MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 22/ 1971

Allgemeine Gruppentheorie

16.5. bis 22.5. 1971

Die Tagung stand unter der Leitung von W. Gaschütz, Kiel und K. Gruenberg, London. In den Vorträgen wurde eine Vielfalt von Gegenständen und Gebieten der gegenwärtigen Gruppentheorie angesprochen, wie etwa endliche einfache Gruppen, Faktorisierungsfragen, subnormale Untergruppen, Darstellungstheorie, lineare Gruppen, Kohomologie, endlich erzeugte Gruppen, lokal endliche Gruppen, Formationen und Schunckklassen, um nur einige zu nennen. So gab die Tagung den anwesenden Mathematikern die Möglichkeit über ihr jeweiliges Arbeitsgebiet zu berichten und mit anderen Gruppentheoretikern darüber zu diskutieren, deren Forschungen sich nicht auf diesem Gebiet bewegen. Das ergab jenen so nützlichen Zwang zur allgemeineren Reflexion der eigenen, ja immer speziellen Untersuchungen. Die Teilnehmer kamen aus Australien, Dänemark, Frankreich, den USA und der Schweiz, die überwiegende Mehrzahl aber aus der BRD und aus England.

<u>Teilnehmer</u>

R. Baer, Zürich
G. Baumslag, Houston
R. Bieri, Zürich
D. Blessenohl, Kiel
A.R. Camina, Norwich (England)
D.J. Collins, London
U. Dempwolff, Mainz
K. Doerk, Mainz
A. Dress, Bielefeld
M.J. Dunwoody, Brighton (England)
E.C. Dade, Strasbourg
V. Felsch, Aachen

P. Fong, Aarhus (Dänemark)
W. Gaschütz, Kiel
F. Gross, Kiel
K. Gruenberg, London
B. Hartley, Coventry (England)
H. Heineken, Erlangen
D. Held, Mainz
K. Hoechsmann, Bielefeld
B. Huppert, Mainz
K. Johnsen, Kiel
H. Kurzweil, Tübingen
H. Meyn, Erlangen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

J.C. Moore, Princeton
S. Moran, Canterbury
J. Neubüser, Aachen
M.L. Newell, Galway (England)
M.B. Powell, Oxford
I.E. Roseblade, Cambridge
R. Schmidt, Kiel
U. Schoenwaelder, Aachen
U. Stammbach, Zürich
S.E. Stonehewer, Coventry
G.A. Stoy, Oxford
A. Strössner, Erlangen
M.J. Tomkinson, Glasgow
B. Wehrfritz, London
K.W. Wehrhahn, Sydney
A. Wielandt, Tübingen
J.S. Wilson, Cambridge
C. Siebeneicher, Bielefeld

Vortragsauszüge

B. Amberg: Factorizations of infinite groups

Theorem: Let $G=AB$ be the product of two abelian subgrouos A and B, where the maximal divisible subgroups ϑA of A and ϑB of B are torsion groups with artinian p-components and the reduced parts $\mathfrak{R}A$ of A and $\mathfrak{R}B$ of B are noetherian, and let at least one of the following conditions be satisfied : (a) if A^* is a factor of A and B^* is a factor of B and $A^* \simeq B^*$, then $A^* \simeq B^*$ is artinian or cyclic, (b) A or B is accessible in G, (c) G is an FC-group, (d) G is finitely generated and finite epimorphic images of G are nilpotent, (e) G satisfies Min-n, (f) if $F = A^*B^*$ where A^* is a factor of A and B^* is a factor of B and $A^* \simeq B^*$, then G is an $\mathfrak{T}_0$-group. - Then there is an abelian characteristic subgroup C of G with the following properties: (1) $C = (\vartheta A)(\vartheta B)$, (2) $G/C = (\mathfrak{R}A)(\mathfrak{R}B)$ is noetherian.

