MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 23/1971

Differentialtopologie, speziell Blätterungen

23.5 bis 29.5.1971

Professor KLINGENBERG übergab diesmal die Leitung Herrn GODBILLON aus Strasbourg, der in Verbindung mit den Herren MARTINET und REEB das spezielle, bewusst eingeengte, Thema auswählte.

Teilnehmer

N. A CAMPO, Poitiers

R. BARRE, Strasbourg

J. BOLTON, Durham

W.M. BOOTHBY, Strasbourg

Mme S. DOLBEAULT, Poitiers

P. DOMBROWSKI, Cologne

P. FURNESS, Durham

R. GERARD, Metz

C. GODBILLON, Strasbourg

A. HAEFLIGER, Genève

G. HECTOR, Strasbourg

C. IM HOF, Bâle

G. JOUBERT, Dijon

B. KLARES, Metz

C. LAMOUREUX, Paris

H.B. LAWSON, Stony Brook

R. LUTZ, Strasbourg

L. MARKUS, Minneapolis

J. MARTINET, Strasbourg

A. MARTINEZ NAVEIRA, Santiago de Compostela

J. MASA, Strasbourg

R. MOUSSU, Dijon

A. PHILLIPS, Stony Brook

O.I. RASMUSSEN, Aarhus

B. RAYMOND, Dijon

B.L. REINHART, College Park

J. RIGUET, Paris

S.A. ROBERTSON, Southampton

R. ROUSSARIE, Genève

C. SADLER, Metz

Mme A. SEC, Metz

D. TISCHLER, New-York

A. VIDAL, Santiago de Compostela

D. WEIL, Orsay

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

N. A CAMPO : Un feuilletagé de codimension 1 sur S^5.

Proposition. Il existe un feuilletage sur S^5 ayant pour feuilles

- trois feuilles compactes $S^1 \times \partial Y$,
- des feuilles $Y - \partial Y$,
- des feuilles $S^1 \times S^1 \times (S^2 - (3 \text{ trous}))$,

où $(Y, \partial Y)$ est une variété à bord de dimension 4 obtenue en attachant à $(D^4, \partial D^4)$ une anse $S^1 \times I \times (D^2, \partial D^2)$ suivant un plongement $\lambda : S^1 \times \{0,1\} \times (D^2, \partial D^2) \longrightarrow \partial D^4 \subset D^4$ de deux tores solides $S^1 \times D^2$ non noués, et simplement enlacés.

La démonstration utilise une action libre de T^2 sur $S^5 - (3 \text{ cercles})$; le quotient par cette action de $S^5 - (3 \text{ cercles})$ est difféomorphe à $C = S^3 - (3 \text{ trous})$. En enlevant de C trois lacets j_1, j_2, j_3, j_i partant du i-ème trou, on obtient $S^1 \times (S^2 - (3 \text{ trous}))$. Il en résulte que S^5 s'écrit comme une réunion de trois variétés à bord $A_1, A_2, A_3 \simeq S^1 \times (Y, \partial Y)$ et d'une variété à bord B, qui est fibrée en T^2 au dessus de $S^1 \times (S^2 - (3 \text{ trous}))$. Cela permet de feuilleter comme annoncé dans la proposition.

R. BARRE : Variétés quotients et feuilletages.

Définition. Soit S un ensemble ; un Q-atlas de S est un couple (X, π) où X est une variété et $\pi : X \longrightarrow S$ une surjection telles que

a) si x et x' ont même image par π dans S, il existe un voisinage U de x, un voisinage U' de x' et un difféomorphisme h de U sur U' tels que $h(x) = x'$ et $\pi(h(t)) = \pi(t) \quad \forall t \in U$;

b) si T est une variété, $f, f' : T \rightrightarrows X$ telles que $\pi f = \pi f'$, l'ensemble $T_o = \{ t \in T \mid f(t) = f(t') \}$ est ouvert dans T.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Si de plus S est muni d'une structure de groupe compatible avec la structure de variété quotient on dit que S est une <u>Q-variété en groupe</u>.

<u>Théorème</u>. <u>Toute Q-variété en groupe possède un Q-atlas qui est un vrai groupe de Lie</u>.

<u>Idée</u> : Toute Q-variété a un fibré tangent qui est une Q-variété. Etant donnés deux champs de vecteurs sur une Q-variété on peut définir leur crochet. A toute q-variété en groupe est associée une algèbre de Lie, et à toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ correspond une sous-Q-variété en groupe immergée H de Q . On conclut comme d'habitude.

G. BOLTON : <u>Transnormal systems</u>.

Let M be a C^p complete connected (+ ve)-definite riemannian manifold without boundary.

A <u>system of submanifolds</u> of M is a partition of M into C^p submanifolds called <u>foils</u> . No assumption is made about the dimensions of these submanifolds ; nor need they fit smoothly together.

A <u>transnormal system</u> of M is a system of submanifolds of M such that any geodesic segment of M is orthogonal to the foils of the system at none or all of its points.

Exemples of the above are :

- concentric spheres in E^n ;
- the intersection of the standard n-sphere $S^n \subset E^{n+1}$ by a parallel family of hyperplanes of E^{n+1} .

The talk concerned transnormal systems containing foils of codimension 1 and also foils of codimension $\geqslant 2$ (called singular foils) .

Let $\mathcal{F}$ be a T.S. as above, and let F be a singular foil. Let $p : NF \longrightarrow \overset{\circ}{F}$ be the normal bundle of F in M , and let $e_F : NF \longrightarrow M$ be the normal exponential map.

Theorem 1. Each foil is complete in its induced metric.

Theorem 2. i) e_F is surjective ;

ii) e_F^{-1}(foil) is a proper submanifold of NF which is a union of tubes ;

iii) e_F is a local diffeomorphism on the inverse image (under e_F) of the non-singular foils.

Theorem 3. If no tube of NF is mapped by e_F to a singular foil, then e_F is a diffeomorphism onto M which maps tubes of NF onto non-singular foils.

A few tentative conclusions were drawn from the above in the case where $\mathcal{F}$ has more than one singular foil discussed. In particular it was stated that in this case all non-singular foils are diffeomorphic and there are exactly two singular foils.

C. GODBILLON : A (perhaps) new invariant of codimension 1 foliations.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 d'une variété M défini par une forme de Pfaff intégrable et sans singularité ω . On déduit de la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ que l'on peut écrire $d\omega = \omega \wedge \omega_1$, $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$, $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega \wedge \omega_3$, ...

Proposition 1. La forme $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_1 \wedge d\omega_1$ est fermée, et sa classe de cohomologie $[\Omega] \in H^3(M,\mathbb{R})$ ne dépend que de $\mathcal{F}$.

Proposition 2. Soit X un champ de vecteurs sur M tel que $\omega(X) = 1$. On peut prendre $\omega_k = (L_X)^k \omega$.

On a alors $d\omega_k = \sum_{\substack{r+s=k \\ r \leq s}} \left[\binom{r}{s} - \binom{r}{s-1}\right] \omega_r \wedge \omega_s$. Par conséquent si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de base X_k avec $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, on a

$$[X_i, X_j] = \frac{(i+j+1)!}{i!j!}(j-i)\,X_{i+j-1}\ .$$

Proposition 3 . $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels à une variable.

On a $H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ pour $k \neq 3$ et $H^3(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ avec $[\Omega]$ pour générateur. Par conséquent du point de vue formel $[\Omega]$ n'est pas triviale.

G. JOUBERT : Linéarisation de difféomorphismes. Applications.

On se pose les problèmes suivants :

Problème 1 : soit $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^+)$ (ensemble des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^+$ de classe r conservant l'origine) ; existe-t'il $l \in \mathrm{Diff}^{r'}(\mathbb{R}^+)$ tel que

$$l f l^{-1}(x) = ax \qquad (1) \qquad ?$$

Problème 2 : soit $g \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^+)$ qui commutte avec f ; a-t'on pour le même l

$$l g l^{-1}(x) = bx \qquad ?$$

Si $f'(0) \neq 1$ les problèmes 1 et 2 sont résolus par Sternberg avec $r \geq 2$ et $r' = r-1$.

