MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 6/1972

Spezielle Funktionen

6.2. bis 12.2.1972

Die nunmehr schon zum vierten Male unter der Leitung der Herren C.Meyer (Köln) und F.W.Schäfke (Berlin) durchgeführte Fachtagung über "Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie" fand auch in diesem Jahr ein erfreuliches Interesse. Sie wurde von 35 Mathematikern - von denen 11 aus dem Auslande kamen - besucht. Es wurden 20 teils ausführliche Vorträge gehalten, und zwar 8 aus dem Bereich der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und 12 aus dem der Zahlentheorie.

In der Zahlentheorie wurden Themen aus folgenden Einzelgebieten behandelt: Klassenzahlfragen bei quadratischen und biquadratischen Zahlkörpern und in diesem Zusammenhang Bernoullische Zahlen, diophantische Gleichungen, komplexe Multiplikation, Berechnung von L-Reihen an der Stelle $s = 1$.

Ferner wurde über Diskriminanten von algebraischen Zahlkörpern bis zum Grade 7, Transzendenzuntersuchungen, Faltung von Dirichlet-Reihen und über Transformationstheorie Lambertscher Reihen vorgetragen.

Schließlich wurde auf dem Gebiet der p-adischen Analysis über die Fortsetzung von analytischen Funktionen, p-adische L-Funktionen und über Integrationstheorie im p-adischen referiert.

Die in der mathematischen Physik behandelten Themen betrafen zunächst die einfachen speziellen Funktionen: Es wurde ein neuer Zugang zu einigen Klassen einfacher spezieller Funktionen mittels Integral-Mittelung dargestellt

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

sowie über die numerische Berechnung der Gammafunktion im Komplexen vorgetragen.

Auf dem Gebiet der höheren speziellen Funktionen wurde über Integralrelationen für Mathieusche Funktionen und über asymptotische Approximation Mathieuscher Funktionen referiert.

Schließlich gab es eine Reihe von Beiträgen zu den Grundlagen der Theorie der speziellen Funktionen aus den Bereichen Gewöhnliche Differentialgleichungen, Differenzengleichungen und Integraltransformationen.

Teilnehmer

Amice, Y., Paris
Baltes, H.P., Berlin
Blankenagel, J., Köln
Braaksma, B.L.J., Groningen
Bundschuh, P., Freiburg
Carlson, B.C., z.Zt.Paris
Dieter, U., Karlsruhe
Dijksma, A., Delft
Draxl, P., Bielefeld
Flor, P., z.Zt. Köln
Fresnel, J., Paris
Halbritter, U., Köln
Helling, H., Bielefeld
Kenku, M.A., Ibadan
Kowalski, H., z.Zt. Köln
Kowalski, R., z.Zt. Köln
Lang, H., Köln
Lemei, H., Delft
Meixner, J., Aachen
Mennicken, R., Regensburg
Meyer, C., Köln
Nießen, H.-D., Köln
Pfaff, Th., Köln
Pohst, M., Köln
Sattler, A., Köln
Schäfke, F.W., Berlin
Schertz, R., Köln
Schmidt, D., Berlin
Schneider, A., Mainz
Schönhage, A., Konstanz
Sips, R., Brüssel
de Snoo, H.S.V., Groningen
Stöhr, A., Berlin
Volkenborn, A., Köln
Wolf, G., Berlin

Vortragsauszüge

SATTLER, A. : Zur numerischen Berechnung der komplexen Gamma-Funktion

Bricht man die Stirlingsche Reihe für den Logarithmus der komplexen Gamma-Funktion nach $n \geq 0$ Gliedern ab, so sei $R_n(z)$ der Abbrechfehler. Es wird gezeigt, daß für ein festes, positives $\epsilon < 1 |R_n(z)| < \epsilon$ gilt außerhalb einer Kurve, die ganz im Halbstreifen $|y| < 2a$, $x \leq a$ mit $a = a(n,\epsilon)$ verläuft. Ferner ergibt sich, daß für jedes $\epsilon (0 < \epsilon < 1)$ ein optimales n existiert, so daß für dieses n $a(n,\epsilon)$ minimal wird.

