MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 2/1972

Modell-Theorie

9.1. bis 15.1.1972

Unter der Leitung von Herrn Prof.Dr.G.H.Müller (Heidelberg) fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Arbeitstagung über Modell-Theorie statt. Fragen über die Struktur $\aleph_1$-kategorischer Theorien waren das beherrschende Thema. In einer Reihe von Vorträgen wurde die Arbeit:

S.SHELAH: Stability, the f.c.p. and Superstability, model-theoretic Properties of Formulas in First Order Theory; Annals of Math.Logic, vol. 3 (1971) p. 271 - 362,

weitgehend im Detail durchgearbeitet. Abgerundet wurde der Fragenkreis mit Vorträgen über die Eindeutigkeit von Prim-Erweiterungen für ω-stabile Theorien und über die Charakterisierung der $\aleph_1$-kategorischen Theorien abelscher Gruppen.

Teilnehmer:

H.Bergmann
W.Kaufmann-Bühler, Heidelberg
R.O.Buchweitz, Hannover
R.Deißler, Freiburg
E.Drewitz, Heidelberg
H.D.Ebbinghaus, Freiburg
U.Felgner, Heidelberg
K.Flemming, Heidelberg
U.Friedrichsdorf, Bonn
K.Gloede, Heidelberg
K.Heidler, Freiburg
M.Holz, Hannover
J.Jung, Heidelberg
B.Koppelberg, Bonn
S.Koppelberg, Bonn
P.Krauss, Heidelberg
J.Makowsky, Zürich
G.H.Müller, Heidelberg
A.Oberschelp, Kiel
H.Oellrich, Hannover
K.P.Podewski, Hannover
K.Potthoff, Kiel
A.Prestel, Bonn
J.Reineke, Hannover
P.Sauer, Hannover
P.Schmitt, Heidelberg
W.Schönfeld, Bonn
W.Schwabhäuser, Bonn
H.Seeland, Heidelberg
B.Six, Heidelberg
Spreckelmeyer, Hannover
K.Steffens, Hannover
G.Straub, Heidelberg
E.J.Thiele, Berlin
G.Todt, Kiel
T.v.d.Twer, Bonn
H.Zeitler, Heidelberg
M.Ziegler, Köln, Berlin

Vortragsauszüge

U.Felgner: Ein Vademecum algebraischer Theorien

Es wurde eine Übersicht über eine Reihe grundlegender modelltheoretischer Begriffe gegeben, die in einem engen Zusammenhang mit dem Gebiet der $\aleph_1$-kategorischen Theorien stehen. Diese Begriffe wurden an Hand algebraischer Theorien eingehend erläutert. (1) Die Theorie der elementar-abelschem p-Gruppen ist in allen endlichen und in allen unendlichen Mächtigkeiten kategorisch. (2) Die Theorie der atomfreien Booleschen Algebren ist nur in der Mächtigkeit $\aleph_0$ kategorisch. Sie ist nicht ω-stabil. (3) Die Theorie der Gruppe $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen hat die f.c.p. (finite cover property), da $\mathbb{Z}$ Untergruppen von beliebig hohem endlichen Index besitzt. (4) Falls F eine freie Gruppe ist, dann ist Th(F) nicht ω-stabil. Es gilt der folgende Satz: Falls G eine torsionsfreie Gruppe ist und Th(G) ω-stabil ist, dann ist G teilbar.

Die folgenden Vorträge geben eine Übersicht über die Paragraphen 2 - 5 der oben angegebenem Arbeit von S.Shelah.

P.Schmitt: Unstabilität und äquivalente Eigenschaften (nach Shelah § 2)

Eine Formel $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ heißt λ-stabil in dem Modell $\mathfrak{M}$, falls für jede Teilmenge $A \subseteq |\mathfrak{M}|$ gilt: falls $\mathrm{Card}(A) \leq \lambda$, dann auch $\mathrm{Card}(S_\varphi^m(A)) \leq \lambda$. Dabei ist $S_\varphi^m(A)$ der Stone-Raum aller vollständigen φ-m-Typen über A. Mithilfe der Mengen $S^m_{\varphi,\alpha}(A)$ wird der m-φ-Rang eines Types p definiert. Es wurde unter Anderem der folgende Satz bewiesen: Äquivalent sind:

(i) $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ hat die Ordnungs-Eigenschaft,

(ii) Es gibt keine endliche obere Schranke für die Ränge der m-φ-Typen,

(iii) Es existiert $A \subseteq |\mathfrak{M}|$ mit $\aleph_0 \leq \mathrm{Card}(A) \leq \lambda < \mathrm{Card}(S_\varphi^m(A))$.

Daraus folgt dann Satz 2.13 von S.Shelah.

G.Straub: Eigenschaften, die mit Hilfe von Typen definiert sind (nach Shelah §§ 3, 4).

Es wurde gezeigt, daß die Unabhängigkeits-Eigenschaft die Ordnungs-Eigenschaft impliziert. Gleichfalls folgt die Ordnungs-Eigenschaft aus der strengen Ordnungs-Eigenschaft. Wenn die Formel $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ die Ordnungs-Eigenschaft (O.E.) besitzt, dann existiert eine ununterscheidbare Folge, mit der $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ die Ordnungs - Eigenschaft hat.

U.Felgner: Definierbarkeit von Typen (nach Shelah § 3).

Es wurde der folgende Satz diskutiert: Sei $\mathfrak{A} = \langle A,\ldots\rangle$ eine elementare Substruktur des saturierten T-Modelles $\mathfrak{C} = \langle C,\ldots\rangle$ und sei $A \subset B \subseteq C$. Falls $p \in S^m_\varphi(A)$, dann kann p zu einem Typ $p^* \in S^m_\varphi(B)$ gleichen Ranges erweitert werden.

Eine erste Beweisidee ist etwa wie folgt: p wird in $\mathfrak{C}$ durch ein Element $\vec{e}$ realisiert. Setze

$$p^* = \{ \varphi(\vec{x},\vec{b}) \text{ if } \mathfrak{C} \models \varphi(\vec{e},\vec{b}) \; , \; \vec{b} \in B^n \}.$$

Man kommt so allerdings nicht zum Ziel, da $\vec{e}$ nicht in A zu liegen braucht. Dies führt zwangsläufig zum Begriff der ψ-B - Definierbarkeit von Typen. Es gilt: Falls $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ stabil ist und $\mathrm{Card}(B) \geq 2$, dann existiert $\psi(\vec{y},\vec{z})$ so daß $p \in S^m_\varphi(B)$ ψ-B-definierbar ist. Daraus folgt dann der oben zitierte Satz.

K.Gloede: Nicht-unterscheidbare Folgen und Mengen. (nach Shelah § 5).

Eine Menge $I = \{ \vec{a}^k \; ; \; k < \alpha \}$ von verschiedenen Folgen der Länge m heißt Δ - n - nicht unterscheidbare Folge (bzw.Menge), genau dann wenn für alle Formeln $\varphi(\vec{x}^0, \vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^{n-1}; \vec{y}) \in \Delta$ für alle $\vec{c} \in A$ und alle aufsteigenden Folgen $k_0 < \ldots < k_{n-1} < \alpha$ $\ell_0 < \ldots \ell_{n-1} < \alpha$ (bzw. verschiedene n-tupel $\{k_0,\ldots,k_{n-1}\}$,

$\{\ell_0, \ldots, \ell_{n-1}\}$ aus α) gilt:

$$\models \varphi(\vec{a}^{k_0}, \ldots, \vec{a}^{k_{n-1}}; \vec{c}) \Longleftrightarrow \models \varphi(\vec{a}^{\ell_0}, \ldots, \vec{a}^{\ell_{n-1}}; \vec{c}) .$$

I ist nicht-unterscheidbar über A gdw. I ist Δ -n nicht-unterscheidbar über A für alle n und Δ = Menge aller Formeln.

(1) Falls A und Δ endlich sind, so folgt aus dem Satz von Ramsey, daß jede unendliche Menge I eine unendliche Teilmenge enthält, die eine Δ -n nicht-unterscheidbare Folge über A ist.

(2) Die Methode von Ehrenfeucht - Mostowski benutzt (1) und den Kompaktheitssatz, um die Existenz von Modellen mit nicht-unterscheidbaren Folgen beliebiger Kardinalzahl zu zeigen.

(3) Es werden Bedingungen formuliert, unter denen jede nicht-unterscheidbare Folge auch nicht-unterscheidbare Menge ist. Insbesondere ist eine Theorie T stabil gdw. jede unendliche und (bzgl. den Modellen von T) nicht-unterscheidbare Folge eine nicht-unterscheidbare Menge ist. (4) Falls T stabil ist und eine geeignete Folge von Typen p_k gegeben ist, so bilden die $\vec{a}^k$, die p_k realisieren, eine nicht-unterscheidbare Folge. Als Anwendung erhält man: Ist T stabil, Card(T) $< \lambda$ und $\mathfrak{M}$ ein T-Modell, das λ -saturiert, aber nicht λ^+ -saturiert ist, so enthält $\mathfrak{M}$ eine nicht-unterscheidbare Menge der Kardinalzahl λ , aber keine derartige Menge mit größerer Mächtigkeit. (5) Weitere Aussagen über nicht-unterscheidbare Folgen und Mengen folgen aus der Annahme, daß T nicht die f.c.p. (endl.Überdeckungs-Eigenschaft) bzw. nicht die Unabhängigkeits-Eigenschaft besitzt.

<u>K.P.Podewski:</u> Über die Mächtigkeit des Stone-Raumes (nach Shelah § 4).

Für eine Kardinalzahl λ sei Ded(λ) die kleinste Kardinalzahl μ derart , daß keine linear-geordnete Menge D der Mächtigkeit μ existiert, die eine dichte Teilmenge der Kardinalität $\leq \lambda$ besitzt. Es wurde der folgende Satz bewiesen: Falls $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ unstabil ist, $\lambda < \kappa <$ Ded(λ), dann existiert eine Menge A mit Card(A) $\leq \lambda < \kappa \leq$ Card(S^m_φ(A)). Falls $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ die Unabhängigkeits-Eigenschaft hat, dann existiert zu jedem λ ein A so daβ Card(A) $\leq \lambda < 2^\lambda$ = Card(S^m_φ(A)). Umkehrung: Falls für eine unendliche Menge A eine reguläre Kardinalzahl λ existiert, so daβ Ded(Card(A)) $\leq \lambda \leq$ Card(S^m_φ(A)), dann hat φ die Unabhängigkeits-Eigenschaft. Abschlieβend wurden die Sätze 4.4 und 4.6 diskutiert.

<u>U.Felgner:</u> $\aleph_1$-kategorische Theorien abelscher Gruppen

In seiner Arbeit „ On ω_1-categorical theories of abelian groups" (Fundamenta Math. vol.70(1971)p.254-270) hat Herr A.Macintyre diejenigen abelschen Gruppen G klassifiziert, deren Theorien Th(G) ω-stabil sind: für eine abelsche Gruppe G ist Th(G) dann und nur dann ω-stabil, wenn G = D $\oplus$ H , wobei D teilbar und H von beschränkter Ordnung ist. Daraus folgt nach Macintyre dann der folgende Satz: Sei G eine abelsche Gruppe. Dann ist Th(G) dann und nur dann $\aleph_1$-kategorisch, wenn entweder G = K $\oplus$ H , mit H endlich und K = direkte Summe von Kopien einer festen endlichen zyklischen Gruppe von Primzahl-potenz-Ordnung, oder: G = D $\oplus$ H mit H endlich und D teilbar mit der Eigenschaft, daβ D für jede Primzahl p höchstens endlich viele Elemente der Ordnung p enthält.

<u>J.A.Makowsky:</u> Eindeutigkeit von PrimModellen.

Es wurde in diesem Vortrag über die Ergebnisse von S.Shelah: „ Uniqueness and Characterization of Prime Models over Sets for totally transcendental first-order Theories" (Journal of Symbolic Logic 37(1972)p.107-113) vorgetragen.

U.Felgner (Heidelberg)