Si $f'(0) = 1$ on démontre le théorème suivant :

Théorème. Soit $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^+)$, $r \geq 0$, tel que $f'(0) = 1$ et f contractant. Il existe un C^1-difféomorphisme $F :]0, x_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

i) $F(f(x)) = F(x) + 1$;

ii) si $g \in \mathrm{Diff}^{r'}(\mathbb{R}^+)$, $r' \geq 1$, commute avec f on a $F(g(x)) = F(x) + \alpha$.

Ce théorème permet de résoudre les problèmes 1 et 2 en posant $l = a^{F(x)}$, et en remarquant que l ne peut être différentiable en 0 .

Applications :

i) plongement de f vérifiant les conditions du théorème dans un groupe à un paramètre de difféomorphismes ;

ii) étude d'un feuilletage de codimension 1 au voisinage d'une feuille homéomorphe à un tore T^2 .

C. LAMOUREUX : Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces.

A great deal of new relations between the transversal structure of a foliation, the topology of its leaves and of their closures, of their holonomy and fundamental group together with, for example, the π_1 or the H^1_c of the total space X of the foliation $\mathcal{F}$ (X not necessarily compact, nor Hausdorff, nor ~~not~~ a differentiable manifold ; $\mathcal{F}$ of codimension one modelled on $B \times R$) can be obtained using one dimensional foliations on M^2 .

The so-called "simply bounding families" (which generalize homotopy) give many properties of a leaf F (or of $\bar{F}$) in a topological foliation.

The so-called "bounding families" (which generalize homology) give analogous properties of proper or exceptionnal leaves in a transversally C^2 foliation.

With the two other notions of "x_o-elementarily homotopical dependance" of two closed transversal to $\mathcal{F}$, with common point x_o , and of that of "secant" (of homotopy, of homology, ..., if $\mathcal{F}$ is transversally oriented) we attach to the leaf F of x_o new invariants of the the leaf F in $\mathcal{F}$.

These four concepts enter naturally, with their mutual relations, in a general theory (of first alinea. Their effective and precise role is shown by examples and non-trivial corollaries in each case of the other three alineas), only quickly sketched.

H.B. LAWSON : Codimension-one foliations of S^{2^k+3} .

Let $p(z_o,\dots,z_n)$ be a weighted homogeneous polynomial in (n+1)-variables such that $\nabla p = (\partial p/\partial z_o,\dots,\partial p/\partial z_n) \neq 0$ for $z \neq 0$, and set $S^{2n+1} = \{(z_o,\dots,z_n) \in C^{n+1} : |z|^2 = 1\}$. Let $V = \{ z \in C^{n+1} : p(z) = 0 \}$ and consider $L = V \cap S^{2n+1}$. Since 0 is a regular value of the map $p|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, L is a regular, compact, codimension-2 submanifold of S^{2n+1}, and a tubular neighborhood $T(L) \subset S^{2n+1}$ is diffeomorphic to $D^2 \times L$. Let $C = \overline{S^{2n+1} - T(L)}$.

Theorem 1. There exists a C^∞, codimension-one foliation of C having ∂C as the only compact leaf. All other leaves have the homotopy type of $S^n \vee \dots \vee S^n$ (ν times) where $\nu = \deg(\nabla p/|\nabla p| : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1})$.

Corollary. Given any integer $g \geq 0$, there exists a codimension-one foliation of S^3 having as a leaf the compact surface of genus g punctered at one point.

Proof. Consider the polynomial $p(z_o, z_1) = z_o^2 + z_1^{2g+1}$.

Corollary. There exists a codimension-one, C^∞ foliation of S^5 having one compact leaf diffeomorphic to $S^1 \times L$ where L is a circle bundle over T^2 of Chern class -3. There are two types of non-compact leaves. One is diffeomorphic to $T^2 \times \mathbb{R}^2$, the other has the homotopy type of a bouquet of 8 2-spheres.

Proof. Consider the polynomial $p(z_o, z_1, z_2) = z_o^3 + z_1^3 + z_2^3$.

Corollary. There exists codimension-one, C^∞ foliations of $D^2 \times S^3$ and $D^2 \times V_{4,2}$, where, in general, $V_{n,2} = SO(n)/SO(n-2)$.

