MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 20/1971

Lifting- und Fortsetzungsprobleme
9.5. bis 15.5.1971

Ziel dieser Tagung war es, Lifting und Fortsetzungsprobleme in verschiedenen Kategorien der Funktionalanalysis zu studieren, um ihre Gemeinsamkeiten und Besonderheiten zu erkennen.
Dementsprechend wurde angestrebt, Vertreter aus möglichst unterschiedlichen Gebieten der Funktionalanalysis auf dieser Tagung zu vereinigen. Die Leitung hatten: H.Bauer (Erlangen) und D.Kölzow (Erlangen).

Teilnehmer:

K.Bichteler, Austin (amerika)
V.Dembinski, Erlangen
F.-R.Diepenbrock, Münster
N.Friedrich, Saarbrücken
J.Gapaillard, Nantes (Frankreich)
P.Georgiou, Patras (Griechenland)
O.Haupt, Erlangen
A.Ionescu Tulcea, Paris (Frankreich)
H.Jarchow, Zürich (Schweiz)
D.A.Kappos, Athen (Griechenland)
G.Köthe, Frankfurt
J.Lembcke, Erlangen
G.Maltese, Frankfurt
P.Mankiewicz, Warschau (Polen)
Pellaumail, Rennes (Frankreich)
St.Simons, Paris (Frankreich)
M.Sion, Florenz (Italien)
A.Szankowski, Aarhus (Dänemark)
G.Wittstock, Saarbrücken
R.Woitok, Erlangen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

G.KÖTHE: Über einen Satz von Sobczyk

Sei H ein zu c_0 normisomorpher abgeschlossener Teilraum eines separablen Banachraumes E. Dann gibt es eine stetige Projektion P von E auf H mit $\|P\| \leq 2$. Die Schranke 2 ist exakt.(SOBCZYK)
Der Beweis des Satzes wurde elementar geführt, unter Verwendung des folgenden Lifting-Satzes: Seien E und H wie im Satz, $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach gegen 0 konvergente Folge in E'/H^0, $\|\bar{u}_n\| \leq r$.
Dann existiert eine Folge (v_n) in H^0 mit $\|v_n\| \leq r$, $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen 0 in E' und $\|u_n + v_n\| \leq 2r$.

G.MALTESE: Maximal elements with respect to a closed cone

Sei E ein reeller Vektorraum und $C \subset E$ ein konvexer Kegel. Ein Punkt $x \in E$ heißt maximal bezüglich C, wenn x maximal ist in der von C induzierten Präordnung. Es gilt: Ist E ein reeller lokalkonvexer topologischer Vektorraum, C ein abgeschlossener Kegel in E und X eine nicht-leere, kompakte, konvexe Teilmenge von E, so gibt es einen Extremalpunkt von X, der maximal ist.
Hieraus folgt ein von ANDENAES in Math. Ann. (1970) bewiesener Satz über (K,p)-maximale Funktionale, der Anwendungen in der Choquet-Theorie besitzt.

G.WITTSTOCK: Tensorprudukte konvexer kompakter Mengen

Mit Hilfe eines kanonischen Tensorprodukt-Kalküls für kompakte, konvexe Mengen K und für archimedisch geordnete lineare Räume U,V mit Ordnungseinheit wurden Fortsetzungssätze des folgenden Typs gezeigt: Ist $\mathcal{A}K$ die Menge der stetigen, affinen Funktionen auf K, K ein (Choquet-) Simplex und $g: U \longrightarrow V$ eine Ordnungseinbettung, so kann man jede positive Bilinearform $\tau: \mathcal{A}K \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ über g positiv und bilinear auf $\mathcal{A}K \times V$ fortsetzen.