SCHNEIDER, A. : S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme bei Differenzengleichungen

Die von Billigheimer (Pac.J.Math. 35 (1970)) betrachteten Eigenwertprobleme mit fünfgliedrigen Rekursionen sind Spezialfälle S-hermitescher Rand-Eigenwertprobleme mit Differenzengleichungen, deren Spektraltheorie von F.W.Schäfke und vom Vortragenden voll entwickelt ist. Man hat es sogar mit einem sogenannten Normalfall zu tun, so daß auch eine entsprechende singuläre Theorie sich anschließt. Die umfangreichen Rechnungen von Billigheimer erübrigen sich.

CARLSON, B.C. : Dirichlet Averages and Hypergeometric Functions

An approach to special functions through integral averages was summarized. The averaging process, which is related to the Dirichlet-Liouville multiple integral, can be applied to any analytic function. Averages of e^z and z^t include some common special functions of mathematical physics, and there are useful analogies between the former and the latter. The averages have a property of permutation symmetry which accounts for some well-known transformations of special functions. Generalizations of Taylor's series and existence of analytic continuations were discussed.

BRAAKSMA, B.L.J. : Abfallende Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y^{(n-j)} = 0 \quad ,$$

wo $a_j(x)$ ein Polynom vom Grade m_j ist $(j = 1,\dots,n)$ und $j^{-1} m_j < n^{-1} m_n$ $(j = 1,\dots,n-1)$ gilt. Es sei $a_n(x) = (-1)^{n+1}\bigl(P(x) + \lambda Q(x)\bigr)$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome vom Grade p bzw. q sind mit jeweils höchsten Koeffizienten 1 . Dann existiert eine Lösung, die sich für $x \to \infty$ auf $|\arg x| \le \left(\frac{n+1}{n+p}\right)\pi - \varepsilon$ wie

$$\exp\left(\frac{-n}{n+p}\, x^{\frac{n+p}{n}}\right)$$

verhält und die eine ganze Funktion von x, λ und den Koeffizienten der Polynome ist. Für $\lambda \to \infty$ auf $|\arg \lambda| \le \pi - \varepsilon$ verhält sich diese Lösung wie

$$\exp\left(\lambda^{\varkappa}[\delta \log(\lambda) + A + o(1)]\right) .$$

Hierbei ist $\varkappa = \frac{n+p}{n(p-q)}$; A und δ sind Konstanten mit $\delta = 0$ wenn $\varkappa$ nicht ganzzahlig ist.

LEMEI, H. : Integral-transforms related to a class of fourth-order linear differential equations

Consider the differential equation

$$y^{(4)} - \left(\lambda^4 + q(x)\right)y = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty) ,$$

with $q(x)$ defined for all real x and $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)|dt < \infty$.

Let ${}_1y(-\infty|x,\lambda)$, $y_1(+\infty|x,\lambda)$, ${}_2y(-\infty|x,\lambda)$ and $y_2(+\infty|x,\lambda)$ be solutions defined by their asymptotic behavior in $-\infty$ or $+\infty$ in the following way:

$$\left.\begin{array}{ll} {}_1y^{(j)}(-\infty|x,\lambda) \sim \lambda^j e^{\lambda x} & \text{, as } x \to -\infty \\ y_1^{(j)}(+\infty|x,\lambda) \sim (-\lambda)^j e^{\lambda x} & \text{, as } x \to +\infty \end{array}\right\} \text{for } -\frac{\pi}{4} \le \arg\lambda \le \frac{\pi}{4}$$

$$(j=0,1,2,3).$$

$$\left.\begin{array}{ll} {}_2y^{(j)}(-\infty|x,\lambda) \sim (-i\lambda)^j e^{-i\lambda x} & \text{, as } x \to -\infty \\ y_2^{(j)}(+\infty|x,\lambda) \sim (i\lambda)^j e^{i\lambda x} & \text{, as } x \to +\infty \end{array}\right\} \text{for } \frac{\pi}{4} \le \arg\lambda \le \frac{3\pi}{4}$$