Corollary. If there exists a codimension-one, C^∞ foliation of $D^2 \times V_{n,2}$, then there exists a codimension-one C foliation of S^{2n-1}.

Proof. Consider $p(z_o, \dots, z_{n-1}) = z_o^2 + \dots + z_{n-1}^2$.

Theorem 2. There exists codimension-one, C^∞ foliations of S^{2^k+3}, for $k = 1, 2, 3, \dots$

Proof. Is inductive from the last corollary.

Corollary . Let M be a compact manifold which fibers over S^{2^k+3} for some $k \geq 1$. Then every transversaly orientable codimension-one plane field on M is homotopic to a foliation.

Corollary (Milnor) . Let Σ^{2^k+3} be a differentiable homotopy sphere of dimension 2^k+3 for $k \geqslant 1$. Then there exists a smooth, codimension-one foliation of Σ^{2^k+3} .

Let $p_d(z_0, \ldots, z_n) = z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2$, and set $L^{2n-1}(d) = \{ z \in S^{2n+1} | p_d(z) = 0 \}$. If n is odd and $d \equiv \pm 1 \pmod 8$, then $L^{2n-1}(d) \simeq S^{2n-1}$ and is knotted in S^{2n+1} .

Corollary . There exist codimension-one, C^∞ foliations of S^{2^k+3} for $k \geqslant 1$ having the boundary of a tubular neighborhood of the knot $L^{2n-1}(d)$ as a leaf.

Theorem 3 . There exists codimension-one, C^∞ foliations of each of the manifolds $L^{2^k+3}(d)$ for $k , d \geqslant 1$.

R. LUTZ : Linear orthonormal k-fields and foliations on S^n .

One has the general problem, given an n-manifold M , of finding, for a given k , a k-field (i.e. k independant vector fields at each point) on M which spans an integrable k-plane field.

In case of S^n , there exists, by Radon-Hurwitz-Eckmann algebraic results, a k-field on S^n for all $k \leqslant h(n)$ ($h(n) = 2^c+8d-1$ if $n+1 = (2a+1)\, 2^{c+4d}$, $c \leqslant 3$; a, c, $d \geqslant 0$). Adams showed that $h(n)$ is the maximal number of such fields.

Radon-Hurwitz examples are of the following type, called linear orthonormal k-fields on S^n .

Such a k-field is given by k linear mappings A_i , $A_i \in O(n+1)$, such that $\langle A_i x, x \rangle = 0$, $\langle A_i x, A_j x \rangle = 0$, $i \neq j$, $\langle A_i x, A_i x \rangle = 1$ for all $x \in S^n$.

In other words we have A_i skew symmetric orthogonal, and $A_iA_j + A_jA_i = 0$ for $i \neq j$.

Then, the spanned k-field is integrable iff, for each $x \in S^n$, $A_iA_jx \in (A_1x, A_2x, \ldots, A_kx)$.

Classical examples are the fibrations $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow CP_n$ $(k = 1)$, $S^3 \longrightarrow S^{4p+1} \longrightarrow HP_p$ $(k = 3)$, and the tangent bundle to S^7, all obtained from linear orthonormal k-fields.

<u>Theorem</u>. <u>If a linear orthonormal k-field</u> σ <u>on</u> S^n <u>spans an integrable k-plane field, then</u>

i) k+1 <u>divides</u> n+1 ;

ii) $k = 1$, <u>or</u> 3 , or 7 ;

iii) <u>for</u> $k = 1$ <u>or</u> 3 <u>and up to a linear automorphism of</u> S^n , σ <u>is one of the preceeding examples</u> ;

iv) <u>for</u> $k = 7$ <u>necessarely</u> $n = 7$ <u>and we obtain the preceeding example</u>.

<u>Remark</u>. For the Hopf fibration $S^7 \longrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$, by the preceeding result, it does not exist a linear orthonormal k-field σ tangent to the fiber S^7 at each point.

Question : does there exists a 1 (or 2, 3, ...)-field on S^{15} wich lies at each point in the tangent 7-plane to the Hopf fibration ?

R. LUTZ : <u>Structures de contact en dimension 3</u> .

Une <u>stucture de contact</u> sur une variété M^{2p+1} est une 1-forme ω telle que $\omega \wedge (d\omega)^p$ soit une forme volume (ce qui suppose M orientable) .

Le champ de 2p-plans associé à ω est dit <u>structure de contact</u> sur M .
Deux structures de contact σ_1 et σ_2 sont dites <u>isomorphes</u> s'il existe un difféomorphisme f de M tel que $f^*\sigma_1 = \sigma_2$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

CHERN, LOWNER et HOPF ont posé le problème de l'existence de structures de contact non isomorphes sur une variété où il y en a au moins une (par exemple sur le fibré unitaire cotangent à une variété N^p il y a une structure de contact naturelle induite par la forme de Cartan-Liouville sur T^*N). Le problème est d'autant plus intéressant que sur une variété compacte il y a <u>stabilité infinitésimale</u> des structures de contact : si σ_1 et σ_2 sont suffisamment C^1-voisins, et de contact, elles sont isomorphes (et même isotopes).

Un premier résultat à ce sujet est le suivant :

<u>Theorème 1. Si</u> M^3 <u>est une variété compacte orientable ayant pour revêtement universel</u> S^3, <u>alors il existe une infinité de classes d'homotopie de structures de contact sur</u> M.

Ce résultat est une conséquence du résultat suivant :

<u>Théorème 2. Si</u> M^3 <u>est compacte orientable, toute 1-forme sans zéro sur</u> M <u>est homotope à une forme de contact, l'orientation de cette forme étant arbitraire</u>.

Les mêmes méthodes conduisent aussi au :

<u>Théorème 3. Si</u> M^3 <u>est compacte orientable, si</u> ω <u>est une 1-forme sans zéro,</u> η <u>une 2-forme sans zéro, il existe</u> $\tilde{\omega}$ <u>homotope à</u> ω <u>avec</u> $d\tilde{\omega}$ <u>sans zéro et homotope à</u> η.

Un corollaire en est que, si on se donne un champ de vecteurs X sans zéro sur M et une forme volume v, il existe un champ sans zéro $\tilde{X}$ homotope à X et <u>unimodulaire</u> par rapport à v ($\theta(\tilde{X})v = 0$).

L. MARKUS : <u>Dynamical systems of codimension 1 (Poincaré-Bendixson theorem is true in dimension $n \geq 2$)</u>.

Consider a Lie group G acting differentiably on a compact differentiable manifold M^n. Assume $G = G_c^{n-2} \times \mathbb{R}^1$, where G_c^{n-2} is a compact Lie group (connected) of dimension $n-2$. Then we can define past and future limit sets of an orbit $G(x)$ (through point $x \in M$), and the concept of a past or future recurrent orbit, and other terminology of topological dynamics.

Example. $G = SO(1) \times \mathbb{R}^1$ on surface M^2 is classical qualitative theory of ordinary differential equations.

Note that each orbit $G(x)$ is $H \times \mathbb{R}^1$, or $H \times S^1$, or $H \tilde{\times} S^1$ where H is some homogeneous space of G_c^{n-2}.

Definition. Orbit $G(x)$ is periodic in case it is compact (manifold topology).

Definition. Orbit $G(x)$ is non-singular in case tangential mapping of Lie algebra of G is injection into tangent space at each point on $G(x)$ (that is G acts locally freely on $G(x)$).

Theorem. Let G acts on S^n. Let $G(x)$ be a non-singular orbit such that $G(x)$ meets no singular orbit. Then either

i) $G(x)$ is periodic, or

ii) the positive limit set of $G(x)$ is exactly one periodic orbit.

(this generalizes the classical Poincaré-Bendixson theorem)

Dieser Satz ist nicht trivial. Beweis : Klar !

Also it seems likely that a generalization of Denjoy-Schwartz holds.

Theorem. Let G acts on M^n compact. A non-singular minimal set K is either

i) a periodic orbit, or

ii) $K = M^n$ and M^n is a fiber bundle of H over T^2.

Recall the generalized Kronecker dictum : God created the torus, man invented all the rest.

R. MOUSSU : Feuilletages presque sans holonomie.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 , de classe $r \geq 2$, transversalement orientable d'une variété compacte M^n . On dit que $\mathcal{F}$ est presque sans holonomie si les feuilles non compactes de $\mathcal{F}$ ont une holonomie nulle.

Théorème 1. Si L_o est une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$ presque sans holonomie, isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de $\mathcal{F}$, son groupe d'holonomie est abélien libre.

Corollaire. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de M^3 dont les feuilles non compactes sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Alors :

i) les feuilles compactes sont homéomorphes à T^2 , et $\mathcal{F}$ ne possède pas de feuilles exceptionnelles ;

ii) M^3 est homéomorphe à une des variétés suivantes : un fibré sur S^1 de fibre T^2 , $T^2 \times [0,1]$, $D^2 \times S^1 \cup_T D^2 \times S^1$, $D^2 \times S^1$.

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire pour qu'un feuilletage soit presque sans holonomie.

Théorème 2. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage qui vérifie les conditions suivantes :

i) l'injection $i_L : L \longrightarrow M$ d'une feuille $L \in \mathcal{F}$ induit un isomorphisme $i_{\#} : \pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(M)$ injectif dont l'image contient le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(M)$;

ii) pour toute feuille compacte L_o , $i_* : H_1(L_o) \longrightarrow H_1(M)$ est surjective.

Alors $\mathcal{F}$ est presque sans holonomie et n'a pas de feuille exceptionnelle.

Corollaire. Les feuilletages de $T^2 \times I$ et T^3 sans composante de Reeb sont presque sans holonomie.

B. RAYMOND : A counterexample to a Poincaré-Bendixson type theorem on S^3.

The example proves the following :

Proposition. On S^3 there exists a smooth codimension-one foliation with some proper leaves without any compact leaf in their closure.

The construction is in three steps :

1) By properties of Seifert fiberings of S^3 (with two singular fibers), the complement M of a tubular neighborhood of a (p,q) torus knot can receive a foliation whose holonomy is given by an arbitrary subgroup of $\mathrm{Diff}(S^1)$ generated by two periodic diffeomorphisms of order p and q (these foliations are transverse to the Seifert fibering) .

2) If $D(M)$ denotes the double of the manifold M above, we go from $D(M)$ to S^3 by a meridian curve m in M. A foliation of M extends to $D(M)$ and gives rise to a foliation of S^3 by modification and surgery along m.

3) The example is obtained by taking as a subgroup of $\mathrm{Diff}(S^1)$ a group G generated by two periodic diffeomorphims of orders 2 and 3, whose orbits admit an exceptional minimal set (the idea of this group is derived from Sacksteder's paper : on the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one) .

B.L. REINHART : Automorphisms of plane fields.

A new criterion is given for the integrability of plane fields in terms of the existence of sufficiently many local automorphisms.

Lemma. Let G be a transitive abelian subgroup of the homeomorphisms group of $\mathbb{R}^n$. Then G is conjugate to the group of translations. The conjugating element is unique up to an affine homeomorphism, and is of class C^k if every $g \in G$ is.

Proof. 1) A transitive abelian group is simply transitive.

2) The normalizer of the translation group in the homeomorphism group is the affine group.

3) Topologize G with the point-open topology. By a theorem of R. Ellis, Duke Journal 1957, it is a topological group. Since it is abelian and homeomorphic to $\mathbb{R}^n$, it is isomorphic to the additive group of $\mathbb{R}^n$. The desired conjugacy is constructed out of this homeomorphism. The last statement follows from the Bochner-Montgomery theorem.

Theorem. A field E of plane elements on a manifold is integrable if and only if each point has a neighborhood U homeomorphic to $\mathbb{R}^n$ such that the restriction of E to U admits a transitive abelian group of automorphisms.

Proof. This follows from the lemma and the fact that the standard model for an integrable field is the field of parallel planes in $\mathbb{R}^n$, which is invariant by the translation group.

S.A. ROBERTSON : Parallel foliations of pseudoriemannian manifolds.

Any parallel field Φ of tangent k-planes on a pseudoriemannian m-manifold M is integrable and its integral manifolds form a foliation $\mathcal{F}$ of dimension k. Moreover, the leaves of $\mathcal{F}$ are totally geodesic. The ortogonal complement of Φ, denoted by $\Phi_\perp$, is also a parallel field of dimension $m-k$, and determines a corresponding foliation $\mathcal{F}_\perp$. Further, the dimension of the the plane $\Phi(x) \cap \Phi_\perp(x) = \Phi_\cap(x)$ is independant of $x \in M$, and is a third parallel field of tangent planes. A fourth parallel field Φ_+ is then obtained by taking $\Phi_+(x) = \Phi(x) + \Phi_\perp(x)$. The corresponding foliations are denoted by $\mathcal{F}_\cap$ and $\mathcal{F}_+$ resp. Let $\tau\mathcal{F}_\cap$ denote the tangent subbundle associated with $\mathcal{F}_\cap$ of the tangent bundle τM of M, and $\nu^*\mathcal{F}_+$ the dual of the normal bundle of $\mathcal{F}_+$. Then $\tau\mathcal{F}_\cap$ and $\nu^*\mathcal{F}_+$ have the same fibre dimension. The following structural theorems are obtained by exploiting classical results of A.G. Walker.

Theorem 1. There is an atlas on M that induces an affine atlas on every leaf of $\mathcal{F}_n$.

Theorem 2. There is a vector bundle isomorphism $\tau\mathcal{F}_n \simeq \nu^*\mathcal{F}_+$.

Corollary. If $\mathcal{F}$ is a parallel foliation of M^{2n} by null n-planes, then

i) $\tau(M) \simeq \tau(\mathcal{F}) \oplus \tau(\mathcal{F})$;

ii) $W_{2i+1}(M) = 0$ and $W_{2i} = W_i(\tau\mathcal{F})^2$;

iii) M admits an almost-complex structure.

Further structural theorems can be obtained for the case in which $\mathcal{F}_n$ fibres M .

R. ROUSSARIE : Classification de feuilletages sur T^3 .

Deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ définis sur une variété V^n sont conjugués s'il existe un homéomorphisme h envoyant les feuilles de $\mathcal{F}$ sur celles de $\mathcal{F}'$. La classification des feuilletages à conjugaison près peut ètre abordée -dans certains cas particuliers- par exemple pour le tore T^3 : en l'abscence de composantes de Reeb un feuilletage de T^3 ne possède pas d'ensembles minimaux exceptionnels. Il en résulte qu'un feuilletage sans feuilles compactes est conjugué à un feuilletage défini par une forme linéaire. On peut également déterminer le type topologique de tous les feuilletages de T^3 sans composantes de Reeb. Dans le cas des feuilletages analytiques, le résultat a une forme particulièrement simple : tout feuilletage analytique est conjugué à un feuilletage défini par une forme d'équation $\Omega = \varphi(t)dt + \psi(t)\omega$ (ω forme linéaire sur T^2) , modifié par un nombre fini de tourbillonnements de Reeb.

A. SEC : Feuilletages de Painlevé.

L'équation de Riccati dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est un couple d'équations de Pfaff complètement intégrables :

$$\Omega = z^2\omega_0 + z\omega_1 + \omega_2 + Q(x)dz = 0$$

$$\omega = \omega_0 + y\omega_1 + y^2\omega_2 - Q(x)dy = 0 \qquad \text{avec} \quad yz = 1 .$$

Cette équation définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension n dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - S$ (où S est un ensemble analytique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$: ensemble des points où les conditions de Cauchy ne sont pas réalisées) .

<u>Définition</u>. Le <u>rang</u> ρ^a de l'équation de Riccati en un point $a \in \mathbb{C}^n$ est le rang de $(\omega_0(a), \omega_1(a), \omega_2(a))$.

<u>Propriétés</u> :

1) Le feuilletage $\mathcal{F}$ induit dans $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ un feuilletage $\mathcal{F}'$ transverse à $\pi : (\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \theta$ (où θ a pour équation $Q(x) = 0$) .

2) Le feuilletage $\mathcal{F}'$ définit un isomorphisme analytique de $\pi^{-1}(x)$ sur $\pi^{-1}(x')$ le long de tout chemin $[x,x']$ (x et x' dans $\mathbb{C}^n - \theta$) .

3) $S = \emptyset \Longleftrightarrow \rho^a = \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est un feuilletage uniforme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

α) $a \in \theta$, $\rho^a = 0 \Rightarrow \pi^{-1}(a) \cap S = \pi^{-1}(a)$

β) $a \in \theta$, $\rho^a = 1 \Rightarrow \pi^{-1}(a) \cap S =$ (1 ou 2 points)

γ) $a \in \theta$, $\rho^a = 2 \Rightarrow \pi^{-1}(a) \cap S =$ (1 point) .

4) <u>Classification des équations de Riccati</u>.

Soit θ irréductible et $\rho^\theta = \sup_{a \in \theta} \rho^a$, et soit V^* l'ensemble des points de θ où dQ est non nulle.

1ère classe : $\rho^\theta = 1$; $V^* - S$ est une feuille de $\mathcal{F}$.

2ème classe : $\rho^\theta = 2$; il existe O , ouvert de $\pi(V^* - S)$, tel que toute feuille rencontrant $\pi^{-1}(O)$ est transverse à V^* en tout point où elle rencontre V^* .

<u>Conclusion</u> : généralisation aux équations pseudopolynomes.

D. TISCHLER : Another way to foliate S^5.

Let ξ be the Hopf bundle on CP_n. $E(\xi)$ = total space = S^{2n+1}.

Lemma 1. *Suppose Y^{2n} is a manifold with boundary in CP_n. Let $c \in H^2(CP_n)$ denote the class of ξ. Then denote by $\bar{c}$ the restriction of c to $H^2(Y)$. If a non-zero multiple of $\bar{c}$ is zero then $E(\xi|_Y)$ admits a codimension-one foliation tangent to the boundary.*

Proof. The structure group of $\xi|_Y$ reduces to a finite group and hence there is a flat connection whih is defined by a closed 1-form.

Lemma 2. *Let $X^{2n-2} \subset CP_n$ be an orientable compact manifold without boundary. Let V be a closed normal disc bundle of X. If the intersection number $[X] \cap [CP_1] = m \neq 0$ then $Y = CP_n - \mathring{V}$ satisfies the hypothesis of lemma 1.*

Proof. If m = intersection number, then $m\bar{c} = 0$. Use the fact that $[CP_1]$ is dual to c.

Corollary. *If X^{2n-2} can be found which is a bundle over S^1 and which satisfies the hypothesis of lemma 2, Then S^{2n+1} admits a codimension-one foliation.*

Theorem. *S^5 admits a codimension-one foliation.*

Proof. For X^2 take CP_1 and locally add a handle to produce a 2-torus T^2 such that $[CP_1] \cap [T^2] = 1$.

D. WEIL : Actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés de dimension 3.

On a le théorème suivant :

si V est une variété fermée orientable de dimension 3, V admet une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si V est fibrée sur S^1 de fibre T^2.

On peut alors classifier le type topologique des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés de dimension 3 de la manière suivante :

Théorème. Soit T une orbite compacte d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $V = T^2 \times I/f$ ($I = [0,1]$, $f \in \mathrm{Diff}^+(T^2)$ et $V = T^2 \times I/f$ est l'espace quotient de $T^2 \times I$ où $(x,1)$ est identifié avec $(f(x),0)$). Alors la variété obtenue en coupant V le long de T est difféomorphe à $T^2 \times I$.

Dans le cas de l'existence d'une orbite compacte on ramène donc la classification à celle des actions sur $T^2 \times I$.

S'il n'existe pas d'orbites compactes on obtient par ailleurs des théorèmes de classification analogues.

On obtient enfin les résultats suivants :

soit M_f la matrice représentant la classe d'isotopie de $f \in \mathrm{Diff}^+(T^2)$ et soit $V = T^2 \times I/f$ ($M_f \in Sl_2(\mathbb{Z})$).

Théorème. Si M_f n'a pas $+1$ comme valeur propre, toute action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V admet une orbite compacte.

Théorème. Toutes les structures de fibré sur S^1 de fibre T^2 de V sont équivalentes (i.e. il existe un homéomorphisme de V sur lui-même qui respecte les fibres).

C. Godbillon (Strasbourg)