St.SIMONS: A convergence theorem with boundary

Sei X nicht-leer, (f_n) eine gleichmäßig in n beschränkte Folge aus $\ell_\infty(X)$ und $Y \subset X$ derart, daß für alle $(\lambda_n) \in \ell_1^+$ die Funktion $\sum_{n} \lambda_n f_n$ ihr globales Supremum in Y annimmt. Dann folgt aus $\limsup_n f_n(y) \leq 0$ $(y \in Y)$, daß $\limsup_n \mu(f_n) \leq 0$ für alle positiven Linearformen μ auf $\ell_\infty(X)$ mit $\mu(1) = 1$.
Es wurde gezeigt, daß dieser Satz es erlaubt, einen Grenzwertsatz vom LEBESGUEschen Typ für stetige Funktionen auf pseudokompakten

topologischen Räumen zu beweisen, und einen Satz von RAINWATER über schwache Konvergenz (s.: Proc. AMS 14 (1963)) zu verallgemeinern. Weitere Anwendungen liegen in der Choquet-Theorie.

ASZANKOWSKI: Multiplicative extension operators

Es wurden für kompakte metrische Räume $X \subset Y$ Fortsetzungsoperatoren $M: \mathcal{C}_+(X) \longrightarrow \mathcal{C}_+(Y)$ (bzw. $M: \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$) betrachtet, die zusätzlich multiplikativ sind.

Bedeutet $X \in AM_+$ (bzw. $X \in AM$), daß für alle $Y \supset X$ ein solches $M: \mathcal{C}_+(X) \longrightarrow \mathcal{C}_+(Y)$ (bzw, $\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$) gibt, so gilt:

(A) $X \in AM_+ \Longleftrightarrow$ X lokal-zusammenhängender, zusammenhängender, kompakter metrischer Raum

(B) Die n-Sphäre S^n ist kein AM-Raum ($n \in \mathbb{N}$).

P.MANKIEWICZ: On the extension of isometries

Ein metrischer Raum (S,d) heißt symmetrisch bezüglich $s_0 \in S$, wenn es eine Isometrie $T: S \longrightarrow S$ (auf) gibt, die für alle $x \in S$ die Formel $d(x,T(x)) = 2d(x,s_0)$ erfüllt. Mit Hilfe des Fixpunktsatzes für Isometrien in symmetrischen Räumen wurden die beiden folgenden Verschärfungen des Satzes von MAZUR-ULAM bewiesen:

(A) Sei V eine offene, nicht-leere und zusammenhängende Teilmenge eines Banachraumes X und W eine offene Teilmenge eines Banachraumes Y; X und Y reell.
Dann läßt sich jede Isometrie T von V auf W fortsetzen zu einer affinen Isometrie von X auf Y.

(B) Satz (A) ist wahr auch im Fall konvexer Körper V und W in X bzw. Y.

J.LEMBCKE: Simultane Urbilder regulärer Maße

Mit Hilfe des Satzes von ANDENAES über die Existenz maximaler Fortsetzungen von Linearformen wurden Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen regulären Urbildmaßes einer Familie regulärer Maße unter gegebenen meßbaren Abbildungen mit gleichem Definitionsbereich angegeben. Bei einer zusätzlichen Stetigkeitsvoraussetzung über die meßbaren Abbildungen konnte die Existenz gemeinsamer regulärer Urbildmaße gekennzeichnet werden durch eine Regularitätsbedingung, welche die Ausgangsmaße verknüpft.

H.JARCHOW: Induktive Limiten in Dualräumen

Es wurde über die Theorie der reellen oder komplexen Vektorräume mit einer verträglichen Limes-Struktur referiert. Insbesondere wurde eine Charakterisierung der SCHWARTZschen Räume mit Hilfe kanonischer Limes-Strukturen auf dem Dual E' eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes E gewonnen.

