MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 4 /1972

Intervallrechnung

26.1. bis 29.1.1972

Ziel der 3. Tagung über Intervallrechnung in dem Oberwolfacher Forschungsinstitut unter der Leitung von K. Nickel, A. Krawzcyk und P. Wißkirchen war es, die neuesten Ergebnisse aus den verschiedensten Gebieten der Intervallrechnung zu diskutieren. Neben theoretischen Untersuchungen wurden auch Fragen der Intervallrealisierung auf einer DV-Anlage behandelt. Leider war die Tagungsdauer sehr knapp bemessen, so daß nur eine straffe Zeitplangestaltung es ermöglichte, die verschiedensten Teilaspekte der Intervallrechnung zu beleuchten.
Folgende Hauptthemen kristallisierten sich aus dem Tagungsprogramm:

1) Intervallarithmetische Verfahren zur Nullstellenbestimmung

2) Intervallarithmetische Algorithmen zur Lösung von Differentialgleichungen

3) Aussagen über Intervallpolynome und ihre Anwendungsmöglichkeiten

<u>Teilnehmer</u>

W. Appelt, St.Augustin-Birlinghoven
W. Barth, Darmstadt
F. Bierbaum, Karlsruhe
R. Dussel, Karlsruhe
R. Franzen, St.Augustin-Birlinghoven
W. Glaser, Heidelberg
Glatz, Karlsruhe

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M. Heidt, Karlsruhe
P. Henrici, Zürich
S. Hunger, St.Augustin-Birlinghoven
Jörn, München
W. Junginger, Stuttgart
Frau Kahlert-Warmbold, Erlangen
K. Kansy, St.Augustin-Birlinghoven
H.O. Klein, St.Augustin-Birlinghoven
A. Krawczyk, Clausthal-Zellerfeld
T. Kreifelts, St.Augustin-Birlinghoven
Kress, Karlsruhe
N. Krier, Ulm
K. Nickel, Karlsruhe
E. Nuding, Heidelberg
H. Ratschek, Düsseldorf
B. Rothmeier, Karlsruhe
G. Schmitgen, St.Augustin-Birlinghoven
B. Schmitt, Karlsruhe
G. Schröder, Karlsruhe
H. Schüth, St.Augustin-Birlinghoven
P. Thieler, Bonn
R. Tost, St.Augustin-Birlinghoven
U. Wauschkuhn, St.Augustin-Birlinghoven
J. Whiteman, London/Birlinghoven
P. Wißkirchen, St.Augustin-Birlinghoven
Frl. Wongwises, Bangkok/Karlsruhe
T. Zeh, Darmstadt

Vortragsauszüge

P. HENRICI: Die Trennung von Nullstellenhaufen durch Kreisscheibenarithmetik

Bezeichnung: Es sind a,b,...,z komplexe Zahlen oder Funktionen. A,B,...,Z Kreisbereiche im Sinne der Theorie der Möbiustransformationen. Mit den letzteren wird nach den natürlichen Regeln der Kreisscheibenarithmetik gerechnet; jedes Produkt AB mit der Eigenschaft, daß $a \in A \wedge b \in B \Rightarrow ab \in AB$ ist zulässig.

Aufgabe: Seien $0<m<n$ ganze Zahlen, $z_o, c_1, \dots, c_m$ komplexe Zahlen, $W_{m+1}, \dots, W_n$ Kreisbereiche. Über ein Polynom p vom Grad n mit den Nullstellen $w_1, \dots, w_n$ sei folgendes bekannt:

(i) $w_j \in W_j$, $j = m+1, \dots, n$

(ii) $q_k(z) := \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{p'(z)}{p(z)} \right)^{k-1}$ gesetzt, so gilt

$$q_k(z_o) = c_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Frage: Wo liegen die Nullstellen $w_1, \dots, w_m$?

