MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 3/1972

Arbeitstagung über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen

16.1. bis 22.1.1972

Unter Leitung der Herren H. Heyer und L. Schmetterer beschäftigte sich die Arbeitsgemeinschaft insbesondere mit unendlich oft teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen auf lokalkompakten Gruppen. Folgende Themen standen dabei im Mittelpunkt: Eine neue Charakterisierung der Gauß-Verteilungen auf einer gewissen Klasse lokalkompakter abelscher Gruppen, Probleme der Einbettung unendlich oft teilbarer Wahrscheinlichkeitsmaße, unendlich oft teilbare W-Maße auf maximal fastperiodischen Gruppen sowie die Lévy-Khinchine-Formel für Lie projektive maximal fastperiodische Gruppen. Außerdem trugen die Herren E. Dettweiler, K. Schmidt und C.L. Scheffer über eigene Ergebnisse aus dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie vor.

<u>Eingeladen waren:</u>

W. Böge, Heidelberg
H. Carnal, Bern
I. Csiszár, Budapest
E. Dettweiler, Tübingen
H. Guth, Wien
W. Hazod, Wien
H. Heyer, Tübingen
H. Muthsam, Wien
K.R. Parthasarathy, Bombay
C.L. Scheffer, Utrecht
H. Scheller, Tübingen
L. Schmetterer, Wien
K. Schmidt, London
E. Siebert, Tübingen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A. Tortrat, Paris
K. Urbanik, Wroclaw
W.A. Woyczynski, Wroclaw

Die Herren W. Böge, I. Csiszâr, K.R. Parthasarathy, A. Tortrat, K. Urbanik und W.A. Woyczynski mußten zu ihrem Bedauern absagen.

Vorträge

I. Gaußsche Maße auf Corwinschen Gruppen

Die Herren Muthsam, Scheller, Hazod, Dettweiler und Guth referierten über drei Arbeiten von L. Corwin (Generalized Gaussian Measure and a "Functional Equation", J. Functional Anal. 5 (1970), 412-427, 6 (1970), 481-505, Advances in Mathematics 6 (1971), 239-251).

Eine lokalkompakte abelsche Gruppe G heiße Corwinsch, wenn die Abbildung $x \longrightarrow 2x$ von G in sich ein Automorphismus ist. In diesem Fall ist auch die Abbildung $\xi : G \times G \longrightarrow G \times G$, definiert durch $\xi(x,y) = (x+y, x-y)$, ein Automorphismus. Jede auf den Borelschen Teilmengen kompakter Mengen von G definierte komplexwertige, σ-additive Funktion μ heiße Maß auf G. In Anlehnung an eine bekannte Charakterisierung der Normalverteilungen auf $\mathbb{R}$ heiße μ ein (symmetrisches) Gaußsches Maß auf G, wenn ein zweites Maß ν existiert, so daß die "Funktionalgleichung"

$$(*) \quad \mu \otimes \mu \, (E) = \nu \otimes \nu \, (\xi(E))$$

für alle relativkompakten Borelschen Teilmengen E von G erfüllt ist. Besitzen die Maße μ bzw. ν Dichten f bzw. g bezüglich des Haar-Maßes λ_G, so erfüllen diese fast überall die Gleichung

$$(**)\quad f(x)f(y) = g(x+y)g(x-y).$$

Eine Funktion $h : G \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{o\}$ heiße <u>quadratischer Quasi-charakter</u>, wenn h meßbar ist und die Funktion u auf $G \times G$, definiert durch $u(x,y)=h(x+y)/h(x)h(y)$, für alle $(x,y)\in G \times G$ bilinear ist, d.h. die Gleichung $u(x_1+x_2,y) = u(x_1,y)u(x_2,y)$ für alle $x_1,x_2,y \in G$ erfüllt. Gilt zusätzlich $|h(x)| = 1$ für alle $x \in G$, so heiße h <u>quadratischer Charakter</u>.

<u>Satz 1</u>

Es seien G eine Corwinsche Gruppe und μ, ν zwei Maße, welche die Beziehung $(*)$ erfüllen und absolut stetig bzgl. λ_G sind. Dann existiert eine offene Corwinsche Untergruppe G_o, so daß $G_o = \mathrm{Tr}\,\mu = \mathrm{Tr}\,\nu$ ist. Bezeichnet λG_o das Haar-Maß auf G_o, so existieren ferner ein $c \in \mathbb{C}$ und ein stetiger, gerader, quadratischer Quasicharakter f auf G_o, so daß $d\mu(x) = cf(x)d\lambda_{G_o}(x)$ und $d\nu(x) = \pm c(f(x/2))^2 d\lambda_{G_o}(x)$ ist. Umgekehrt ist jedes Maß der angegebenen Gestalt ein Gaußsches Maß.