D.A.KAPPOS: Eine Art stochastisches Integral

Zur Notation siehe KAPPOS: Probability algebras and stochaistic spaces, Acad. Press 1970. - Bedeutet $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathfrak{A}, \mathcal{L}_\infty)$ den Vektorverband aller Caratheodory'schen Ortsfunktionen über $\mathfrak{A}$ mit Werten in $\mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{L}_\infty)$ den Vektorverband aller elementaren Ortsfunktionen, dann existiert für $f \in \mathcal{E}$ eine sogenannte reduzierte Darstellung durch Indikatoren $f = \sum_{j\geq 1} \xi_j I_{a_j}$ ($\xi_j \in \mathcal{L}_\infty$, paarweise verschieden). Man sagt, $f \in \mathcal{E}$ besitzt ein Integral, wenn die Reihe $\sum_{j\geq 1} \xi_j\, m(a_j)$ o-konvergiert in $\mathcal{L}_S$ und setzt $I(f) = \sum_{j\geq 1} \xi_j\, m(a_j)$. Der Raum $\mathcal{K}$ der so integrierbaren Funktionen bildet einen Vektorverband und I ist linear und u-stetig auf $\mathcal{K}$. Daher kann I auf die u-Hülle $\mathbb{L}_1(\mathfrak{A}, \mathcal{L}_\infty, m, \mathcal{L}_S)$ von $\mathcal{K}$ fortgesetzt werden und ist dort wieder linear und u- bzw. o-stetig.

A.IONESCU TULCEA: Lifting in measure and probability theory

Dieses Referat brachte einen Überblick über Lifting in der Maßtheorie und verschiedene Anwendungen. Sei $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$, $\mathcal{N}^\infty = \mathcal{N}^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ und $L^\infty = L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ in der üblichen Bedeutung, weiter $p: \mathcal{L}^\infty \longrightarrow L^\infty$ die kanonische Projektion. Ein Schnitt $\rho: L^\infty \longrightarrow \mathcal{L}^\infty$ von p heißt Lifting, wenn ρ eine Algebra-Darstellung ist. Die folgenden Anwendungen dieser Begriffsbildung wurden diskuttiert:

(1) Die mit ρ assoziierte Topologie

(2) Darstellung linearer Operatoren (DUNFORD-PETTIS, DUNFORD-PETTIS-PHILLIPS)

(3) Starke Liftings und Desintegration von Maßen

(4) Separable 'modification' stochastischer Prozesse

(5) Ableitungssysteme von VITALI, und

(6) Mit Gruppen von Transformationen kommutierende Liftings.

M.SION: Lifting and differentiation

Es wurde zunächst ein allgemeiner Existenzsatz für die Ableitung eines vektorwertigen Maßes nach einem positiven Maß bezüglich einer Vitali-Basis bewiesen. Mit diesem Satz wurden verschiedene Integraldarstellungen hergeleitet.

Ferner wurde gezeigt, wie man aus einer Vitali-Basis ein Lifting gewinnen kann. Für endliche Maße wurde damit die Existenz eines Liftings bewiesen.

J.GAPAILLARD: Existence de divers types de relèvements sur les ensembles mesurables d'un espace mesuré.

Sei $(E, \mathfrak{m}, \varphi)$ ein Maßraum, der Caratheodory-vollständig ist. Es wurde gezeigt, daß die Existenz einer Zerlegung zur Existenz verschiedener Arten von Liftings L für $\mathfrak{m}$ äquivalent ist:
Liftings L, die monoton sind und außerdem erfüllen a) $\cap_f$-invariant, oder b) $\cup_f$-invariant, oder c) beides, oder d) für alle $A, B \in \mathfrak{m}$: $L(A \cap B) \supset L(A) \cap L(B)$ oder $L(A \cup B) \subset L(A) \cup L(B)$.
Das wichtigste Ergebnis besteht in dem Satz, daß aus der Existenz eines monotonen Liftings bereits die Existenz einer Zerlegung folgt.

D.KÖLZOW: On some equivalences to the lifting property

Für einen Caratheodory-vollständigen Maßraum sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) Existenz eines Liftings im Sinne von NEUMANN
(2) Existenz einer Zerlegung (direct sum property)
(3) Existenz einer monotonen Lokalisierung im Sinne von SEGAL
(4) Gültigkeit des Satzes von RADON-NIKODYM monoton
(5) Existenz einer schwachen Vitali-Basis
(6) Existenz einer starken Vitali-Basis
(Lit.: Lecture notes in math., Springer, vol 65)
GAPAILLARD zeigte, daß die folgende Aussage äquivalent ist zu (1):
(7) Existenz eines monotonen Liftings
(Lit.: C.R.Acad.Sci. Paris t. 271, sér. A, p. 91 - 93)

F.R.DIEPENBROCK: Einige Bemerkungen zur Lokalisierbarkeit von Maßen

Es wurde der Begriff der Lokalisierbarkeit eines Maßraumes $(E,\mathfrak{M},\mu)$ bezüglich eines meßbaren Raumes $(E',\mathfrak{M}')$ eingeführt; dieser deckt sich für $(E',\mathfrak{M}') = (\bar{R},\mathfrak{B})$ mit dem von SEGAL. Ist nun $(E,\mathfrak{M},\mu)$ lokalisierbar bezüglich irgendeines meßbaren Raumes $(E',\mathfrak{M}')$ mit den Eigenschaften:

a) alle einelementigen Mengen von E' gehören zu $\mathfrak{M}'$, und

b) $|E'| \geq \dim(E,\mathfrak{M},\mu)$: = Dimension im Sinne von FELL,

dann besitzt $(E,\mathfrak{M},\mu)$ eine Zerlegung.

Außerdem wurde für lokalisierbare, wesentliche Maßräume $(E,\mathfrak{M},\mu)$ folgender Satz bewiesen: Gehört jede μ-lokal-meßbare Menge von E zu $\mathfrak{M}$, dann ist $\dim(E,\mathfrak{M},\mu)$ eine meßbare Kardinalzahl genau dann, wenn es ein endliches Maß $\nu \neq 0$ über $\mathfrak{M}$ gibt mit $\nu(A) = 0$ für alle bezüglich μ σ-endlichen Mengen $A \in \mathfrak{M}$.

K.BICHTELER: Integration bezüglich allgemeiner oberer Maße und ein schwacher Existenzsatz für starke Liftings

Dieses Referat brachte eine Ausweitung der Begriffsbildung "Ober-Integral", mit deren Hilfe es möglich wird, für topologische Räume X mit einer Basis von der Kardinalität $\aleph_1$ (statt bisher $\aleph_0$) die Existenz eines starken Liftings für dieses Integral zu beweisen. Dieser Begriff ist auch deshalb von Interesse, weil es Vereinfachungen von Argumenten bringt, die in der Theorie der L_p-Räume und der Integration und Desintegration von Maßen auftauchen.

P.GEORGIOU: Über eine spezielle Desintegration

Seien T kompakt, μ positives Radon-Maß auf T mit Supp μ = T, $\mathcal{T}$ die Boole-Algebra der μ-meßbaren Mengen, l ein Lifting von (T,μ); sei weiter (S,ν) der zugehörige Hyperstone-Raum, γ die ν-meßbaren Mengen und ρ das starke Lifting von (S,ν). $\rho(S)$ ist also die perfekte Boole-Algebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen von S, die isomorph zu l(T) ist. Es ist bekannt, daß dieser Isomorphismus von einer Abbildung $\vartheta : T \longrightarrow S$ induziert wird. Diese läßt sich als eine abstrakte Desintegration auffassen.

PELLAUMAIL: Deux applications de l'existence d'un relèvement

Als erste Anwendung wurde eine schwache Version des Satzes von RADON-NIKODYM bewiesen.

Die zweite Anwendung bringt einen Satz über Desintegration von Maßen. Dadurch wird Satz 5 in "Topics in the theory of liftings" von Ionescu Tulcea und prop. 15, § 2 in "Integration, chap. IX" von Bourbaki (1969) verallgemeinert. Außerdem konnten die Resultate, die für den regulären Fall vorliegen, verschärft werden.

Volker Dembinski, Erlangen

V. Dembinski