Satz: Es seien $W_{m+1}, \dots, W_n$ Kreisscheiben, $z_o \notin W_j$, $j = m+1, \dots, n$. Sei $B_o := 1$,

$$S_k := c_k + \sum_{j=m+1}^{n} \left(W_j - z_o \right)^{-k}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$B_k := \frac{1}{k} \left(S_k + S_{k-1} B_1 + .. + S_1 B_{k-1} \right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Dann gilt $w_k = z_o + r_k$ $(k = 1, \dots, m)$ wo $r_1, \dots, r_m$ die Nullstellen eines Polynoms

$$t(r) := 1 + b_1 r + .. + b_m r^m$$ sind mit

$$b_k \in B_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Bemerkung: Im Falle $m = 1$ gilt der Satz auch, wenn $W_2, \dots, W_n$ beliebige Kreisbereiche sind (nicht nur Scheiben), und die Voraussetzung $z_o \notin W_n$ ist nicht erforderlich.

Es ergibt sich dann

$$w_1 \in W_1 := z_o - (c_1 - V_1)^{-1} \quad \text{mit}$$

$$V_1 := \sum_{j=2}^{n} (z_o - W_j)^{-1},$$

und jeder Punkt $w \in W_1$ kann Nullstelle eines Polynoms mit den Eigenschaften (i) und (ii) sein.

N. KRIER: Die Kreisarithmetik

Nach Einführung von komplexen Kreisen,

$$K = \{ z \in C \,/\, |z-z_m| \leq r \} =: (z_m, r), \; r \geq o,$$

werden Algorithmen zur Bestimmung der flächenkleinsten, komplexen Kreise entwickelt, die die Mengen A der arithmetischen Verknüpfungen von zwei Kreisen K_1, K_2,

$$A := K_1 * K_2 = \{ z_1 * z_2 \,/\, z_1 \in K_1, \; z_2 \in K_2 \}, \; * \in \{+, -, :, \cdot\}$$

überdecken.

Durch (1) werden nur komplexe Zahlenmengen beschrieben. Zur Charakterisierung von Mengen reeller und imaginärer Zahlen werden neben (1) reelle sowie imaginäre Kreise mit nichtpositiven Radien

$$K_{re} = ((x_m, o), -|r|) = \{ x \in R \,/\, |x-x_m| \leq |r| \}$$
$$K_{im} = ((o, y_m), -|r|) = \{ y \in iR \,/\, |y-iy_m| \leq |r| \}$$

angegeben.
Für die Menge K von Kreisen (komplexe, reelle und imaginäre) werden eine optimal-abschätzende sowie eine nach dem Permanenzprinzip abschätzende Kreisarithmetik aufgezeigt.

W. BARTH: Iterationsverfahren zur Berechnung aller Nullstellen einer Funktion

Es wird ein Verfahren beschrieben, das es gestattet, alle Nullstellen einer Funktion in einem gegebenen Intervall mit Fehlerschranken zu berechnen. Erläutert werden insbesondere die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens bei verschiedenen Voraussetzungen für die Funktion. Die Probleme, die bei der Anwendung des Verfahrens zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen entstehen, werden angedeutet.

K. KANSY: Ein Analogon zum Newton-Verfahren zur Bestimmung mehrerer mehrfacher reeller Nullstellen

Beim Newton-Verfahren der Ordnung n zur Bestimmung einer einfachen reellen Nullstelle von $f \in C^n[a,b]$ besteht die Iterationsvorschrift darin, daß anstelle von $f^{-1}(0)$ das Ersatzproblem $Q_n(0)$ gelöst wird, wobei Q_n die Taylorentwicklung von f^{-1} bis zur Ordnung n im jeweiligen Iterationspunkt $y_i = f(x_i)$ ist.

Beim analogen Verfahren der Ordnung n (≤ 4) besteht die Iterationsvorschrift darin, daß anstelle von $f^{-1}(0)$ das Ersatzproblem $P_n^{-1}(0)$ gelöst wird, wobei P_n die Taylorentwicklung von f bis zur Ordnung n im jeweiligen Iterationspunkt $y_i = f(x_i)$ ist.

In normaler Arithmetik ergibt das analoge Verfahren keinen Sinn, da keine eindeutige Iterationsfolge bestimmt werden kann. In Intervallarithmetik liefert dieses Verfahren jedoch eine absteigende Folge von sich verzweigenden Intervallen, wobei jeweils genau ein Zweig gegen eine der Nullstellen von f in $[a,b]$ strebt.

W. BARTH: Das Graeffe-Verfahren mit Fehlerabschätzungen

Aufbauend auf 2 Sätze von A. Ostrowski aus dem Jahre 1940 über das Graeffe-Verfahren wird eine Variante angegeben, die es gestattet, die Beträge aller Nullstellen eines Polynoms mit Fehlerschranken zu berechnen. Der so abgewandelte Algorithmus eignet sich gut für die Durchführung mit der Intervallrechnung. Die numerischen Tests führten zu überraschend guten Resultaten.

S. HUNGER: Lösung und Fehlerabschätzung bei Anfangswertaufgaben für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Es wird ein numerisches Verfahren angegeben, mit dem Fehlerschranken für Näherungslösungen von Anfangswertaufgaben bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen berechnet werden können. Die Abschätzung der Fehlerschranken ist unabhängig davon, wie die Näherung gefunden wurde. Die Näherungslösung wird in einfacher Arithmetik aufgestellt, während die Fehlerabschätzung mit Hilfe der Intervallarithmetik durchgeführt wird; alle Fehler, einschließlich der Rundungsfehler, werden erfaßt. Mit Hilfe der Defektmethode wird der Fehler, den die Näherungslösung besitzt, als Lösung eines inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen gefunden, dessen Störfunktionen die Defektabschätzungen der Näherungslösung sind. Dieses System wird unter Anwendung der Matrizantentheorie gelöst.

M. HEIDT: Zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es wird eine Darstellung der Lösung gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angegeben, für die eine numerische Auswertung geeignet ist, also keine numerischen Singularitäten enthält und nicht zur Auslöschung infolge Differenzbildung etwa gleichgroßer

Zahlen führt.- Darauf baut ein Einschritt-Verfahren zur numerischen Berechnung einer Näherungslösung zusammen mit einer Fehlerabschätzung für das AWP

$$y''(x) = f(x,y(x),y'(x)), \; y(x_o) = y_o,$$
$$y'(x_o) = y'_o \quad \text{auf.}$$

Die Differentialgleichung wird dabei in jedem Integrationsschritt lokal linearisiert, diese lineare Dgl. analytisch gelöst, deren Lösung mit einem Störansatz abgespalten und nur noch eine relativ "harmlose" Restdgl. numerisch gelöst. Mit Hilfe einer Defketabschätzung werden anschließend Fehlerschranken dieser Näherung berechnet. Das Verfahren erlaubt bei "stiff equations" eine gegenüber dem Ausgangsproblem wesentlich größere Schrittweite ohne Verlust der numerischen Stabilität.

R. TOST: Formelmäßige Inversion spezieller Matrizen zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Ausgehend von der formelmäßigen Inversion dreidiagonaler Matrizen werden die dabei gewonnenen Ergebnisse auf Blockmatrizen erweitert. Spezielle Blockmatrizen entstehen bei der Lösung partieller elliptischer Differentialgleichungen mit finiten Differenzenmethoden. Bei der sogewählten Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen treten Diskretisierungs- und Rundungsfehler auf, die mit Hilfe eines intervallarithmetischen Kalküls erfaßt werden können. Außerdem gelingt es, mit Hilfe eines Intervallpolynoms eine Abschätzung für die Wahl der Diskretisierungsschrittweite am Rande des Gebietes zu erhalten.