Seien jetzt G eine kompakte Corwinsche Gruppe mit der Charaktergruppe Γ und μ ein Gaußsches Maß auf G. μ heiße <u>groß</u>, wenn für alle $\gamma \in \Gamma$ $|\hat{\mu}(\gamma)| = 1$ ist, und <u>klein</u>, falls für $\gamma \neq o$ stets $|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$ ist. Die großen Gaußschen Maße lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

<u>Satz 2</u>

Ist μ ein großes Gaußsches Maß, so ist der Träger von μ eine endliche Untergruppe von G, und die Funktion $x \longrightarrow \mu(\{x\})$ auf G ist ein Vielfaches eines geraden quadratischen Charakters.

Zur Charakterisierung der kleinen Gaußschen Maße benötigt man die folgende Definition: Ein Gaußsches Maß heiße Matrizen-Maß, wenn für jede Untergruppe $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ von endlichem Rang eine symmetrische Matrix B_α existiert, deren Realteil positiv definit ist, so daß für $\gamma \in \Gamma_\alpha$ gilt: $\hat{\mu}(\gamma) = \exp(-B_\alpha \gamma, \gamma)$.

Satz 3

Jedes kleine Gaußsche Maß läßt sich in eindeutiger Weise als als Produkt eines Matrizenmaßes mit einem großen Gaußschen Maß darstellen.

Durch die großen und kleinen Gaußschen Maße ist die Menge aller Gaußschen Maße auf einer kompakten Corwinschen Gruppe bereits bestimmt:

Satz 4

Sei μ ein Gaußsches Maß auf G, so daß $\hat{\mu}$ auf Γ nicht verschwindet. Ist $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : |\hat{\mu}(\gamma)| = 1\}$, so existieren eindeutig bestimmte Maße μ_B und ν mit den Eigenschaften:

(1) $\mu = \mu_B * \nu$,

(2) ν ist ein großes Gaußsches Maß,

(3) μ_B ist auf $\Gamma_1^\perp$ konzentriert und als Maß auf $\Gamma_1^\perp$ ein Matrizenmaß.

Schließlich wurde der Spezialfall behandelt, daß die Gruppe G der $\mathbb{R}^n$ ist. Die hier betrachteten Maße sind komplexe Linearkombinationen regulärer Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ (also insbesondere nicht notwendig beschränkte Maße!). Das Hauptergebnis lautet:

Satz 5

Sei $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein invertierbarer, selbstadjungierter Operator und $\xi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die durch $\xi_A(x,y) = (x+Ay, Ax-y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung. Seien ferner μ, ν zwei Maße auf dem $\mathbb{R}^n$, für die gilt:

(a) $\mu \otimes \mu \; (E) = \nu \otimes \nu \; (\xi_A(E))$ für alle meßbaren Teilmengen E von G.

(b) Es existiert ein $a > o$, so daß $\exp(-a\langle x,x\rangle)$ μ-integrierbar ist.

μ ist dann auf einem Teilraum $\mathbb{R}^m$ des $\mathbb{R}^n$ konzentriert. Außerdem gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ und eine symmetrische komplexe $m \times m$ Matrix, so daß $d\mu(x) = c \exp(-\langle \pi Bx,x\rangle)\, dx$ ist.

Ist speziell $A = I$ (Identität), so gelten diese Aussagen auch ohne die Voraussetzung (b).

Dieses Ergebnis läßt sich mit den Ergebnissen verknüpfen, die man für den Fall einer kompakten Corwinschen Gruppe erhalten hatte (Satz 4):

Satz 6

Ist C eine kompakte Corwinsche Gruppe, so läßt sich jedes Gaußsche Maß μ auf $\mathbb{R}^n \times C$, dessen Fouriertransformierte nirgends verschwindet, als Produkt $\mu = \mu_1 * \mu_2$ schreiben, wobei μ_1 ein Matrizenmaß auf $\mathbb{R}^n \times C$ und μ_2 ein großes Gaußsches Maß ist, das auf endlich vielen Punkten von C konzentriert ist.

Herr H e y e r stellte anschließend den Zusammenhang her zwischen den Gaußschen Maßen im Sinne der Arbeiten von Corwin einerseits und den Gaußschen Maßen im Sinne von Parthasarathy (Probability measures on metric spaces, Academic Press, New York, London (1967)) andererseits.

Es sei G eine abelsche lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie. $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ heiße <u>C-Gaußsch</u>, d.h. Gaußsch im Sinne von Corwin, wenn ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie unabhängige G-Zufallsvariable X,Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ existieren mit $P_X = P_Y = \mu$, so daß X + Y und X - Y unabhängig sind. $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ heiße <u>P-Gaußsch</u>, wenn μ ein Gaußsches Maß im Sinne von Parthasarathy ist. Mit $\mathfrak{G}_C(G)$ werde die Klasse der C-Gaußschen Maße auf G, mit $\mathfrak{G}_P(G)$ die Klasse der P-Gaußschen Maße auf G bezeichnet. Es gilt $\mathfrak{G}_P(G) \subset \mathfrak{G}_C(G)$, aber im allgemeinen nicht die umgekehrte Inklusion.