The following theorem is proved:
Let x_0 be a real number. Let $f(x)$, defined for all real x, be of bounded variation in a neighbourhood of $x = x_0$ and $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$. Let $\mathfrak{G}$ be the part of the λ-plane where $0 \le \arg\lambda \le \pi/2$. Let $\mathfrak{C}$ be the contour consisting of the positive real axis, the positive imaginary axis except for a piece in the finite part of $\mathfrak{G}$, such as to keep the zeros of the Wronskian of ${}_1y, y_1, {}_2y, y_2$ and the singularities of these four solutions to the left of it.
Then:

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_{\mathfrak{C}_\mu}^{i\mu} 4\lambda^3 d\lambda \Bigg[\left\{ \frac{[{}_2y, y_2]}{W} {}_1y(-\infty|x_0,\lambda) - \frac{[{}_1y, y_2]}{W} {}_2y(-\infty|x_0,\lambda) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) y_1(+\infty|t,\lambda)dt \; +$$

$$+ \left\{ \frac{[{}_1y, y_1]}{W} {}_2y(-\infty|x_0,\lambda) - \frac{[{}_2y, y_1]}{W} {}_1y(-\infty|x_0,\lambda) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) y_2(+\infty|t,\lambda)dt \Bigg] =$$

$$= \pi i \left\{ f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0) \right\} ,$$

and a similar formula with the roles of ${}_1y$, ${}_2y$ and y_1, y_2 interchanged; W is the Wronskian of ${}_1y$, ${}_2y$, y_1, y_2 ,

$$[\varphi,\psi] := \varphi^{(3)}\psi - \varphi^{(2)}\psi^{(1)} + \varphi^{(1)}\psi^{(2)} - \varphi\psi^{(3)} ,$$

$${}_2y(-\infty|x,\lambda) = {}_1y(-\infty|x,-i\lambda) \text{ and } y_2(+\infty|x,\lambda) = y_1(+\infty|x,-i\lambda) .$$

WOLF, G. : Integralrelationen Mathieuscher Funktionen

In Analogie zu Integralrelationen bei Besselfunktionen mit einer ebenen Welle $e^{ik(x_1\cos\alpha + x_2 \sin\alpha)}$ als Kern wird eine allgemeine Integralrelation hergeleitet, die alle bekannten Relationen für die Floquetschen Lösungen umfaßt und im Falle ganzer Indizes zu Beziehungen zwischen den Zweitlösungen führt. Untersuchungen über die Konvergenz der Integrale für reelle Parameter auf dem Rand des Holomorphiegebietes führen zu Verallgemeinerungen der unstetigen Integrale von Weber-Schafheitlin.

SIPS, R. : Calcul asymptotique explicite des fonctions de Mathieu

Dans l'équation de Mathieu

$$y'' + \left(a - \frac{k^2}{2}\cos(2x)\right)y = 0$$

on fait le changement de variable suivant

$$z = 2\sqrt{2k}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) , \quad y(x) = \exp(k\,\sin(x))v(z)$$

ce qui conduit à l'identité

$$y''(x) + \left(a - \frac{k^2}{2}\cos(2x)\right)y(x) = 2k\,\exp(k\,\sin(x)) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 - \frac{z^2}{8k}\right)v''(z) - z\left(1 + \frac{1-z^2}{8k}\right)v'(z) + \left(A + \frac{z^2}{8k}\right)v(z)\right]$$

où

$$A = \frac{a + \frac{k^2}{2}}{2k} - \frac{1}{2} .$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Au second membre, on remplace $v(z)$ par une serie finie des N premiers polynômes d'Hermite

$$\sum_{m=0}^{N-1} C_m He_m(z)$$

et on détermine la valeur des coefficients des C_m, aussi que de la constante A, de manière à annuler les coefficients des N premiers polynômes. Il reste alors une fonction $y(x)$ qui satisfait exactement à l'équation suivante

$$y''(x)+\left(a - \frac{k^2}{2} \cos(2x)\right)y(x) = \frac{1}{4}(2N-1)C_{2N}D_{2N}(z)$$

ou à

$$y''(x)+\left(a - \frac{k^2}{2} \cos(2x)\right)y(x) = \frac{1}{4}(2N)C_{2N-1}D_{2N+1}(z)$$

suivant que la fonction est paire ou impaire.

Lorsque k est assez grand, les seconds membres sont très petits et par consequence la série limitée $\sum C_m He_m$ faisait une bonne approximation pour les fonctions de Mathieu.

SCHÄFKE, F.W. und SCHMIDT, D.(Vortragender) : Ein einfacher Beweis des Hauptsatzes über einfache Singularitäten

Es wurde ein einfacher Beweis des Hauptsatzes über die Struktur der Fundamentalsysteme gewöhnlicher Differentialgleichungen an einer einfachen Singularität vorgetragen. Die Methode beruht auf einer Zerlegung der Lösung in einen Polynomanteil und einen Anteil, bezüglich dessen eine Anwendung des Fixpunktsatzes für Kontraktionen bzw. der Neumannschen Reihe unmittelbar zum Ziele führt. (Eine ausführliche Darstellung enthält das in Kürze in der Reihe "Heidelberger Taschenbücher" erscheinende Buch "F.W.Schäfke, D.Schmidt: Gewöhnliche Differentialgleichungen".)

VOLKENBORN, A. : Ein p-adisches Integral und seine Anwendungen

Die Menge der im Sinne von F. Tomas und F. Bruhat (Sem. Bourbaki Bd. 2, 1961/62) definierten p-adisch integrierbaren Funktionen erweist sich als zu klein. Für analytische Untersuchungen ist es wünschenswert, eine Integrationstheorie aufzubauen, in der lokal-analytische Funktionen integrierbar sind. So definiert man allgemein ein Integral über offene, präkompakte Teilmengen von gewissen Klassen von topologischen Gruppen mit Werten in topologischen Körpern. Speziell erhält man ein Integral über offene, kompakte Teilmengen von $\mathbb{Q}_p$ mit Werten in einer vollständigen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, mit dessen Hilfe man allgemeine Bernoullische Zahlen und spezielle p-adische Funktionen definieren und ihre Eigenschaften beweisen kann. Man kann das Integral zu einem m-ten Integral $(m \in \mathbb{N})$ verallgemeinern und erhält neue Funktionen und ihre Eigenschaften.

AMICE, Y. and FRESNEL, J. : p-adic L functions *)

In 1964, Kubota and Leopoldt defined a p-adic L function denoted by $L_p(\cdot,\chi)$ where χ is a character relative to an abelian real number field K. For $m > 0$, m integer and $m \equiv 0 \mod (p-1)$ if $p \nmid 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$ if $p = 2$) the L_p function satisfies:

$$L_p(1-m,\chi) = \left(1-\chi(p)p^{m-1}\right) \cdot L(1-m,\chi) =$$

$$- \left(1-\chi(p)p^{m-1}\right) \frac{B^m(\chi)}{m}$$

where $B^m(\chi)$ is the m-th Bernoulli number relative to the character χ.

We propose here a new definition analogous to the complex Dirichlet's series

$$(1) \quad L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} .$$

Let m be an integer $(m > 0)$ and

$$(2) \qquad H_p^{\chi}(m,x) = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \chi(n) n^m \frac{x^n}{n} .$$

If χ is not the trivial character, H_p^{χ} is a rational function of the variable x without pole at $x = 1$, further one proves that

$$H_p^{\chi}(m,1) = -\left(1 - \chi(p)p^{m-1}\right) \frac{B^m(\chi)}{m} = L_p(1-m,\chi) .$$

Now, let n be a positive integer such that $p \nmid n$, the map $n \mapsto n^m$ defined for $m \equiv 0 \mod (p-1)$ if $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$ if $p = 2$) can be continued analytically on a disk $D \supset \mathbb{Z}_p$. For $m \in D$, $H_p^{\chi}(m,x)$ is still defined by (2). For $m \notin (p-1)\mathbb{N}$, $H_p^{\chi}(m,x)$ may fail to be rational, for example $H_p^{\chi}(0,x)$ is not rational. So that in order that $H_p^{\chi}(m,1)$ should make sense we proved a Theorem upon analytic continuation. If the conductor $f = f(\chi)$ is not a power of p **) we find for all $m \in D$

$$H_p^{\chi}(m,1) = L_p(1-m,\chi) .$$

We then compute $L_p(1,\chi)$ and find

$$L_p(1,\chi) = H_p^{\chi}(0,1).$$

If Z_f is a f-th primitive root of unity and $\tau(\chi)$ the gaussian sum related to χ and Z_f, we show that

$$(3) \qquad L_p(1,\chi) = \left(1-\chi(p)p^{-1}\right)\left(-\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a) \log\,(1-Z_f^a)\right) .$$

Let $Z_p(\cdot,K)$ be the p-adic Zeta function of K, i.e.

$$Z_p(s,K) = \prod_{\chi} L_p(s,\chi) ,$$

then the relation (3) gives the analytic formula for the ideal class number:

$$2^{n-1}h\left(R_p d^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{\beta | p}\left(1 - N(\beta)^{-1}\right)^{-1} \lim_{s\to 1} (s-1))Z_p(s,K) ,$$

where $n = [K : \mathbb{Q}]$, h is the ideal class number, R_p the p-adic regulator and d the absolute discriminant of K .

---

*) These lectures give the content of a paper which will appear in
Acta arithmetica, vol 2^0 , N° 4 , 1972

**) when $f(\chi)$ is a power of p , we need a trick and use a "twisted" function instead of $H_p^\chi(m,x)$.

HALBRITTER, U.: <u>Über ein komplexes Integral im Zusammenhang mit der Dedekindschen η - und der Riemannschen ζ - Funktion.</u>

Es wurde in Verallgemeinerung der Integraldarstellung der Riemannschen Zetafunktion das komplexe Integral

$$\int_C \frac{e^{-i\frac{z}{a}}}{1-e^{-i\frac{z}{a}}} \frac{1}{e^z - 1} z^{s-1} dz , \quad a \in (0,\infty), s \in \mathbb{C}$$

behandelt. Wertet man dieses Integral wie im Falle der Riemannschen Zetafunktion aus, so ergibt sich für $s \in \mathbb{Z}$ ein Zusammenhang zwischen $F_{2s}(\tau)$ und $F_{2s}(-\frac{1}{\tau})$, wobei

$$F_{2s}(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s+1}} e^{2\pi i m n \tau} , \quad \tau \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Im}\,\tau > 0 .$$

Für $s = 0$ ist dies im wesentlichen der Logarithmus der Dedekindschen η - Funktion ; in diesem wie auch in den anderen Fällen erhält man die Transformationsgleichung für $F_{2s}(\tau)$ bei der Modulsubstitution $\tau \to -\frac{1}{\tau}$. Ändert man den Integranden leicht ab, so erhält man die Transformationsgleichung von $F_{2s}(\tau)$ bei beliebigen Modulsubstitutionen. Für spezielle Werte von τ sind die so gewonnenen Gleichungen mit einem Resultat von Grosswald identisch (Über die Werte der Riemannschen Zetafunktion an ungeraden Argumentstellen, Göttinger Nachrichten 1970).

KENKU, M.A. : Quadratic Forms and η - Function

Let Q be a positive definite binary quadratic form of discriminant d and χ a real primitive character mod f, f a natural number, $(d,f) = 1$. An expansion is proved for the L - function

$$L(s,\chi,Q) = \sum_{x,y}{}' \chi(Q(x,y)) \cdot Q(x,y)^{-s} \quad \text{defined for } \operatorname{Re}(s) > 1 ,$$

which converges rapidly at $s = 1$. From this it is shown that

$$L(1,\chi,Q) = -\frac{\chi(A)}{A}\left(\frac{f\sqrt{|d|}}{2\pi}\right)^{-1} \Lambda(f) + \frac{\pi}{6f^2\sqrt{|d|}} \log|F(\omega)|^{12f} , \quad \text{where}$$

$$F(z) = \prod_{\substack{h\nmid f\\ h/f}} \prod_{th/f} \prod_{s=1}^{f} \eta\left(\frac{ht}{f}\left(\frac{s}{h} + z\right)\right)^{-2\chi(\overline{Q}(s,h))\mu(t)} \prod_{t/f} \eta(tz)^{-2\chi(A)\mu(\frac{f}{t})} ,$$

where $\eta(z) = e^{\frac{2\pi i}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-e^{2\pi i n^2}\right)$, $Q = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, $\omega = \frac{-B+\sqrt{d}}{2A}$.

This shows that $L(1,\chi,Q)$ is of the form $r\frac{2\pi}{\sqrt{|d|}} \log(a)$, where a is an algebraic number in the ray class field mod f and if f is prime a is a unit. This evaluation of $L(1,\chi,Q)$ has proved useful in determining complex fields of small fixed class numbers and provides an explicit form of the class number formula

$$\epsilon_G^{2h_G h_T/\omega_T} = \prod_{c\in H_f} \left|\sqrt{\operatorname{Im}(\omega_c)}\, \eta^2(\omega_c)\right|^{-\overline{\chi}(c)} .$$

SCHERTZ, R. : __Über die singulären Werte gewisser Modulfunktionen höherer Stufe.__

Die singulären Werte der Weberschen Funktionen f, f_1 und der absoluten Invarianten j sind bekanntlich algebraische Zahlen. Genauer gilt

__Satz:__ Sei $\alpha \in OH$ Wurzel einer primitiven quadratischen Gleichung $AX^3 + 2BX + C = 0$ mit der Diskriminante $D(\alpha) = -4m$, $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 1,4,16,64,256$, $A \equiv 1(2)$, $B \equiv 0(16)$. Dann wird der Körper $Q(j(\alpha))$ über Q erzeugt durch

$f_1(\alpha)^{24}$	im Fall $m \equiv 0(8)$,	$\sqrt{2}f(\alpha)^{6}$	im Fall $m \equiv 1(8)$,
$\sqrt{2}f_1(\alpha)^{6}$	im Fall $m \equiv 2(4)$,	$f(\alpha)^{3}$	im Fall $m \equiv 3(8)$,
$\sqrt{2}f_1(\alpha)^{12}$	im Fall $m \equiv 4(8)$,	$f(\alpha)^{12}$	im Fall $m \equiv 5(8)$,
		$\sqrt{2}f(\alpha)^{3}$	im Fall $m \equiv 7(8)$.

Dieser Satz wurde erstmals von Weber (Lehrbuch der Algebra III) bewiesen, jedoch mit Ausnahme der Fälle $m \equiv 4(8)$, in denen Weber die obigen Resultate nur vermutet hat. Man vergleiche hierzu auch die Ergebnisse von B.J.Birch in Mathematika, Dez. 1969 und C.Meyer im Journal f.d. reine u. angew. Math. 242 (1970). Bei dem im Vortrag durchgeführten Beweis handelt es sich um eine stark vereinfachte Fassung des in meiner Dissertation, Köln 1971, gegebenen Beweises.

Im zweiten Teil des Vortrags wurde, ausgehend von einer von C.Meyer bewiesenen Klassenzahlformel, mit komplexer Multiplikation der folgende Satz von Scholz bewiesen:

__Satz:__ Sei $K_1 = Q(\sqrt{D})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und $K_2 = Q(\sqrt{-3D})$. h_i sei die Klassenzahl von K_i, $i = 1,2$. Dann gilt: $3/h_2 \Rightarrow 3/h_1$.

LANG, H. : Über die Klassenzahl imaginärer, bizyklischer, biquadratischer Zahlkörper.

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})(d_1 < 0, d_2 < 0)$ ein imaginärer, bizyklischer, biquadratischer Zahlkörper und $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ sein reeller Teilkörper. Dann besteht für den Quotienten $\frac{H}{h}$ der Klassenzahlen H und h von K und Ω die Klassenzahlformel

$$* \quad \frac{H}{h} = \frac{Wr}{2\pi^2 R} \sqrt{f^2 d_\Omega}\, L(1,\chi) \quad .$$

Dabei bezeichnet W die Anzahl der Einheitswurzeln in K sowie R und r die Regulatoren von K und Ω. Die auftretende L-Funktion ist mit dem der abelschen Erweiterung K/Ω eindeutig zugeordneten Ringklassencharakter χ von Führer f_{p_∞} gebildet. In seiner Monographie über Klassenzahlen von über quadratischen Zahlkörpern abelschen Körpern hat C.Meyer das Verhalten solcher L-Funktionen an der Stelle 1 eingehend untersucht. Mit Hilfe der dort bewiesenen Darstellung von $L(1,\chi)$ als Summe von elementar-arithmetischen Ringklasseninvarianten $\phi(\mathfrak{K})$ wurde an Hand der Formel $*$ die Ganzzahligkeit der Relativklassenzahl $\frac{H}{h}$ hergeleitet.

POHST, M. : Berechnung kleiner Diskriminanten total reeller Körper.

Die kleinsten Diskriminanten total reeller Zahlkörper K vom Grad n sind nur für $n = 2,\dots,5$ bekannt. Den Wert für $n = 5$ berechnete John Hunter in seiner Dissertation (Cambridge 1953). Die von ihm verwendete Methode läßt sich auf alle total reellen Körper K verallgemeinern, die keinen echten Teilkörper besitzen.

Satz: Ist D die Diskriminante von K, so existiert eine Erzeugung $K = \mathbb{Q}(\varrho)$ mit einer ganzen algebraischen Zahl ϱ, für die gilt:

$$|Sp(\varrho)| \leq \left[\frac{n}{2}\right], \quad Sp(\varrho^2) \leq \frac{n}{4} + \gamma_{n-1}\left(\frac{D}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} .$$ Hierin bezeichnet γ_{n-1} die Hermitesche Konstante für positive Formen.

Dieser Satz liefert nun von D abhängige Abschätzungen für die Koeffizienten a_1, a_2, a_n der irreduziblen Gleichung von ϱ :

$$g(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 .$$

Zusammen mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $g(x)$ n reelle Nullstellen besitzt, lassen sich dann zu vorgegebenem Körpergrad $n \leq 7$ und vorgegebener Schranke $S > 0$ die erzeugenden Gleichungen für alle Körper K mit $D \leq S$ berechnen.

HELLING, H. : <u>Über Gruppen vom Geschlecht 1</u>

Teichmüller - Räume kompakter Riemannscher Flächen sind reelle affine algebraische Mengen. Das wurde an einem Spezialfall eines Raumes Riemannscher Flächen vom Geschlecht 1 in Grenzkreisuniformisierung dargelegt.

DRAXL, P.K.J.: <u>Eine Anwendung von OGG's Theorie zur Faltung von Dirichlet-Reihen.</u>

Sind K_1, K_2 algebraische Zahlkörper, χ_i Größencharaktere von K_i, $\mathfrak{a}_i$ ganze Divisoren von K_i und $\mathfrak{N}_i$ die Absolutdivisornorm von K_i, so ist es von zahlentheoretischem Interesse, die zunächst nur in $\mathrm{Re}(s) > 1$ definierte Dirichletreihe

$$\sum_{\substack{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \\ \mathfrak{N}_1 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{a}_2}} \chi_1(\mathfrak{a}_1) \cdot \chi_2(\mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{N}_1 \mathfrak{a}_1^{-s}$$

über die Gerade $\mathrm{Re}(s) = 1$ hinaus nach links analytisch fortzusetzen (vgl. etwa Draxl, J. of Number Theory 3, pp. 444). Hier wurde nun gezeigt, daß im Falle

$$K_1, K_2 = \text{imaginär-quadratische Zahlkörper} \quad (K_1 \neq K_2)$$

(mit gewissen Bedeutungen für die Größencharaktere) obige Funktion in die ganze Ebene analytisch fortgesetzt werden kann, wobei man wesentlich von "Theorem 3" in OGG, Inventiones Math. 7, pp. 297, Gebrauch macht.

BUNDSCHUH, P.: <u>Arithmetisches über Lösungen gewisser q-Differenzengleichungen.</u>

E. Heine hat 1846 die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{(q^{\alpha+\nu}-1)(q^{\beta+\nu}-1)}{(q^{\gamma+\nu}-1)(q^{1+\nu}-1)}$$

eingeführt, die die Gaußsche hypergeom. Reihe verallgemeinert. $f(x)$ genügt einer Funktionalgl., die in $f(x)$, $f(qx)$, $f(q^2x)$ homogen und linear ist und Polynome in x und q als Koeff. hat, einer sog. q-Differenzengleichung. Die allgemeine Theorie der lin. q-Differenzengln. ist vor allem von Carmichael, C.R.Adams, Trjitzinsky, W.Hahn, W.N.Bailey entwickelt worden; außerdem wurden von W.Hahn in Math. Nachr. <u>2</u> (1949), 340-379 und <u>3</u> (1950), 257-294 q-Analoga zu den wichtigsten elementaren Funktionen $e^x, J_0(x)$ usw. untersucht. Hier wird über einen Satz berichtet, der das funktionentheor. Wachstum von ganzen Funktionen in Zusammenhang mit ihren arithmetischen Eigenschaften an rationalen Stellen bringt. Aus diesem Satz ergeben sich Aussagen über Irrationalität von Werten zahlreicher q-Analoge elementarer Funktionen.

BALTES, H.P. : <u>Vermutungen betreffend die natürlichen Zahlen</u> $\underline{H = \{h \mid h = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \Rightarrow n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 0\}}$

Für $h \leq 40\,000$ erhält man mit Hilfe eines Computerprogramms für die Struktur von $H = \{h_0 < h_1 < h_2 \ldots\}$ die Resultate

(i) $h = 4^a B_i$ mit $\{B_0, B_1, \ldots, B_{10}\} =$

$= \{0,1,2,5,10,13,25,37,58,85,130\}$

(ii) $$n(h) = \sum_{h_n \leq h} 1 = \frac{10}{\log 4} \log h + O(1)$$

Es wird vermutet, daß (ii) asymptotisch für $h \to \infty$ gilt und daß insbesondere 130 die größte nicht durch 4 teilbare Zahl ist, die weder als Summe dreier positiver Quadrate noch als $4^a(8b + 7)$ darstellbar ist. Das Resultat (ii) geht in den mittleren Abstand der Eigenwerte der Wellengleichung für ein würfelförmiges Grundgebiet mit Dirichlet-Randbedingung ein.

D. Schmidt (Konstanz)