H. RATSCHEK: Über das Produkt von Intervallpolynomen

Das Produkt von Intervallpolynomen kann auf zwei Arten gebildet werden: 1. punktweise und 2. formal (analog dem Produkt reeller Polynome). Erstgenanntes Produkt erfüllt

die Forderung nach minimaler Fehlerbreite, besitzt jedoch den Nachteil, nicht notwendig ein Intervallpolynom, nicht einmal eine Intervallpolynomkette sein zu müssen, und ist in diesem Fall schwierig zu berechnen. Zweitgenanntes Produkt erfüllt die Forderung nach minimaler Fehlerbreite nicht, ist jedoch stets ein Intervallpolynom und einfach zu berechnen.- Von diesen Überlegungen ausgehend ist die Beantwortung folgender Fragen interessant:
Wann ist das punktweise Produkt von Intervallpolynomen ein Intervallpolynom ? Wann stimmt das punktweise Produkt mit dem formalen Produkt auf der reellen Achse bzw. auf Teilgebieten überein ?

H. SCHÜTH: <u>Ableitungsverträglichkeit bei Operationen mit Intervallpolynomen</u>

Es wird die Frage untersucht, in welchen Fällen die Ableitungsverträglichkeit der Approximation stetig differenzierbarer Funktionen einer reellen Variablen x durch Intervallpolynome bei der Anwendung arithmetischer Operationen auf die approximierten Funktionen erhalten bleibt, wenn auf der Seite der Intervallpolynome die entsprechenden formalen Operationen hinsichtlich der formalen Ableitung durchgeführt werden.
Bei exakter Rechnung mit reellen Intervallen ist diese Erhaltungseigenschaft trotz der Subdistributivität und Nichtassoziativität des formalen Produktes von Intervallpolynomen im Falle der Addition, Multiplikation, der Bildung ganzzahliger Potenzen und der Einsetzung stetig differenzierbarer Funktionen in gewöhnliche Polynome gegeben, dagegen nicht im Falle der Einsetzung stetig differenzierbarer Funktionen ineinander, wenn die Substitution der ableitungsverträglich approximierten Intervallpolynome durch iterierte Anwendung der Intervallpolynom-Addition und -Multiplikation geschieht. Die hierfür benötigte Regel $[\underline{Q}(\underline{P})]' \supseteq \underline{Q}'(\underline{P}) * \underline{P}'$ kann aber gerettet werden, wenn die Koeffizienten des

Intervallpolynoms $\underset{\smile}{\tilde{Q}}$ $(\underset{\smile}{\tilde{P}})$, aus denen die Intervallpolynome $\underset{\smile}{\tilde{Q}}$ und $\underset{\smile}{\tilde{P}}$ unter vorheriger Auflösung aller Klammern im Sinne der Subdistributivität intervallarithmetisch berechnet werden.

K. KANSY: Ein Polynombaukasten in FORTRAN IV

Beim Rechnen mit numerischen Objekten wie z.B. Polynome, Matrizen, mehrfach genaue Zahlen, die mehr Speicherplatz brauchen als die üblichen FORTRAN-Variablen, ergibt sich ein vermehrter Programmieraufwand dadurch, daß die Platzzuweisung explizit und a priori erfolgen muß und daß eine Änderung der Dimension sehr umständlich ist.

Bei Benutzung des Polynombaukastens belegen die Polynomsymbole nur 1 Speicherwort, in dem ein Index auf den Koeffizientenvektor steht. Den Polynomen wird erst dann ein Speicherbereich dynamisch zugeordnet, wenn er benötigt wird. Benutzte Speicherbereiche können wieder freigegeben werden.

G. SCHMITGEN: Approximation von Intervallfunktionen

Es handelt sich um das Problem, eine gegebene Intervallfunktion F und deren Ableitungen (sofern solche erklärt sind) durch Intervallpolynome P bis zu einer gegebenen Ordnung $k \geq 0$ ableitungsverträglich einzuschließen, wobei diese Einschließungen in gewissem Sinn optimal sein sollen. Für den Approximationsprozess werden dabei Metriken zugrunde gelegt, die Verallgemeinerungen der Tschebyscheff-Norm darstellen. Es werden Aussagen über Existenz und Charakterisierung der Intervallpolynome bester Approximation gemacht. In gewissen Spezialfällen gelingt es, effektive numerische Verfahren zur Berechnung der Intervallpolynome bester oder "nahezu bester" Approximation anzugeben.