R. Baer: Formations and second cohomology groups.

All groups in the following are finite. f is a saturated formation if, and only if, f meets the following requirements:

(a) f is a formation.
(b) If N is a soluble normal subgroup of G with $G/\Phi N \in f$, then $G \in f$.
(c) If the group $F \in f$ operates irreducibly on the elementary abelian p-group A, if $H^2(F,A) \neq 0$, then there exists a group $V \in f$ with a minimal normal subgroup $M \cong A$ such that the group of automorphisms, induced by F in A is isomorphic to the group of automorphisms, induced by V in M.

The conditions (a) and (b) characterize exactly the locally definable formations (Generalized Theorem of Gaschütz - Lubeseder). (c) is indispensable, as may be seen by easily constructed examples, involving groups with non-vanishing Schur multiplier. - Considerations around the least criminal lead to the following result:

If the group F acts irreducibly on the elementary abelian p-group A, if 1 is the only normal p-subgroup of F, if $H^2(F,A) \neq 0$, if $H^2(F/N,A) = 0$ whenever $1 \neq N \lhd F$ and N acts trivially on A, then the restriction homomorphism of $H^2(F,A)$ into $H^2(X,A)$ is a monomorphism for every $1 \neq X \lhd F$.

The condition that 1 is the only normal p-subgroup of F is indispensable.

G. Baumslag: <u>Multiplicators of finitely generated metabelian groups</u>

The objective of this talk was to discuss and solve some problems concerning finitely generated groups, finitely generated metabelian groups, their multiplicators and their relators.

R. Bieri: <u>Gruppen mit Poincaré-Dualität</u>

G heißt eine Gruppe mit Poincaré-Dualität (der Dimension n), wenn es eine Zahl $n \geqslant o$ und eine natürliche Äquivalens der Funktoren $H^{n-k}(G,-) \simeq H_k(G,-)$, $k \in \mathbb{Z}$, gibt. Es gilt:

Jede endlich erzeugte , torsionsfreie, nilpotente Gruppe ist eine Gruppe mit Poincaré-Dualität.

Jede polyzyklische Gruppe enthält eine Untergruppe mit endlichem Index und Poincaré-Dualität.

Auflösbare Gruppen mit Poincaré-Dualität sind polyzyklisch.

A.R. Camina: <u>Conjugacy classes</u>

A set of integers $\{n_1, \dots n_r\}$ is called the index type of a finite group if and only if (i) for each x in G, $[G: C_G(x)] = n_i$ for some n_i, (ii) $\exists\, x \in G$ such that $[G:C_G(x)] = n_i$ for each $i = 1, \dots r$, (iii) $n_i = n_j \iff i = j$. One hope that it may be possible to recognize what type of groups have a given index type. In particular could one recognize nilpotent groups in this way. The following is a small contribution to this problem.

Theorem : If G is a finite group with index type $\{1, p^a, p^a q^b, q^b\}$ where p and q are primes and a and b are positive integers then G is nilpotent.

Question: If $p_1^{a_1}, \dots p_r^{a_r}$ are distinct prime powers and G is a group whose index type $\{1, n_1, \dots n_r\}$ consists of all possible products of the $p_i^{a_i}$ is G nilpotent?

D.J. Collins: Geometrical methods in combinatorial group theory

We give an account of the theory of cancellation diagrams. This theory employs geometrical methods to study the cancellation procedure whereby an element of a free group (or free product) F, known to belong to the normal closure of a set R of words of F, is reduced to normal form. We show that with only a few exceptions, groups with presentations in which there is very little cancellation between relators (specifically presentations satisfying conditions C (4) and T(4), in the notation of Lyndon) always contain a free subgroup of rank two.

U. Dempwolff: On centralizers of involutions

The following two results have been discussed.

A. Let H and G be finite groups such that
(i) H is a split extension of an elementary abelian group of order 2^n by $GL(n-1,2)$, $(n \geq 2)$.
(ii) H is the centralizer of a 2-central involution in the simple group G.
Then, n=2 and $G = A_5$ or n = 4 and $G = M_{23}$.

B. Let H and G be finite groups such that
(i) H is a split extension of an extraspecial group of order 2^{2n+1} by $GL(n,2)$, $(n \geq 4)$.
(ii) H is the centralizer of a 2-central involution in the simple group G.
Then we have $G = L_6(2)$ for n = 4, $G = L_7(2)$ for n = 5, $G = L_8(2)$ for n = 6 and $G = L_9(2)$ in case n = 7.

K. Doerk: Maximal Schunck-classes in the sense of E. Cline.

All groups considered are finite and soluble.

Definition: Let $\underline{F}$ and $\underline{H}$ be Schunck-classes. We say, $\underline{F}$ is strongly embedded in $\underline{H}$ (write $\underline{F} << \underline{H}$), if in each group G each $\underline{F}$-projector of G is contained in an $\underline{H}$-projector of G. A Schunck-class $\underline{F}$ ($\neq \underline{S}$) is called maximal, if $\underline{F}$ is maximal in respect to the partial ordering .

Theorem: The maximal Schunck-classes are the classes of G-perfect groups for primitive groups G. (A group H is called G-perfect, if G has no factorgroup isomorphic to G.)

A. Dress: Mackey - Funktoren

Es wird ein axiomatischer Zugang zu einer Reihe verschiedener, aus der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen bekannter Sätze über induzierte Darstellungen entwickelt.

A. Dress: Free factors of $SL_2\ (Z(\sqrt{-m}))$

Report on the following result of R. Zimmert (Bielefeld):
Let $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 18$, $m \equiv 2(4)$. Let $p_1, \dots p_n$ be those primes with

$$\text{(i)}\ 4p_i^2 < m, \qquad \text{(ii)}\ \exists\, a_i \in \mathbb{Z} : m-4a_i^2 \equiv 4\ (p_i).$$

Then $SL_2\ (Z(\sqrt{-m}))$ has a free factor of rank n+2.

P. Fong: Groups with a BN-pair

The following definiton of a BN-pair is due to Tits. A group G has a BN-pair if there exist subgroups B,N of G such that the following hold:

1) $G = \langle B,N \rangle$.
2) If $H = B \cap N$, then $H \trianglelefteq N$ and $W = N/H$ is generated by a finite set S of involutions.
3) If $s \in S$, $w \in W$, then $sBw \subseteq BwB \cup BswB$.
4) If $s \in S$, then $sBs \neq B$.

The interger $n = |S|$ is called the rank of the pair (B,N). Tits has classified finite simple groups with a BN-pair of rank ≥ 3. The following result is due to Seitz and myself.

Theorem: Let G be a finite simple group with a BN-pair of rank 2 such that B has a nilpotent normal subgroup U with B=HU. Then G is a group of Chevalley type, i.e. $A_2(q)$, $B_2(q)$, $G_2(q)$, $A_3'(q)$, $A_4'(q)$, $D_4^2(q)$, or $F_4'(q)$.

N. Gupta: Solvability of Third-Engel groups

Using the work of H. Heineken it was shown that a third-Engel group is an extension of a soluble group by a group of exponent 20. A further application of a recent result of Gupta - Weston shows that a third - Engel group is an extension of a soluble group by a group of exponent 5. It was also remarked that a recent result of Bachmuth - Mochizuky states that there exists a non soluble group of exponent 5.

B. Hartley: Sylow theory in locally finite groups

If π is a set of primes, then a Sylow π-subgroup of a group G means a maximal π-subgroup of G, and $Syl_\pi G$ denotes the set of all these. In the following, G denotes a countable locally finite group . We discuss the relationship between the properties (a) $|Syl_\pi G| < 2^{\aleph_0}$ and (b) for all $H \leq G$, $Syl_\pi H$ is a conjugacy class. Sample results are as follows. Theorem A: If $\pi = \{p\}$, p being a prime, then (a) $\Longrightarrow$ (b). Furthermore in this case, if G satisfies (a) and either (i) G is upper p-separable or (ii) $p \neq 2$ and G is locally p-soluble, then $G/O_{p,p',p}(G)$ is finite and $G/O_{p,p'}(G)$ satisfies the minimal condition on subgroups. A similar result is obtained for general π. Theorem C: If G is locally soluble and $|Syl_\pi G| < 2^{\aleph_0}$ for all sets π, then G satisfies (b) for all sets π and G is locally nilpotent - by - metabelian - by - finite.

H. Heineken: Gruppen mit Normalisatorbedingung

In der Menge der Erweiterungen von elementarabelschen p-Gruppen durch Prüfergruppen C_{p^∞} gibt es eine Untermenge der Mächtigkeit der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften: Alle Gruppen in dieser Untermenge sind nicht-abelsch,und das direkte Produkt irgend zweier verschiedener Gruppen dieser Untermenge erfüllt die Normalisatorbedingung (und daher also auch die Faktoren). Zusätzlich zu einer Gruppe der oben erwähnten Erweiterungsform, die bisher bekannt war, erhält man also Erweiterungen von elementarabelschen Gruppen durch Gruppen vom Rang 2, deren sämtliche hyperzentralen Untergruppen nilpotent sind, die jedoch selbst nicht nilpotent sind und die Normalisatorbedingung erfüllen. - Es gibt eine Gruppe G, die die Normalisatorbedingung nicht erfüllt, aber einen Normalteiler N mit $N_3=1$ besitzt, so daß G/N' die Normalisatorbedingung erfüllt.

K. Hoechsmann: Traces of actions of finite group schemes.

Given a suitable notion of "morphism of rank n" in any category, we define the norm of such a morphism $\pi : F \longrightarrow S$ to be a section for $\prod_S^n F/S_n \longrightarrow S$ (S_n = symmetric group, $\prod^n$ = n-fold product) with obvious functorial properties. By a remark of Grothendieck's this can be done for schemes. Its existence implies that, for any abelian group object F of rank n, the functor Hom(-,F) has values in n-torsion groups. In group-cohomology, it yields a corestriction with the usual properties and a Nakayama map $H^2 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(G,\overline{H}^0)$, where $\overline{H}^0$ = presheaf version of Tate - cohomology. The latter, however, does not kill all coinduced modules.

J. Neubüser: Die endlichen Untergruppen von GL(4,Z) und ihre Normalisatoren

Der Vortrag berichtet über gemeinsame Projekte von H. Brown, H.Zassenhaus und dem Vortragenden. Nachdem E.C. Dade Repräsentanten der Klassen maximaler Untergruppen von GL(4,ℤ) bestimmt hat, ist die Bestimmung der ganzzahligen Klassen endlicher Untergruppen von GL(4,ℤ) auf die Entscheidung der ganzzahligen Äquvalenz endlich vieler endlicher ganzzahliger Gruppen zurückgeführt. Dies Problem konnte mittels relativ einfacher Computerprogramme gelöst werden. Man kann jedoch auch eine Reihe allgemeinerer Verfahren zur Behandlung dieser Gruppen entwickeln. Hierbei benötigen der reduzible und irreduzible Fall wesentlich verschiedene Methoden. Die letzteren, die z.T. aus der Theorie der Algebren und der Algebraischen Zahlentheorie stammen, sind auch für die Bestimmung der Normalisatoren der endlichen Untergruppen von GL(4,Z) brauchbar. Nachdem diese jetzt bestimmt sind, können auch die 4-dimensionalen Raumgruppen nach einem bereits programmierten auf H. Zassenhaus zurückgehenden Algorithmus berechnet werden.

M.L. Newell: The eliminant of a group

A normal subgroup N of a group G is eliminable if whenever NX is of finite index in G, then the subgroup X is of finite index in G. The eliminant L(G) is $\{x \in G \mid \langle x^G \rangle$ is eliminable in $G\}$, where $\langle x^G \rangle$ is the normal closure of x in G. We obtained the following results for the characteristic subgroup L(G) :

1. If G is a soluble group satisfying the minimal condition on subgroups, then G/L(G) is finite.

2. If $1 \neq A$ is a finitely generated abelian normal subgroup of a finitely generated group G such that $A \cap L(G) = 1$, then A has an almost-complement in G.

3. If G is polycyclic and N is a normal subgroup of G containing $L(G)$, then $N/L(G)$ is nilpotent - by - finite if and only if N is nilpotent - by - finite.

4. A polycyclic group G is nilpotent-by - finite if and only if $(G^k)' \subseteq L(G)$, for some positive integer k.

J. Rebmann: F - Gruppen

Eine endliche Gruppe G heiße eine F-Gruppe, wenn kein Zentralisator eines nichtzentralen Elementes einen anderen solchen Zentralisator echt umfaßt.

Satz: Ist G eine F-Gruppe, so ist $\left\{ Z(H)/Z(G) \;\middle|\; H=C_G(g),\ g \notin Z(G) \right\}$ eine nichttriviale Partition der Zentrumsfaktorgruppe von G.

Unter Verwendung der Beschreibung der Gruppen mit Partition (Baer, Suzuki) ergibt sich der folgende

Satz: G ist F-Gruppe genau dann, wenn G einer der folgenden Bedingungen genügt:

(1) G hat abelschen Normalteiler vom Index p, ist aber selbst nicht abelsch.

(2) $G/Z(G)$ ist Frobeniusgruppe mit Kern $L/Z(G)$ und Komplement $K/Z(G)$, K und L sind abelsch.

(3) $G/Z(G)$ ist Frobeniusgruppe mit Kern $L/Z(G)$ und Komplement $K/Z(G)$, K abelsch, $Z(G) = Z(L)$, L F-Gruppe, $L/Z(G)$ p-Gruppe.

(4) $G/Z(G) = S(4)$. Ist $V/Z(G)$ die Kleinsche Vierergruppe in $G/Z(G)$, so ist V nichtabelsch.

(5) $G = A \times P$, A abelsch, P p-Gruppe, P F-Gruppe.

(6) $G/Z(G) = PSL, PGL(2,p^n)$, $G' = SL(2,p^n)$, $p^n > 3$.

(7) $G/Z(G) = PSL, PGL(2,9)$, G' ist eine Darstellungsgruppe von $PSL(2,9)$.

I.E. Roseblade: Representations of polycyclic groups and the Nullstellensatz

I shall discuss Hilbert's Nullstellensatz in relation to theorems of P. Hall on finitely generated nilpotent groups and announcements by E. Levič about polycyclic groups. The results will be somewhat inconclusive.

U. Schoenwaelder: Finite groups with Sylow 2-subgroups of type M_{24}

A Sylow 2-subgroup of M_{24} is a split extension of an extra-special group E of order 2^7 by a dihedral group D of order 8.

We consider finite groups H with a Sylow 2-subgroup T isomorphic to that of M_{24} and $\langle z\rangle = Z(T) \subseteq Z(H)$. Set $\bar{H} = H/\langle z\rangle$. It turns out that $\bar{N} = N_{\bar{H}}(\bar{E})$ induces on $\bar{E}$ a group $\mathfrak{N}$ isomorphic to D, $L_2(7)$, or S_4. One wants to prove that O(H)E is normal in H. As usual one has to show that $\bar{N}$ contains the centralizers in $\bar{H}$ of all its involutions. This requires a solution to the fusion problem and application of the Goldschmidt - Gorenstein "balanced theorem". In case $\mathfrak{N} =$ D,H has a normal 2-complement. In case $\mathfrak{N} = L_2(7)$ induction may be applied to obtain the structure of the centralizers of involutions in $Z(\bar{T})$. In case $\mathfrak{N} = S_4$, the fusion problem has not yet been completely solved and a few centralizers remain to be computed.

It is planned to apply the results on H to the case where H is the centralizer of a 2-central involution in a (simple) group G with Sylow 2-subgroup isomorphic to that of M_{24}.

C. Siebeneicher: Adamsoperationen auf $\Omega(G)$

Sei G eine endliche Gruppe, $\Omega(G)$ der Burnsidering der endlichen G-Mengen. Auf $\Omega(G)$ kann eine bezüglich Restriktion auf Untergruppen funktorielle λ-Ringstruktur etabliert werden, indem man für eine G-Menge M die i-te äußere Potenz von M definiert durch $\Lambda^i M = \{ N \subset M \mid |N| = i \}$. $\Omega(G)$ ist im allgemeinen kein spezieller λ-Ring. Für Gruppen gerader Ordnung ist dies sogar nie der Fall. Es gilt der Satz : $\Omega(G)$ ist genau dann ein spezieller λ-Ring, wenn G zyklisch ist und ungerade Ordnung hat. Bezeichnet $I_\lambda(G)$ das kleinste λ-Ideal von $\Omega(G)$, das man ausdividieren muß, damit der Faktorring ein spezieller λ-Ring wird,und bezeichnet K(G) den Durchschnitt der Kerne von den Restriktionen auf zyklische Untergruppen, so gilt der
Satz: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nK(G) \subset I_\lambda(G)$.

S.E. Stonehewer: Quasinormal subgroups of infinite groups

A subgroup H of a group G is a permutable (quasinormal) subgroup of G if HK = KH for all subgroups K of G. The object is to establish various properties of permutable (and subpermutable) subgroups of infinite groups. The known results for finite groups appear to generalize. For example, such subgroups are allways ascendant and sometimes (perhaps surprisingly) even subnormal (as when the group is finitely generated). "Join" theorems exist. In particular: "The join of two subpermutable subgroups of a nilpotent - by - abelian group is subpermutable."

B.A.F. Wehrfritz: Unipotent subgroups of linear groups

The main result mentioned in the talk is : - if G is a finitely generated linear group and U is a unipotent normal subgroup of G then every chief factor of G covered by U is finite. This result can be used to show that the Frattini subgroup of a finitely generated linear group G is equal to the intersection of all the maximal subgroups of G of finite index, and to give a complete list of stanard wreath products with the faithful representations of finite degree over commutative fields.

H. Wielandt: Subnormalteiler maximaler Untergruppen

Sind A,B zwei verschiedene maximale Untergruppen einer endlichen Gruppe G und sind die normalen Kerne $A_G = B_G = 1$, so ist für jede gemeinsame subnormale Untergruppe S, ($S \trianglelefteq\trianglelefteq A$, $S \trianglelefteq\trianglelefteq B$, aber nicht notwendig $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$) einer der beiden Kerne S_A, S_B eine Sylowturmgruppe, deren Ordnung höchstens zwei verschiedene Primfaktoren enthält. Der Beweis beruht auf Normalisatoreigenschaften gewisser subnormaler Untergruppen, die mit Hilfe der in Abh. Hamburg 21 eingeführten "subnormal join functors" ω gebildet sind. Diese ordnen jeder endlichen Gruppe X eine charakteristische Untergruppe X^{ω} derart zu, daß $X^{\sigma\omega} = X^{\omega\sigma}$ für alle Isomorphismen σ gilt und daß aus $X,Y \trianglelefteq\trianglelefteq Z$ folgt: für das Erzeugnis $E = \langle X,Y \rangle$ ist $E^{\omega} = \langle X^{\omega}, Y^{\omega} \rangle$.

Dieter Blessenohl (Kiel)