Sei nun speziell G eine Corwinsche Gruppe. $\mathfrak{J}_C$ bezeichne die Menge der idempotenten Elemente in $\mathfrak{G}_C(G)$. Mit Hilfe der Corwinschen Beweismethoden läßt sich nun der folgende Zusammenhang zwischen $\mathfrak{G}_C(G)$ und $\mathfrak{G}_P(G)$ aufdecken:

Für jede Corwinsche Gruppe G gilt $\mathfrak{G}_C(G) = \mathfrak{J}_C * \mathfrak{G}_P(G)$.

Ist Γ zudem zusammenhängend, so hat man insbesondere $\mathfrak{G}_C(G) = \mathfrak{G}_P(G)$.

Herr S c h m i d t trug danach über eine eigene Arbeit vor, die sich mit einer ähnlichen Thematik wie die Arbeit von Corwin befaßt (K. Schmidt, On a characterisation of certain infinitely divisible positive definite functions and measures, to appear in J. London Math.Soc. (1972)). Die Resultate dieser Arbeit stehen in engem Zusammenhang mit den Resultaten von Corwin. Die Beweismethoden sind jedoch völlig verschieden.

Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Eine positiv definite Funktion auf G x G heiße <u>von Produktform</u>, wenn es zwei positiv definite Funktionen φ_1, φ_2 auf G gibt, so daß $\varphi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ für alle $x_1,x_2 \in G$ ist. Sei $T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ eine Bijektion auf G x G mit der Eigenschaft, daß die A_i Automorphismen von G sind. Es ist $T(x_1,x_2) = (A_1x_1 \cdot A_2x_2, A_3x_1 \cdot A_4x_2)$.

<u>Satz 1</u>

Sei φ eine positiv definite Funktion von Produktform auf G x G mit $\varphi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Ist $\varphi(T(x_1,x_2))$ ebenfalls von Produktform, so sind φ_1 und φ_2 unendlich teilbar.

<u>Satz 2</u>

Ist G eine abelsche lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie, so sind unter den Voraussetzungen von Satz 1 die Funktionen φ_1 und φ_2 Fouriertransformierte von Gauß-Maßen im Sinne von Parthasarathy.

Sind $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ W-Maße, die die Beziehung $T(\mu_1 \otimes \mu_2) = \nu_1 \otimes \nu_2$ erfüllen, so enthält Satz 2 gerade die Aussage, daß μ_1 und μ_2 Gauß-Maße im Sinne von Parthasarathy sind.

II. <u>Probleme der Einbettung unendlich oft teilbarer W-Maße</u>

Herr S c h m e t t e r e r trug über ein bei der Frage der Einbettbarkeit unendlich oft teilbarer W-Maße neu entstandenes Problem vor.

Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $r_n r_{n+1}^{-1} \in \mathbb{N}$ und $S(r_n)$ die von r_n erzeugte Halbgruppe.

$\Sigma = \bigcup_{n\geq 1} S(r_n)$ werde eine <u>reelle submonogene Halbgruppe</u> genannt. Eine beliebige Halbgruppe heiße nun <u>submonogen</u>, wenn sie homomorphes Bild einer reellen submonogenen Halbgruppe ist. Ist G eine lokalkompakte Gruppe, so heißt $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ <u>einbettbar in einen Homomorphismus über eine submonogene Halbgruppe</u>, wenn es eine reelle submonogene Halbgruppe $\Sigma = \bigcup_{n\geq 1} S(r_n)$ und einen Homomorphismus $\varphi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{M}^1(G)$ mit $\varphi(r_1) = \mu$ gibt.

Herr Schmetterer zeigte nun, daß jedes unendlich oft teilbare Dirac-Maß in einen Homomorphismus über eine submonogene Halbgruppe einbettbar ist.

Bekanntlich ist nicht jedes unendlich oft teilbare Maß $\mu\in\mathcal{M}^1(G)$ in einen Homomorphismus über $\mathbb{Q}_+$ einbettbar.

Ist nämlich G die freie abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und den Relationen $x_1 = nx_n$ $(n\geq 1)$, so ist das Dirac-Maß ε_{x_1} unendlich oft teilbar, aber nicht einbettbar.

Sei nun $(n_k)_{k\geq 1}$ eine nicht fallende Folge natürlicher Zahlen mit $(n_1,\ldots,n_\ell) = 1$ für $\ell\geq 2$. Sei $z_1 = x_1$, $z_2 = x_{n_1},\ldots,z_{k+1} = u_k z_k + v_k x_{n_k}$, wobei $u_k n_k + v_k n_1\ldots n_{k-1} = 1$ $(u_k, v_k \in \mathbb{Z})$ sei.

Dann ist $z_k = z_{k+1} n_k$ und die von den z_k erzeugte Halbgruppe submonogen, da sie gemäß $\varphi(\frac{1}{n_1\ldots n_k}) = z_{k+1}$ homomorphes Bild der durch $1, \frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_1\ldots n_k},\ldots$ erzeugten reellen submonogenen Halbgruppe ist. ε_{x_1} ist also einbettbar in eine submonogene Halbgruppe. Nach einer Mitteilung von Herrn K.H. Hofmann (New Orleans) ist dieses Beispiel "universell", so daß jedes unendlich teilbare Dirac-Maß auf einer beliebigen abelschen lokalkompakten Gruppe in eine submonogene Halbgruppe einbettbar ist.

Damit ist die Frage offen, ob jedes unendlich oft teilbare W-Maß stets "submonogen" einbettbar ist.

Herr H a z o d trug anschließend über die Gestalt nicht injektiver Homomorphismen $\varphi : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathcal{M}^1(G)$ (G=lokalkompakte Gruppe) vor.

Ist φ nicht injektiv, so existiert stets ein $r_o \in \mathbb{Q}_+$, eine kompakte Untergruppe $K \subset G$ und Elemente x_r $(r \geq r_o)$ des Normalisators von K, so daß für $r \geq r_o$ gilt:

$\mu_r = \varphi(r) = \varepsilon_{x_r} * \lambda_K$ (λ_K = Haarsches Maß auf K).

Auf maximal fastperiodischen Gruppen gilt sogar, daß alle $\mu_r (r \in \mathbb{Q}_+)$ von der Gestalt $\mu_r = \varepsilon_{x_r} * \lambda_K$ sein müssen und für ein $r_o \in \mathbb{Q}_+$ außerdem $x_{r_o} \in K$, also $\mu_{r_o} = \lambda_K$ ist.

Allgemeiner gilt der

<u>Satz</u>

Es sei G eine lokalkompakte Gruppe G, und es existiere eine stetige injektive Abbildung von G in den projektiven Limes von Lieschen Gruppen. Dann ist jeder Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathcal{M}^1(G)$ entweder injektiv oder von der "trivialen" Gestalt $r \longrightarrow \varepsilon_{x_r} * \lambda_K$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

a) Die x_r können so gewählt werden, daß $r \longrightarrow x_r$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}_+$ in G ist mit $x_{r_o} \in K$ für ein $r_o \in \mathbb{Q}_+$.

b) Wenn die von den x_r erzeugten Automorphismen von K innere Automorphismen sind, so ist der Satz richtig.

c) Falls K eine kompakte Liesche Gruppe ist und $r \longrightarrow \tau_r$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}_+$ in die Automorphismengruppe von K ist, so daß τ_{r_o} für ein r_o ein innerer Automorphismus ist, sind alle τ_r innere Automorphismen, und der Satz ist für Liesche Gruppen bewiesen.

d) Existiert eine stetige injektive Abbildung von G in den projektiven Limes von lokalkompakten Gruppen G_i $(i \in I)$, so daß jede Gruppe G_i die Eigenschaft besitzt, daß jeder Homomorphismus $r \longrightarrow \mu_r$ injektiv oder "trivial" ist, dann besitzt auch G diese Eigenschaft.

III. Unendlich oft teilbare W-Maße auf MFP-Gruppen

Herr S i e b e r t trug über unendlich oft teilbare W-Maße auf lokalkompakten maximal fastperiodischen Gruppen (MFP-Gruppen) vor.

1. Fourier-Analyse auf lokalkompakten MFP-Gruppen

Es sei G eine lokalkompakte MFP-Gruppe. Rep(G) sei die Menge der endlich-dimensionalen unitären Darstellungen, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, und $\mathcal{R}(G)$ die Koeffizienten-algebra von G. Jedem N aus dem algebraischen Dual $\mathcal{R}(G)^*$ läßt sich eine auf Rep(G) definierte Abbildung $\tilde{N}$ zuordnen. Vermöge dieser Zuordnung läßt sich $\mathcal{R}(G)^*$ zu einer Algebra machen. N heiße stetig, wenn $\tilde{N}$ stetig ist. Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_+^b(G)$ heiße $\hat{\mu} := \mu | \mathcal{R}(G)$ die Fourier-Transformierte von μ. $\varphi \in \mathcal{R}(G)^*$ heiße positiv definite Form, wenn $\varphi(f\bar{f}) \geq o$ für alle $f \in \mathcal{R}(G)$ ist, und <u>negativ definite Form</u>, wenn gilt: $\varphi(1) \geq o$, $\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}$ für alle $f \in \mathcal{R}(G)$, sowie $\varphi(f) \leq o$ für alle $f \in \mathcal{R}_+(G)$ mit $f(e) = o$. Für jedes $\mu \in \mathcal{M}^b_+(G)$ ist $\hat{\mu}$ eine stetige positiv definite Form.

Ist umgekehrt G eine lokalkompakte MFP-Gruppe, so daß jede stetige positiv definite Form auf $\mathcal{R}(G)$ Fourier-Transformierte eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}^b_+(G)$ ist (d.h. gilt auf G der Satz von Bochner), so heiße G eine B-Gruppe.

Jede Moore-Gruppe ist eine B-Gruppe.

$\mathcal{M}^1(G)$ sei im folgenden stets mit der vagen Topologie versehen.

<u>Satz 1</u>

Ist $(\mu_t)_{t>o}$ eine Halbgruppe in $\mathcal{M}^1(G)$ mit $\lim\limits_{t\searrow o} \mu_t = \varepsilon_e$, so gibt es genau eine stetige negativ definite Form ψ auf $\mathcal{R}(G)$ mit $\mu_t = \exp(-t\psi)$ für alle $t > 0$ und $\psi(1) = o$.

Ist umgekehrt G eine Moore-Gruppe und ψ eine stetige negativ definite Form auf $\mathcal{R}(G)$ mit $\psi(1) = o$, so gibt es genau eine Halbgruppe $(\mu_t)_{t>o}$ in $\mathcal{M}^1(G)$ mit $\lim\limits_{t\searrow o} \mu_t = \varepsilon_e$, so daß $\mu_t = \exp(-t\psi)$ für alle $t > o$ gilt.

2. Lévy-Khinchine-Formel für Moore-Gruppen

Sei G im folgenden eine Moore-Gruppe. $\psi \in \mathcal{R}(G)^*$ heißt <u>primitive Form</u>, wenn $\psi(fg^*) = \psi(f)g(e) - f(e)\psi(g)$ und $\psi(\bar{f}) = \overline{\psi(f)}$ für alle $f,g \in \mathcal{R}(G)$ gilt ($g^*(x) = g(x^{-1})$).

$\psi \in \mathcal{R}(G)^*$ heißt <u>quadratische Form</u>, wenn für alle $f,g \in \mathcal{R}(G)$ $\psi(fg) + \psi(fg^*) = 2(\psi(f)g(e) + f(e)\psi(g))$ gilt und für alle $D \in \mathrm{Rep}(G)$ die Matrix $\tilde{\psi}(D)$ positiv definit ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ausgehend vom Satz von Hunt über die Gestalt des infinitesimalen Erzeugers von Halbgruppen von W-Maßen auf Lie-Gruppen erhält man eine komplexe Funktion γ auf $G \times \mathcal{R}(G)$, so daß gilt:

<u>Satz 2</u>

Ist ψ eine stetige negativ definite Form auf $\mathcal{R}(G)$ mit $\psi(1) = o$, so gibt es eine stetige primitive Form ψ_1, eine stetige quadratische Form ψ_2 und ein gewisses Maß $\eta \in \mathcal{M}_+^b(G \setminus \{e\})$, so daß für alle $f \in \mathcal{R}(G)$ gilt:

$$\psi(f) = \psi_1(f) + \psi_2(f) + \int (f(x) - f(e) - \gamma(x,f))\, d\eta(x)$$

Wird umgekehrt ψ durch diese Formel definiert, so gibt es stets eine Halbgruppe $(\mu_t)_{t>o}$ mit $\lim\limits_{t\searrow o} \mu_t = \varepsilon_e$, so daß $\mu_t = \exp(-t\psi)$ für alle $t > o$.

3. Gauß-Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen

Es sei G eine lokalkompakte Gruppe, $\nu \in \mathcal{M}^1(G)$ und $(\nu_t)_{t>o}$ eine Halbgruppe in $\mathcal{M}^1(G)$ mit $\nu_1 = \nu$. ν heiße <u>Gauß-Verteilung</u>, wenn gilt:

a) ν ist nicht entartet,

b) für jede Umgebung U von $e \in G$ ist $\lim\limits_{t\searrow o} \frac{1}{t}\, \nu_t(\complement U) = o$

Ist ν eine Gauß-Verteilung, so wird ν von der Zusammenhangskomponente G_o von e getragen. Ist umgekehrt $G \neq \{e\}$ zusammenhängend, so existiert auf G stets eine Gauß-Verteilung.

Auf Lie-Gruppen stimmt die Definition überein mit der durch den Satz von Hunt nahegelegten Definition. Mit Hilfe der Lévy-Khinchine-Formel (Satz 2) läßt sich zeigen, daß sich der obigen Definition der Gauß-Verteilung die Definitionen von Urbanik und Parthasarathy (auf lokalkompakten abelschen Gruppen) und Carnal (auf kompakten Gruppen) unterordnen.

IV. Vorträge über verschiedene Themen

a) Herr D e t t w e i l e r trug über Maße auf nuklearen topologischen Räumen vor.

Es seien X ein vollständig regulärer Raum und $\mathcal{B}_X$ der von den offenen Mengen erzeugte Borelkörper. $\mathcal{M}_+^b(X)$ bezeichne den Raum der positiven, beschränkten, straffen Maße auf $(X, \mathcal{B}_X)$. $\mathcal{M}_+^b(X)$ läßt sich als Teilmenge des topologischen Duals $\mathcal{M}(X)$ von $\mathcal{C}^b(X)$ auffassen. $\mathcal{M}_+^b(X)$ sei mit der von $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C}^b)$ induzierten Topologie versehen. Sei jetzt $(E_i)_{i \in I}$ (I gerichtet) eine Familie vollständig regulärer Räume. Für $i \leq j$ seien ferner stetige Abbildungen $p_{ij} : E_j \longrightarrow E_i$ gegeben mit den Eigenschaften (a) $p_{ii} = 1_{E_i}$ und (b) $p_{ik} = p_{ij} \circ p_{jk}$ für $i \leq j \leq k$. Die p_{ij} liefern stetige Abbildungen von $\mathcal{M}_+^b(E_j)$ in $\mathcal{M}_+^b(E_i)$, und man kann den projektiven Limes $\varprojlim \mathcal{M}_+^b(E_i)$ bilden. Ist $E = \varprojlim E_i$ und bezeichnet $p_i : E \longrightarrow E_i$ die kanonische Projektion in E_i, so ist die Abbildung $P : \mathcal{M}_+^b(E) \longrightarrow \varprojlim \mathcal{M}_+^b(E_i)$, definiert durch $P(\mu) = (p_i(\mu))$, eine stetige Injektion. Ist E ein Souslinscher Raum, d.h. Bild einer stetigen Surjektion auf einem polnischen Raum, so gilt darüber hinaus:

Satz 1

Ist $\overline{p_i(E)} = E_i$ für alle i, so sind die Räume $\mathcal{M}_+^b(E)$ und $\varprojlim \mathcal{M}_+^b(E_i)$ unter der Abbildung P homöomorph.

Sind die Räume E_i lokalkonvexe topologische Vektorräume, und definiert man ein "Faltungsprodukt" auf $\varprojlim \mathcal{M}_+^b(E_i)$ durch $(\mu_i) * (\nu_i) = (\mu_i * \nu_i)$, so ist P außerdem ein Halbgruppenisomorphismus. Da jeder vollständige nukleare Raum E ein projektiver Limes von Hilberträumen H_i ist, gelten die obigen Aussagen insbesondere für Souslinsche, vollständige nukleare Räume. Sei E im folgenden ein solcher Raum. Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ heiße Gauß-Verteilung, wenn gilt:

a) μ ist unendlich teilbar,

b) aus $\mu = \nu * (e^{-\|\lambda\|} \sum\limits_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!})$ mit $\lambda \in \mathcal{M}_+^b(E)$ und $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ unendlich teilbar folge stets $\lambda = t \cdot \varepsilon_o$ ($t > o$, ε_o = Punktmaß im Nullpunkt)

Diese Definition erweist sich als äquivalent zur bekannten Definition der Gauß-Verteilung mit Hilfe der Fourier-Transformierten:

Satz 2

μ ist genau dann eine Gauß-Verteilung, wenn für die Fouriertransformierte $\hat{\mu}: E'_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt: Es gibt ein $x_o \in E$ und eine stetige lineare Abbildung $T : E'_\beta \longrightarrow E$ mit ~~daß von~~ $\langle T(x'), x' \rangle \geq o$ für alle $x' \in E'$, so daß von $\hat{\mu}$ der Gestalt ist:

$$\hat{\mu}(x') = \exp(i \langle x_o, x' \rangle - \langle T(x'), x' \rangle)$$

b) Herr S c h m i d t trug über Zufallsmaße und stetige Tensorprodukte vor.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{B}_o$ die Menge der relativ-kompakten Borelmengen B von $\mathbb{R}$. Ein <u>Zufallsmaß</u> ist eine Abbildung $X : \mathcal{B}_o \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

a) Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_o$ disjunkt, so sind $X(B_o,\cdot)$ und $X(B_2,\cdot)$ unabhängig, und es ist $X(B_1\ B_2,\cdot) = X(B_1,\cdot) + X(B_2,\cdot)$.

b) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{B}_o$ mit $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{B}_o$, so konvergiert $X(\bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n,\cdot)$ stochastisch gegen $X(\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n,\cdot)$.

c) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist $X(\{r\},\cdot) = o$

d) $X(B,\cdot)$ ist meßbar für alle $B \in \mathcal{B}_o$.

Jede meßbare Funktion $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Darstellung U_t^Y der reellen Geraden in $L_2(\Omega, P)$ durch

$$(U_t^Y f)(w) = (\exp itY(w))\, f(w) \qquad (f \in L_2(\Omega, P)).$$

Die Restriktion der Darstellung U_t^Y auf den von $\{U_t^Y 1\}$ erzeugten zyklischen Teilraum von $L_2(\Omega, P)$ ist eindeutig durch das positive Funktional $\varphi_Y(t) = \langle U_t^Y 1, 1\rangle = \hat{P}_Y(t)$ bestimmt. Ist X ein Zufallsmaß, so definiert auf diese Art die Familie $X(B,.)$ eine Familie positiv definiter Funktionen $\{\varphi_{X(B)}\}$ mit den Eigenschaften:

a') $\varphi_{X(B_1 \cup B_2)} = \varphi_{X(B_1)}\, \varphi_{X(B_2)}$ für disjunkte $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_o$

b') $\varphi_{X(\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n)} = \prod\limits_{n\geq 1} \varphi_{X(B_n)}$ für jede Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{B}_o$ mit $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{B}_o$.

c') $\varphi_{X(\{r\})} \equiv 1$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

Im folgenden sei X das dem Wiener-Prozeß zugeordnete Zufallsmaß. Genauer bezeichne X ein Zufallsmaß mit der zusätzlichen Eigenschaft: Für alle $B \in \mathcal{B}_o$ sei $X(B,\cdot)$ normalverteilt mit $E(X(B,\cdot)) = o$ und $Var(X(B,\cdot)) = \lambda(B)$ (λ = Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$).

X läßt sich zunächst mit Hilfe des Wienerschen Integrals zu einer Funktion $\tilde{X} : L_2(\mathbb{R},\lambda) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, so daß $E(\tilde{X}(f,\cdot)) = o$ und $Var(\tilde{X}(f,\cdot)) = \|f\|^2$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R},\lambda)$. $\tilde{X}$ definiert eine Darstellung von $L_2(\mathbb{R},\lambda)$ in $L_2(\Omega,P)$ durch

$$(U_f\,\alpha)(w) = (\exp i\tilde{X}(f,w))\,\alpha(w) \qquad (\alpha \in L_2(\Omega,P)).$$

Aus dieser gewinnt man, indem man die Darstellung auf den von $\{U_f\, 1\}$ erzeugten zyklischen Teilraum einschränkt, ein positives Funktional φ auf $L_2(\mathbb{R},\lambda)$, gegeben durch

$\varphi(f) = \langle U_f\, 1,1\rangle = \exp(-\frac{1}{2}\|f\|^2)$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R},\lambda)$.

Schränkt man φ auf den Schwartzschen Raum $\mathcal{S}$ ein, so existiert ein Gaußsches Maß μ auf dem Distributionenraum $\mathcal{S}'$, dessen Fouriertransformierte gerade φ ist. Man gewinnt auf diese Weise eine zu U_f unitär äquivalente Darstellung U_f' von $L_2(\mathbb{R},\lambda)$ in $L_2(\mathcal{S}',\mu)$, indem man setzt:

$$(U'_f\,\beta)(x) = (\exp i\langle f,x\rangle)\,\beta(x) \qquad (\beta \in L_2(\mathcal{S}',\mu)).$$

Eine weitere Realisierung von U_f, die deswegen interessant ist, weil man daraus die Struktur von $L_2(\mathcal{S}',\mu)$ ablesen kann, ergibt sich folgendermaßen: Es sei $Exp(L_2(\mathbb{R},\lambda))$ der symmetrische Fockraum über $L_2(\mathbb{R},\lambda)$, d.h.

$$Exp(L_2(\mathbb{R},\lambda)) = \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{R},\lambda) \oplus L_2^{(s)}(\mathbb{R}^2,\lambda) \oplus L_2^{(s)}(\mathbb{R}^3,\lambda) \ldots,$$

wobei $L_2^{(s)}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ den Raum derjenigen quadratisch integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, welche symmetrisch in ihren Variablen sind. Für $f \in L_2(\mathbb{R}, \lambda)$ seien

$$\operatorname{Exp} f = 1 \oplus \frac{f \otimes f}{\sqrt{2!}} \oplus \frac{f \otimes f \otimes f}{\sqrt{3!}} \oplus \cdots \text{ und } w(f) = \varphi(f) \operatorname{Exp} f.$$

Da $\langle w(f_1), w(f_2) \rangle = \varphi(f_1 - f_2)$ ist, ist die Darstellung $f \longrightarrow W_f$ mit $W_{f_1} \, w(f_2) = w(f_1 + f_2)$ unitär auf $\operatorname{Exp}(L_2(\mathbb{R}, \lambda))$. W_f ist unitär äquivalent zu U_f, da $w(o)$ zyklisch und $\langle W_f w(o), w(o) \rangle = \varphi(f)$ ist.

Anschließend wurde gezeigt, daß sich $\operatorname{Exp}(L_2(\mathbb{R}, \lambda))$ (und damit auch $L_2(\mathcal{f}', \mu)$) als stetiges Tensorprodukt im Sinne von [3] verstehen läßt, und die Darstellung W_f faktorisierbar ist.

Die obige Konstruktion läßt sich folgendermaßen auf nichtkommutative Gruppen übertragen: Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie und es sei $\varphi : \mathcal{B}_o \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

(1) $\varphi(B, \cdot)$ ist eine stetige positiv definite Funktion,

(2) $\varphi(\cdot, x)$ ist ein komplexwertiges, multiplikatives Maß auf $\mathcal{B}_o$,

(3) $\varphi(\{r\}, x) = 1$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.

Dann läßt sich hieraus mit den Methoden von [2] und [3] eine unitäre Darstellung einer Gruppe $\Gamma(\mathbb{R}, G)$ von Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ konstruieren, die auf einem Teilraum H eines symmetrischen Fockraumes über einem Hilbertraum wirkt, dort zyklisch ist, und ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Darstellung W im vorher beschriebenen Fall. Diese Konstruktion, die für die Quantenfeldtheorie von Bedeutung ist, geht ursprünglich auf H. Araki [1] zurück und wurde in [2] und [3] genauer analysiert und verallgemeinert.

([1] H. Araki, Factorizable Representations of Current Algebra, Publ. RIMS, Kyoto, Ser.A, Vol.5, Nr. 3, 361-422

[2] K.R. Parthasarathy, K. Schmidt, Factorizable Representations of Current Groups and the Araki-Woods Embedding Theorem, Acta Math. 128 (1972), 53-72

[3] K.R. Parthasarathy, K. Schmidt, Positiv definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems in probability theory, Manuskript (1971))

c) Herr S c h e f f e r trug über projektive Systeme in der Wahrscheinlichkeitstheorie vor.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt dieser Kategorie. Sind für alle Elemente i einer gerichteten Menge I Objekte X_i und Morphismen $\psi_{ij} : X_j \to X_i$ für $i \leq j$ gegeben mit den Eigenschaften: (a) $\psi_{ii} = 1_{X_i}$, (b) $\psi_{ik} = \psi_{ij} \circ \psi_{jk}$ für $i \leq j \leq k$, so heiße (X_i, ψ_{ij}) ein <u>projektives System</u>. Ein Objekt X und eine Familie $(\psi_i)_{i \in I}$ von Morphismen $\psi_i : X \to X_i$ mit $\psi_{ij} \circ \psi_j = \psi_i$ für $i \leq j$ heiße eine <u>Darstellung</u> des projektiven Systems. Ein <u>projektiver Limes</u> von (X_i, ψ_{ij}) ist nun eine Darstellung (Y, φ_i), so daß für jede andere Darstellung (X, ψ_i) ein Morphismus $\psi : X \to Y$ existiert mit $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es eine Reihe von Sätzen, die sich mit dem Problem der Existenz projektiver Limiten in Kategorien beschäftigen, deren Objekte gewisse

Wahrscheinlichkeitsräume und deren Morphismen Abbildungen mit gewissen Meßbarkeitseigenschaften sind. Genannt seien hier nur die klassischen Sätze von Kolmogoroff, Ionescu Tulcea und Prohoroff. Beim Satz von Kolmogoroff etwa ist I das System der endlichen Teilmengen einer vorgegebenen Menge T. Bei den Objekten des projektiven Systems handelt es sich um W-Räume der Gestalt $(\mathbb{R}^{|i|}, \mathcal{B}_{|i|}, P_i)$, und die Morphismen sind wahrscheinlichkeitstreue Projektionen π_{ij} auf geringer-dimensionale Teilräume.

Sei $\mathcal{C}_{K,D}$ jetzt die Kategorie, deren Objekte X kompakte Räume und deren Morphismen sog. <u>stetige Diffusionen</u> sind, d.h. die Morphismen $\psi : X \longrightarrow Y$ dieser Kategorie sind submarkoffsche Kerne mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für alle $f \in \mathcal{C}^b(Y)$ gilt: $(\psi f)(x) = \int_Y f(y)\psi(x,dy) \in \mathcal{C}^b(X)$.

Es gilt der

<u>Satz</u>

In $\mathcal{C}_{K,D}$ besitzt jedes projektive System einen projektiven Limes.

E. Dettweiler (Tübingen)