B. ROTHMEIER: Die Berechnung der elementaren Funktionen beliebiger Genauigkeit.

Es wird ein maschinenunabhängiges Konzept zur Berechnung der elementaren Funktionen S Q R T, E X P, L N, A R C T A N, S I N, C O S angegeben.

1. Fall: Die gewünschte Genauigkeit ist variabel, also ein Eingabeparameter. Mit Hilfe einer linearen Theorie werden alle Rundungsfehler a-priori abgeschätzt. Die Prozeduren berechnen automatisch die erforderliche Anzahl von "Schutzziffern". Zur Reduktion werden Funktionalgleichungen, zur Approximation in einem hinreichend kleinen Intervall die Taylorreihe benutzt. Eine weitere lineare Theorie dient zur vollautomatischen Minimisierung der jeweiligen Rechenzeit. Für die Quadratwurzel S Q R T lassen sich darüberhinaus interessante Sätze über optimale Ergebnisse beweisen.
2. Fall: Die gewünschte Genauigkeit ist unveränderlich. Dann lassen sich die allgemeinen Methoden noch spezialisieren. Insbesondere dient jetzt ein näherungsweises Tschebyscheffpolynom, welches sich einfach als Newtoninterpolationspolynom berechnen läßt, zur Berechnung in einem hinreichend kleinen Intervall. Die Verwendung der Intervallarithmetik liefert in allen Prozeduren garantierte Fehlerschranken.

G. SCHRÖDER: Zur Differentiation von Intervallfunktionen

Eine Möglichkeit, Differentiationsverfahren anderer mathematischer Disziplinen in Beziehung mit Intervallfunktionen reellen Arguments zu bringen, besteht darin, daß man das additive System der Intervallarithmetik, versehen mit einer skalaren Multiplikation, in den Banachraum R^2 gemäß einem Satz von Radström einbettet. Auf diese Weise gelangt man zu einer Frechet-Ableitung für Intervallfunktionen, die allerdings nicht notwendig mehr eine Intervallfunktion ist. Indem man sich an die Theorie mengenwertiger Funktionen anlehnt, ergibt sich ein zweiter interessanter Weg zur Definition der Differentiation als Umkehrung einer Integration. Hierbei tritt die obige Schwierigkeit nicht ein, und es ist zudem die Ableitung eines Intervallpolynoms wieder eines. Auch im Falle, daß man als Argument der Intervallfunktionen Intervalle zuläßt, kann man zum Begriff des Frechet-Differentials gelangen und einen Differentiationskalkül aufbauen.

K. NICKEL: Numerische Differentiation

Es wird ein Verfahren und ein Algorithmus zur Numerischen Differentiation einer numerisch gegebenen Funktion angegeben. Die numerische Konvergenz wird bewiesen. Realisation in Triplex-ALGOL 60. Beispiele.

Th. KREIFELTS: Zur Güte intervallarithmetischer Einschließungen

Bei Anwendung von Intervallarithmetik auf einen beliebigen arithmetischen Prozeß werden Auswirkungen von ungenauen Eingabedaten und Rundungsfehlern sicher, aber u.U. pessimistisch eingeschlossen ("Nichtberücksichtigung von Abhängigkeiten"). Durch Einführung des Begriffs "Betragsableitung eines arithmetischen Prozesses" läßt sich die Diskrepanz zwischen der bestmöglichen und der intervallarithmetischen Einschließung des Wertebereichs eines arithmetischen Prozesses quantitativ erfassen, und zwar in linearer Näherung bezüglich der Rundungsfehler und der Eingabeintervallbreiten.

H.O. KLEIN: Lösung einer speziellen Klasse von Integralgleichungen mit parameterabhängigen Funktionen

Es wird gezeigt, wie man unter gewissen Voraussetzungen Integralgleichungen 2. Art vom Fredholmschen Typ, deren Kernfunktion von einer endlichen Menge von Parametern abhängen, lösen kann, so daß die Darstellung der Lösungseinschließung die lineare Abhängigkeit von den Ausgangsparametern wiedergibt.

R. FRANZEN: Die intervallanalytische Behandlung parameterabhängiger Gleichungssysteme

In den Problemkreis fällt z.B. die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit parameterabhängigen Koeffizienten, die Nullstellenbestimmung bei Polynomen, deren Koeffizienten parameterabhängig sind, und die Lösung des Eigenwertproblems bei parameterabhängigen Matrizen. Für die unter geringen Voraussetzungen eindeutig bestimmte Lösung des allgemein definierten parameterabhängigen Systems wird ein Approximationspolynom konstruiert, dessen Koeffizienten gerade die Taylorkoeffizienten der Lösung sind. Die Taylorkoeffizienten sind Lösungen von Systemen, die man durch mehrfache Differentation des gegebenen Systems nach den Parametern erhält. Werden diese entsprechend vergröberten Systeme intervallarithmetisch gelöst, erhält man völlig gesicherte Fehlerschranken für die gesuchte Lösung, indem man ein Intervallpolynom aufstellt, das die Lösung mehrfach ableitungsverträglich enthält.

R. DUSSEL: Die Behandlung eines Problems der konvexen Optimierung mit Intervallmethoden

Gegeben seien eine reellwertige, streng konvexe Funktion $\varphi \in C_1(R^n)$ und ein n-dimensionaler Quader Q.
Zu bestimmen sind der Minimalpunkt $\hat{x}$ von $\varphi|_Q$ und der Minimalwert $\varphi(\hat{x})$ jeweils mit Fehlerschranken.
Das Problem wird mit einem Halbierungsverfahren gelöst. Dabei werden zyklisch umlaufend die Kanten des Ausgangsquaders halbiert, so daß eine Folge von ineinandergeschachtelten Quadern entsteht, die den Minimalpunkt $\hat{x}$ ent-

halten und deren maximale Kantenlänge gegen O geht. Die Entscheidung, ob die i-te Komponente $\hat{x}_i$ des Minimalpunktes $\hat{x}$ links oder rechts eines Teilpunktes $\tilde{a}_i$ auf der i-ten Kante des Quaders liegt, führt auf das Problem der Bestimmung des Minimalpunktes $\hat{y}$ der Funktion $\varphi(x)$ auf dem (n-1)-dimensionalen Quader $H(\tilde{a}_i) := \{ x \in Q / x_i - \tilde{a}_i = 0 \}$.
Es gilt nämlich der Satz: sign $\varphi_{x_i}(\hat{y})$ = sign $(\tilde{a}_i - \hat{x}_i)$.

Dieses neue Minimierungsproblem kann nach dem gleichen Satz auf (n-2)-dimensionale Minimierungsprobleme zurückgeführt werden, usw. Der Lösungsalgorithmus wird durch eine rekursive Prozedur beschrieben.

E. NUDING: Innere Lösungen von Intervallgleichungen

Es wird der zu der herkömmlichen äußeren Lösung komplementäre Begriff der "inneren Lösung" von Intervallgleichungen in linearen Räumen eingeführt, für die sich einige elementare Eigenschaften angeben lassen.

W. APPELT: Präcompiler für Intervallarithmetik

Die arithmetischen Operationen zwischen Intervallzahlen werden auf den Maschinen IBM/360, IBM/370, SIEMENS 4004/46 durch Aufruf von Fortranfunktionen (z.B. $ ADD (A,B) für A + B) vorgenommen. Um das Programmieren von intervallarithmetischen Statements von dieser unhandlichen und fehleranfälligen Funktionsschreibweise zu lösen, wurde ein "Präcompiler" geschrieben. Dieser gestattet es, die Operatorschreibweise auch bei Intervallzahlen beizubehalten, da er die Umwandlung der Operator- in die Funktionsschreibweise automatisch vornimmt.

R. Tost (St.Augustin)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft