätzungen, durchgeführt mit der Cauchy'schen und der Helmholtz'schen

Wirbelgleichung, gelten lokal jeweils für ein Zeitintervall, dessen Länge quadratisch von einer Normschranke der Anfangswerte abhängt. Die Frage, ob die dreidimensionale Anfangsrand=wertaufgabe der klassischen Eulergleichung global lösbar ist, bleibt daher weiterhin offen.

W. Törnig: Diskretisierungen des Dirichletproblems nicht=linearer elliptischer Differentialgleichungen

Wichtige elliptische Differentialgleichungen der Physik lassen sich in der Gestalt $F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$, also als Eulersche Differentialgleichungen der Variationsaufgabe $\int_G F(x,u,u_{x_j})dg = \text{Min}$, darstellen. Es wird das Dirichlet-Problem solcher quasilinearen Differentialgleichungen betrachtet und näherungsweise durch eine Klasse von Diskretisierungsver=fahren gelöst. Hierbei wird das Variationsproblem durch ein diskretes Analogon $Q_h[v_h] = \text{Min}$ in einer Gitterfunktion v_h auf einem Gitter G_h ersetzt. Daraus resultieren auf bekannte Art große nichtlineare Gleichungssysteme mit symmetrischer Funk=tionalmatrix, die in der Regel nur iterativ gelöst werden können. Besonders schnell konvergieren die nichtlinearen SOR-Verfahren, wenn die Funktionalmatrix zusätzlich positiv definit ist. Das wirft die Frage auf, wie Diskretisierungen gefunden werden können, die zu positiv definiten Funktionalmatrizen fürhen. Es wird dann der für die Praxis wichtige Satz bewiesen, daß eine Diskretisierung (unter zusätzlichen, jedoch kaum einschränkenden Voraussetzungen) genau dann diese Eigenschaft hat, wenn sie bei Anwendung auf die Potentialgleichung zu einer positiv definiten Matrix führt.

W. Velte: Zum Galerkinschen Verfahren bei Eigenwertproblemen mit unbeschränkten Operatoren.

Es ist bekannt, daß bei einer linearen Operatorgleichung $Tu = \lambda u$.

in einem Hilbertraum H das Galerkinverfahren nicht bei jeder Wahl eines vollständigen Funktionensystems zu konvergieren braucht. In einer Würzburger Dissertation (B. Knauer) wurden Gleichungen mit unbeschränktem T , D(T) dicht in H, untersucht. Ist eine aufsteigend Folge endlichdimensionaler Räume R_n gegeben,

$$\ldots \subset R_n \subset R_{n+1} \subset \ldots \subset D(T)\,,\quad \overline{\bigcup R_n} = \overline{\bigcup TR_n} = H\,, \qquad (*)$$

so ist die Polskii-Bedingung hinreichend für die Konvergenz. Andererseits kann man nach Vainikko und Umanskii stets Folgen $\{R_n\}$ mit $(*)$ konstruieren, die der Polskii-Bedingung nicht genügen. Es gibt aber, wie B. Knauer gezeigt hat, Klassen unbeschränkter Operatoren, für die das Galerkinverfahren stets konvergiert, auch wenn die Polskii-Bedingung nicht erfüllt ist. Es handelt sich um gewisse Klassen sektorieller Operatoren im Sinne von Kato, Perturbation Theory of Linear Operators (Springer 1966).

K.-H. Hauer (Göttingen)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft