MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1972

Funktionentheorie

13.2. bis 19.2.1972

Die Funktionentheorietagung, in deren Mittelpunkt Funktionen einer Veränderlichen stehen, fand in diesem Jahr vom 13. bis 19. Februar im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Die Leitung hatten H.Wittich (Karlsruhe) und Ch.Pommerenke und J.Winkler (beide Berlin) übernommen. Der Tagung konnten 52 Teilnehmer aus dem In- und Ausland, dabei 19 aus dem Ausland, beiwohnen. Zum Bedauern aller Anwesenden konnten viele an dieser Tagung Interessierte, insbesondere auch den Teilnehmern eng verbundene Kollegen aus den USA, wegen der beschränkten Kapazität im Forschungsinstitut nicht kommen.

Die Tagung war neuen Forschungsergebnissen gewidmet. Es wurden 29 Vorträge von 3o - 45 Minuten Dauer gehalten. Die Ergebnisse, über die berichtet wurde, betreffen die verschiedensten Themenkreise innerhalb der Funktionentheorie, wobei sich eine gewisse Häufung in Bezug auf Differentialgleichungen, konforme Abbildungen, quasikonforme Abbildungen und Werteverteilung zeigte.

Auch diese Tagung erwies wieder den Wert der durch die vom Forschungsinstitut ermöglichten, regelmäßigen Funktionentheorie-tagungen.

Teilnehmer

J.M. Anderson	(London)	K. Böhmer	(Karlsruhe)
I.N. Baker	(London)	J.G. Clunie	(London)
J. Becker	(Berlin)	C. Constantinescu	(Bukarest)
H. Begehr	(Berlin)	H. Cremer	(Merzhausen)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. Epheser (Hannover)
G. Frank (Karlsruhe)
F. Gackstatter (Berlin)
D. Gaier (Giessen)
F.W. Gehring (Djursholm)
H. Grunsky (Würzburg)
K. Habetha (Dortmund)
G. Halász (Budapest)
W.K. Hayman (London)
K.P. Herfeld (Berlin)
A. Huber (Zürich)
F. Huckemann (Berlin)
G. Jensen (Berlin)
E.G. Kausen (Hannover)
H. Köditz (Würzburg)
Th. Kövari (London)
O. Lehto (Djursholm)
K. Leschinger (Bonn)
A.J. Lohwater (Cleveland)
E. Mues (Karlsruhe)
R. Nevanlinna (Helsinki)
J. Nikolaus (Bonn)
A.E. Obrock (Cleveland)
E. Peschl (Bonn)
A. Pfluger (Zürich)
Ch. Pommerenke (Berlin)
E. Reich (Zürich)
L. Reich (Graz)
A. Reimann (Winterthur)
M.v. Renteln (Giessen)
E. Röding (Berlin)
St. Ruscheweyh (Bonn)
W. Schwarz (Frankfurt)
K. Strebel (Zürich)
H. Tietz (Hannover)
St. Timmann (Hannover)
P. Turán (Budapest)
N. Wagenknecht (Würzburg)
H. Wellstein (Würzburg)
J. Winkler (Berlin)
K.-J. Wirths (Bonn)
H. Wittich (Karlsruhe)
D. Wrase (Karlsruhe)
H.J.W. Ziegler (Würzburg)

Vortragsauszüge

J.M. ANDERSON: Bericht über Bloch-Funktionen

Behandelt wurden Fragen, die in einer Arbeit von Anderson, Clunie und Pommerenke (erscheint demnächst) betrachtet werden. Der Banachraum der Bloch-Funktionen wird von den im Einheitskreis analytischen Funktionen gebildet, die der Bedingung

$$\| f \| = \sup_{|z|<1} (1-|z|)\,|f'(z)| < \infty$$

genügen. Es wurde über einige Sätze über Dualitätseigenschaften, Nullstellen, Randeigenschaften und Zufallsfunktionen berichtet.

I.N. BAKER: Picard sets for entire functions

E is a Picard set $\Longleftrightarrow$ every entire transcendental f omits at most one value in C(E).

Improving results of Toppila and Winkler, L.S. Liverpool and I.N. Baker have shown:

Theorem 1: If $q>1$, there exists $K(q)>0$ such that, if

(i) $E=\{b_n\}$ is a union of k distinct sets $E_i=\{a_j^i\}$, $1\leqq i\leqq k$, $j=1,2,3,\ldots$, such that $|a_{n+1}^i|\geqq q|a_n^i|$ for all n,i;

(ii) if for some p one has $d(b_n, E-(b_n))>|b_n|^{-p}$ for large $b_n \in E$;

and with real $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$

(iii) $\log \varrho_n < -K(q)(\log|b_n|)^2$,

then the union of discs of centre b_n, radius ϱ_n is a Picard set. Condition (iii) is best possible.

Theorem 2: If $E=\{a_n\}$, where $a_n\to\infty$, if there exists $\varepsilon>0$ such that $d(a_n, E-(a_n)) > \varepsilon|a_n|/\log|a_n|$ and if there exists $K>0$ such that if $\varrho_n>0$ satisfies $\log\log(1/\varrho_n) > K(\log|a_n|)^2$, then the union of discs of centre a_n, radius ϱ_n is a Picard set.

J. BECKER: Schlichte Lösungen der Löwnerschen Differentialgleichung

Aus einem Satz über den Zusammenhang der allgemeinen Lösung der "Löwnerschen Differentialgleichung für Subordinationsketten" mit der schlichten Lösung und einem weiteren Satz über die quasikonforme Fortsetzbarkeit der Anfangsglieder gewisser schlichter Subordinationsketten werden recht allgemeine Kriterien für Schlichtheit und quasikonforme Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen abgeleitet.

Als Spezialfälle ergeben sich die folgenden (zum Teil bekannten) Bedingungen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = \frac{k}{1-|z|^2}\ ,\ f'(0)=0 \qquad (|z|<1),$$

$$|\{f,z\}| = \frac{2k}{(1-|z|^2)^2} \qquad (|z|<1),$$

$$\left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right| = \frac{k}{|\zeta|^2-1} \qquad (|\zeta|>1),$$

($f(z)$ analytisch in $|z|<1$, $F(\zeta)$ analytisch in $1<|\zeta|<\infty$), aus denen für $k = 1$ Schlichtheit und für $k<1$ quasikonforme Fortsetzbarkeit folgen.

H. BEGEHR: Die logarithmische Methode in der Wertverteilungstheorie pseudoanalytischer Funktionen

Die mit Hilfe der Pompeiuschen Formel abgeleitete verallgemeinerte Poisson-Jensensche Formel gestattet eine Abschätzung der logarithmischen (F,G)-Ableitung einer (F,G)-pseudoanalytischen Funktion und damit die Anwendung der von Nevanlinna gegebenen logarithmischen Methode auf pseudoanalytische Funktionen.
Allerdings bekommt man eine wesentlich schlechtere Restgliedabschätzung, als sie Habetha (Ann. Acad. Sci. Fenn. Nr.406(1967)) unter Verwendung der potentialtheoretischen Methode von Ahlfors erhalten hat.

K. BÖHMER: Kennzeichnung linearer Differentialgleichungen durch Wachstumsbedingungen

Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik und gewisse Typen höherer Ordnung werden jeweils durch eine gewisse Anzahl von möglichst allgemeinen funktionentheoretischen Eigenschaften eindeutig charakterisiert. Das gelingt, indem man z.B. eine Bestimmtheitsstelle in 0 und eine Unbestimmtheitsstelle in ∞ vorschreibt. Neben gewissen Symmetrieeigenschaften der Lösungen spielen Höchstzahlen von linear unabhängigen Lösungen von rationalem Charakter in ∞, die Summe der Wachstumsordnungen eines Fundamentalsystems u. a. m. eine Rolle. So sind die erwähnten Differentialgleichungen von der Form

$$(D)\begin{cases} z^{\gamma m} w^{(m)} + \ldots + b_j(z) w^{(j)} + \ldots + b_o(z) w = 0 \quad \text{mit} \\ b_j(z) = \sum_{\nu=\delta_j}^{\gamma_j} B_{j\nu} z^{\nu} \,, \quad \gamma_j \delta_j \quad N_o \,, \quad 0 \leqq \delta_j \leqq \gamma_j \,. \end{cases}$$

Sucht man umgekehrt eine Menge von Differentialgleichungen der Form (D), die bei nichttrivialer Wahl der Parameter B_j die vorausgesetzten Eigenschaften haben, so erhält man wieder Differentialgleichungen der obigen Typen. Diese Zuordnung ist eineindeutig.

C. CONSTANTINESCU: Convex cones of continuous functions on Baire topological spaces.

The principal results concerning the natural and specific order on the convex cone of hyperharmonic functions on a harmonic space as well as the balayage of positive hyperharmonic functions may be derived from some elementary properties of this cone. This fact enables to treat these problems in an axiomatic way, which makes the theory more general and more elegant.

G. FRANK: Anwendungen des Index ganzer Funktionen

Im Anschluß an den Vortrag von Herrn Mues wird der Index ganzer Funktionen auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen

$$(*) \qquad w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + a_o w = 0, \quad a_j \text{ Polynome,}$$

angewendet. Dabei setzt man

$$\varrho = \begin{cases} |a|^{\alpha} & \text{für } |a| \geqq 1 \\ 1 & \text{für } |a| < 1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

und nennt für $r > 0$ und f ganze Funktion

$$I_{\alpha}(r,f) = \sup_{|a| \leqq r} \nu_a(\varrho)$$

den α-Index von f. Es gilt dann für

$$\beta_\alpha(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\log}\, I_\alpha(r,f)}{\log r} :$$

$\max(0,\lambda-1+\alpha) \leqq \beta_\alpha(f) \leqq \lambda$ für $\alpha \leqq 1$, $\beta_\alpha(f) = \alpha\lambda$ für $\alpha \geqq 1$, wenn f die Wachstumsordnung hat.

Für die transzendenten Lösungen von (*) werden folgende Ergebnisse gezeigt:

A) Es sind nur endlich viele Wachstumsordnungen

$$\infty > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_q > 0, \; q \leq n \text{ und } \lambda_i \in \mathbb{Q},$$

möglich (bekannt!).

B) w sei eine Lösung von (*), $\lambda = \lambda(w)$, dann gilt für $\varepsilon > 0$:

$$I_\alpha(r,w) \leqq (d+\varepsilon)r^{\lambda-1+\alpha}$$

für $r > r_0(\varepsilon)$ und $\alpha \leqq 1$. Damit erhält man aus den Ergebnissen des Vortrags von Herrn Mues Abschätzungen für die Anzahl der c-Stellen von w in der Kreisscheibe $|z-a| \leqq R$, $R = R(a,w)$. Insbesondere werden noch Fragen der beschränkten Werteverteilung für diese Lösungen von (*) betrachtet.

F. GACKSTATTER: <u>Methoden der Wertverteilungslehre bei Minimalflächen im R^3</u>

In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit vollständigen Minimalflächen S im R^3 und den Ausnahmewerten des sphärischen Bildes. Wenn S keine Ebene ist, dann ist diese Ausnahmemenge nach einem Satz von Ahlfors und Osserman höchstens von der Kapazität Null. Man kennt aber nur Beispiele solcher Flächen mit 1, 2, 3, 4 Ausnahmewerten (Osserman, Voss). Wir greifen dieses Problem mit Methoden der Wertverteilungslehre an. Es werden Flächenklassen angegeben, bei denen die Anzahl der Ausnahmewerte < 5 ist.

D. GAIER: Einschränkung des konformen Moduls von Vierecken

Der konforme Modul m(V) eines Vierecks V mit Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 kann durch eine Minimaleigenschaft charakterisiert werden. Ist G das zu V gehörige Gebiet, und K die Klasse aller in G stetigen Funktionen f mit f=0 auf der Seite P_1P_2 von V und f=1 auf P_3P_4, und bezeichnet $D_G[f]$ das zu f gehörige Dirichlet-Integral, so ist $m(V)=\inf\{D_G[f]: f\in K\}$. Schränkt man f auf Unterklassen K_n von K ein, so erhält man obere Schranken D_n für m(V), und die Betrachtung des konjugierten Vierecks V' liefert untere Schranken für m(V). Solche Unterklassen sind leicht angebbar, wenn G etwa ein Gittergebiet der Maschenweite 1 ist, indem man G zu einem Gittergebiet G_n der Maschenweite $\frac{1}{n}$ verfeinert und auf G_n Funktionen zuläßt, die in jeder Masche von der Form axy+bx+cy+d bzw. stückweise linear sind. Die Ermittlung des $\inf\{D_G[f]: f\in K_n\}=D_n$ in diesen Unterklassen von K führt auf die Bestimmung einer diskret-harmonischen Funktion, die rechnerisch durch Lösung eines Gleichungssystems (bis ca. 12 000 Unbekannte) bestimmt wird. Für den Fehler $D_n-m(V)$ kann eine O-Abschätzung angegeben werden. Das Verfahren wird auf einige Vierecke V angewendet, deren Moduln bekannt sind, sowie auf einige symmetrische Ringgebiete.

F.W. GEHRING: Hausdorff dimension and quasiconformal mappings

In this talk, we consider what happens to the Hausdorff dimension of a set A under a plane quasiconformal mapping $f: D\to D'$. It is clear that

$$\text{H-dim } f(A) = \text{H-dim } A$$

if f is a diffeomorphism or, more generally, bi-lipschitzian. We show first that this equation does not always hold if f is a general quasiconformal mapping. Then we give bounds for H-dim f(A) in terms of H-dim A and the maximal dilatation of f. In particular we show that the sets of Hausdorff dimension 0 and 2 are invariant under plane quasiconformal mappings.

K. HABETHA: Sätze vom Phragmen-Lindelöfschen Typ für quasireguläre Funktionen

$w(z)$ sei in $H=\{x>0\}$ quasiregulär, d.h. Lösung einer Beltramigleichung $w_{\bar z} = \nu(z)\overline{w}_{\bar z}$ mit $|\nu(z)|< k< 1$. Die Funktion $W=w-\nu\overline{w}$ genügt dann einer Differentialgleichung $W_{\bar z} = AW+B\overline{W}$, falls ν differenzierbar ist; W ist also im Sinne von Bers eine pseudoanalytische Funktion. Ist $|w|$ und damit $|W|$ bei Annäherung an die imaginäre Achse beschränkt, so gelten für $|W|$ bzw. $|w|$ im wesentlichen die klassischen Ergebnisse vom Phragmen-Lindelöfschen Typus. Z.B. existiert $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} = \alpha$ und es ist $0\leqq\alpha\leqq\infty$, dabei ist $M(r)= \sup|w(z)|$ auf $|z|=r, x>0$. Für $\alpha=0$ ergibt sich allerdings nicht immer die Beschränktheit von $|w|$ in H, man erhält nur $|w(z)|<\psi(z)$ für eine geeignete, wesentlich von $\nu_{\bar z}$ abhängige Funktion ψ. Zusammen mit Ergebnissen von Pfluger ergeben sich beidseitige Schranken für $M(r)$.

G. HALÁSZ: Bemerkungen über Ungleichungen von Turan für Lücken-Polynome

Es sei $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}$, $\mathrm{Re}\lambda_k\geqq 0$. In der Turanschen Ungleichung $|f(-\alpha)|\leqq[K(\alpha)+\varepsilon]^n \max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$ $(\alpha>0)$ ist der bestmögliche Wert der Konstanten $K(\alpha)$ nicht bekannt, der für gewisse Anwendungen nicht ohne Bedeutung wäre. Hier wird gezeigt, daß $K(\alpha)\to 1$ für $\alpha\to +0$, und wird die genaue Größenordnung der Annäherung bestimmt. Entsprechend wird eine von Tijdeman bewiesene Variante der Ungleichung verschärft und eine neue Variante ohne jede Voraussetzung für $\{\lambda_k\}$ gewonnen. Bei der letzten Variante bleibt aber die genaue Größenordnung offen.
Der Beweis führt zu auch in sich interessanten Extremalproblemen für Polynome und ganze Funktionen, deren genaue Lösung gute oder vielleicht die besten Konstanten $K(\alpha)$ liefern würde.

W.K. HAYMAN: Über die Ausnahmemenge in Nevanlinna's 2. Hauptsatz

Bekanntlich kann der 2. Hauptsatz für meromorphe Funktionen so ausgedrückt werden: Für q verschiedene Zahlen a_ν in der geschlossenen Ebene gilt

$$\sum_{\nu=1}^{q}\{T(r)-N(r,a_\nu)\} < \{2+o(1)\}\ T(r),$$

wenn r außerhalb einer Menge von endlichem Maß gegen unendlich strebt. Außerdem bewies Ahlfors daß

$$N(r,a) = T(r)+O(T(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

für alle a außerhalb einer Menge der Kapazität Null, wenn r ohne Ausnahmemenge gegen unendlich strebt.

Verfasser bewies kürzlich, daß obige Sätze in folgendem Sinne bestmöglich sind: Es sei E eine F_σ - Menge der Kapazität Null und $\phi_1(r)$, $\phi_2(r)$ stetige, monoton gegen unendlich strebende Funktionen. Dann existiert eine ganze Funktion f(z) für welche

$$T(r,f)\geqq \phi_1(r),$$

während es eine gegen unendlich strebende Folge r_m gibt, für welche

$$N(r_m,a)<\phi_2(r_m)\log r_m,\ a\epsilon E,\ m>m_0(a).$$

K.P. HERFELD: Extremalzerlegung des Einheitskreises in Zweiecke

Es sei $E=\{z\,|\,|z|<1\}$ der Einheitskreis, $C=\{z\,|\,|z|=1\}$, $p\epsilon C-\{1,-1\}$, $\alpha\in(0,\pi)$. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{K}_\alpha$ aller Kontinua $0\epsilon K$, die p mit $\bar{p}$ in E verbinden und in p und $\bar{p}$ analytische Ecken des Innenwinkels α mit dem Randbogen von C bilden, der p und $\bar{p}$ verbindet und den Punkt 1 enthält. Jedes $K\epsilon\mathfrak{K}_\alpha$ zerlegt E in zwei Zweiecke G(K), G'(K), wobei $1\in \mathrm{Rd}\ G(K)$. L(K) und L'(K) seien die reduzierten Extremallängen von G(K) bzw. G'(K).

Es wird $\{(L(K),L'(K))\,|\,K\epsilon\mathfrak{K}_\alpha\}$ untersucht und die Zerlegungen von E durch beliebige $K\epsilon\mathfrak{K}_\alpha$ mit solchen, die von bestimmten quadratischen Differentialen herrühren, verglichen. Eine sich daraus ergebende Ungleichung wird benutzt, um das folgende Extremalproblem zu lösen:

Mit $A=\{z\,|\,0<r<|z|<1\}$, $\mathcal{F}=\{f\,|\,f$ schlicht, $f(A)\subset E-\{o\}, f(C)=C, f(P)=\bar{f}(\bar{P})\}$, wobei $P\in C$, $\arg P\in(0,\pi/2]$ fest gewählt ist, betrachtet man $\inf\{|f'(P)f'(\bar{P})|\,|f\in\mathfrak{F}\}$ und fragt nach den zugehörigen Extremalfunktionen.

F. HUCKEMANN: Ein Extremalproblem für Kontinua in gewissen Homotopieklassen

Gegeben seien drei verschiedene Punkte $0,a,b\in\bar{E}$ (abgeschlossene Hülle des Einheitskreises E); es sei $\mathfrak{K}$ die Menge der Kontinua $K\subset\bar{E}$, die a und b enthalten aber 0 nicht enthalten und für die $G_K = E-(E\cap K)$ zusammenhängend ist; für $K\in\mathfrak{K}$ sei U_K die Menge der auf $\bar{E}$ stetigen und G_K harmonischen Funktionen u, die $0<u<1$ erfüllen und auf K verschwinden. D.Gaier stellte die Fragen: Was ist $\sup\limits_{K\in\mathfrak{K}}\sup\limits_{u\in U_K} u(0)$? Welche K sind extremal?

$\mathfrak{K}$ zerfällt in natürlicher Weise in Homotopieklassen $\mathfrak{K}_n$ nach der Änderung eines stetigen Arguments $\arg z$ auf K zwischen a und b. Für $|a|=1$ und $0<b<1$ zeigt sich, daß in jeder Klasse $\mathfrak{K}_n$ genau ein extremales Kontinuum K_n existiert und daß K_n von Trajektorien eines gewissen quadratischen Differentials gebildet wird.

E.-G. KAUSEN: Fortsetzung analytischer Mengen mit Hilfe des Maximumprinzips

Das Thema gehört eigentlich zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, die Beweismethoden sind der Theorie einer Veränderlichen entnommen (Maximumprinzip, harmonisches Maß, Riemannscher Hebbarkeitssatz).

Das Resultat ist eine Verallgemeinerung des Singularitätensatzes von THULLEN (1935)/ REMMERT-STEIN (1953) für den Spezialfall einer eindimensionalen analytischen Menge:
Sei S eine abgeschlossene Teilmenge des Einheitspolyzylinders $E\times E^n$, A eine in $E\times E^n - S$ analytische, rein eindimensionale Menge, die Kapazität von S bezüglich A sei Null. Außerdem gebe es eine abgeschlossene Teilmenge P von E von positivem harmonischem Maß, über der nur endlich viele Punkte von A liegen.

Dann ist $\bar{A}$ eine in $E \times E^n$ analytische Menge.
Dabei hat S bezüglich A die Kapazität Null, wenn es für jeden Punkt aus S eine Umgebung U und eine in $U \cap A$ plurisubharmonische, nirgends positive Funktion u gibt, für die gilt:
$\lim\limits_{z \to S} u(z) = -\infty$, $z \in U \cap A$.

Dieses Resultat findet sich in der Arbeit von W.Rothstein: Das Maximumprinzip und die Singularitäten analytischer Mengen, Inv. math. 6 (1968).
Die Verallgemeinerung gegenüber den obengenannten Resultaten besteht darin, daß die Singularitätenmenge S nicht mehr analytisch zu sein braucht, insbesondere also keine Voraussetzungen über die Dimension von S gemacht werden.

H. KÖDITZ: Erweiterungen meromorpher Funktionenkörper über nichtkompakten Riemannschen Flächen

Die algebraischen Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit N.L.Alling gewonnen.
Satz (Heins, Iss'sa): Seien x, y offene Riemannsche Flächen und M(x), M(y) die Körper der meromorphen Funktionen. Zu jedem Homomorphismus α: $M(y) \to M(x)$ mit $\alpha(\lambda)=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es genau eine analytische Abbildung $\varphi: x \to y$ mit $\varphi(f)=f\circ\varphi$ ($f\in M(y)$).

Es zeigt sich der Satz: Ist $\varphi: x \to y$ analytisch und nicht n zu 1 ($\Rightarrow$ surjektiv), so gilt mit $\varphi^*(f)=f\circ\varphi$:

a) Ist T eine Transzendenzbasis von M(x) über $\varphi^*(M(y))$, so gilt $|T|$=Kardinalzahl des Kontinuums ($=\mathfrak{c}$)

b) $[M(x):\varphi^*(M(y))(T)]=\mathfrak{c}$.

Satz: Ist $\varphi: x \to y$ analytisch und nicht bijektiv, so ist $\varphi^*(A(y))$ von der ersten Baireschen Kategorie in A(x). Hierbei sei in A(x) die kompaktoffene Topologie angenommen.

O. LEHTO: Abhängigkeit quasikonformer Abbildungen von der komplexen Dilatation

Sei Σ' die Klasse von schlichten konformen Abbildungen f von $|z|>1$ mit der Normierung $f(z)=z+a_1/z+\ldots$, und Σ'_k die Unterklasse derjenigen Abbildungen f, die eine quasikonforme Fortsetzung in $|z|<1$ gestattet mit $\|\mu\|_\infty \leq k<1$. Hängt μ holomorph von einem komplexen Parameter ζ ab, so sind die Abbildungen $\zeta\to f(z), \zeta\to f^{(n)}(z)$ $(|z|>1)$ und $\zeta\to a_n$ analytisch. Ist Φ etwa ein rationaler Ausdruck von $f(z), f'(z),\ldots,f^{(n)}(z)$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$, der für die identische Abbildung verschwindet, so folgt daraus, daß $\frac{1}{k}\max_{\Sigma'_k}|\Phi|$ auf $(0,1)$ nicht abnehmend ist. Dieses Resultat hat verschiedene Anwendungen.

A.J. LOHWATER: Gewisse Fragen über Kategorie in der Funktionentheorie

Ein neuer und einfacherer Beweis des folgenden Satzes von Lusin und Privalov wird gegeben: Es existiert eine in $|z|<1$ analytische und beschränkte Funktion f mit der Eigenschaft, daß $\lim_{r\to 1} f(r\cdot e^{i\Phi})=0$ auf einer Menge $\{e^{i\Phi}\}$ der zweiten Kategorie.

Satz 1: f(z) sei eine innere Funktion in $|z|<1$, und α sei eine komplexe Zahl mit $|\alpha|<1$. Dann ist $\{e^{i\Phi}|\lim_{r\to 1} f(re^{i\Phi})=\alpha\}$ eine Menge von der ersten Kategorie.

(Es gibt eine innere Funktion f(z) mit der Eigenschaft, daß für jedes α $(|\alpha|<1)$ die Mengen $\{e^{i\Phi}|f\to\alpha\}$ überabzählbar sind.)

Folgesatz: $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$ sei eine Funktion von beschränkter Schwankung auf $[0,1]$, wo $g_1(t)$ singulär und $g_2(t)$ absolut stetig ist. Wenn $g'(t)=\pm\infty$ auf einer Menge der zweiten Kategorie ist, dann kann $g_2(t)$ nicht konstant sein.

Satz 2: f(z) sei in $|z|<1$ schlicht und existiere $\lim_{r\to 1} f'(re^{i\Phi})$ nur auf einer Nullmenge auf $|z|=1$ (solche schlichten Funktionen existieren). Dann ist E von der ersten Kategorie.

A.E. OBROCK: Conformal Strip Mappings

We consider conformal (strip) mappings $w = f(z)$ from a strip $S = \{\emptyset_-(x)<y<\emptyset_+(x)\}$ onto a unit strip $H = \{|v|<1/2\}$ such that $f(+\infty) = +\infty$. As in Ahlfors' thesis we let $\omega(x) = \sup_y \operatorname{Re} f(x+iy) - \inf_y \operatorname{Re} f(x+iy)$ and call it the real oscillation of f. Bounded oscillation, negligible oscillation ($\omega(x) = O(1)$, $w(x)= o(1)$) are characterized in terms of $\emptyset_-(x),\emptyset_+(x)$ by the methods of extremal length and Caratheodory domain convergence. We derive a double series formula $v = \sum_{m,n} a_m(x)y^n$ for the harmonic measure $v = \operatorname{Inf}$ of $\{\emptyset_+(x)=1\}$ with respect to S. We apply the quasi-conformal distortion theorem of Teichmüller, Wittich and Belinski to obtain new asymptotic expansions for f which go beyond those of Warschawski (1942) and Gol'dberg-Stročik (1965).

E. PESCHL: Die konforme Geometrie einer Kurvenschar

Um die konformen Invarianten einer einparametrigen Kurvenschar $\mathcal{L}$:u=const. ($u\in C^4$) zu berechnen, gehen wir aus von $z=a=i/u_1$ (wir verwenden die Bezeichnungen $\frac{\partial}{\partial z} = (\ )_1, \frac{\partial}{\partial \bar z} = (\ )_{\bar 1}$). Mit $\varphi = \frac{1}{2i}\lg a/\bar a$ ergibt sich als Relativinvariante niedrigster Ordnung $\varphi_{1\bar 1}$. Ihr Verschwinden $\varphi_{1\bar 1} \equiv 0$ kennzeichnet die Kurvenscharen, die durch eine biholomorphe Abbildung auf eine Schar paralleler Geraden (lokal) abbildbar sind. Wird dieser Fall hinfort ausgeschlossen, so kann man im sogenannten "allgemeinen Fall" mit $\varphi \neq 0$ der Schar $\mathcal{L}$ die Riemannsche Metrik $ds^2=\sigma\varphi_{1\bar 1}dzd\bar z$ (mit $\sigma = \operatorname{sign}\varphi_{1\bar 1} = \pm 1$) konforminvariant zuordnen. Sie ermöglicht die Normierung des Tangentenvektors a zu $a^*=e^{i\varphi}(\sigma\varphi_{1\bar 1})^{-1/2}=e^b$. Nun hat man aber für ein solches Vektorfeld a^* als absolute (konforme) Invariante niedrigester Ordnung.

$v=I\{a^*\}=2ia^*\overline{(\lg a^*)_{\bar 1}} = 2ie^b\overline{(b_{\bar 1})} = e^{i\varphi}(\sigma\varphi_{1\bar 1})^{1/2}(2\varphi_1-i(\lg(\sigma\varphi_{1\bar 1}))_1)$ ("Hauptvariante"), wie der Tensorkalkül im $\mathbb{C}^1$ leicht zeigt. Eine weitere Invariante ist die Gaußsche Krümmung der Metrik: $K=2e^{b+\bar b}(b_{1\bar 1}+\bar b_{1\bar 1})$.

Geometrische Deutungen für v: (1) Für die isogenalen Trajektorien von $\mathcal{L}$ (mit Schnittwinkel β) ist die geodätische Krümmung $\varkappa_g = \Re(e^{i\beta}v)$ im Sinne dieser Metrik,

(2) ferner steht v in Relation zur topologischen Hauptinvariante des Kurven-3-Gewebes, das die unter $\pm\pi/3$ schneidenden Isogonalen mit $\mathfrak{C}$ bilden.

Es verbleiben eine Reihe von Aufgaben, wie Abhängigkeit bzw. Vollständigkeit des Systems der Invarianten, sowie wichtige Sonderfälle zu behandeln, und außerdem allgemeine Fragen zur Metrik ds^2.

E. REICH: Abschätzungen der zweidimensionalen Hilberttransformation

Es sei $\mathfrak{D}_0=\{S\}$ die Klasse messbarer Untermengen S des Einheitskreises $U=\{|z|<1\}$, mit 2-dimensionalen Lebesgueschen Mass $|S|>0$, $\overline{\chi}_S(w)=-\frac{1}{\pi}$ P.V. $\iint_S \frac{dx\,dy}{(z-w)^2}$, $L(S)=\iint_U |\overline{\chi}_S(w)|\,dudv$. Nach einer Vermutung ist $B(\mathfrak{D}_0)=\sup_{S\in\mathfrak{D}_0}\frac{1}{|S|}\left[L(S)-|S|\log(\pi/|S|)\right]$ endlich. Diese Vermutung wird für einige spezielle Unterklassen von $\mathfrak{D}_0$ bestätigt.

L. REICH: Zur Konvergenz von Reihenlösungen linearer Differentialsysteme in Umgebung eines Poles

Bieberbach stellte wohl als erster explizit das Problem, bei Differentialsystemen an schwachsingulären Stellen (etwa z=0) die Konvergenz aller formalen (multiplikativen) Lösungen der Form $z^{\varrho}(c_0+c_1z+\ldots)$ direkt zu beweisen. Diese Frage wurde von Lyra, Schäfke u.a. behandelt. Im vorliegenden Vortrag wird zweierlei gezeigt:

1. Man kann mittels einer einfachen algebraischen Bemerkung und mittels einer sehr einfachen Majorantenmethode (- bei der als majorantes Problem ein lineares Gleichungssystem verwendet wird -) nicht nur die Konvergenz aller multiplikativen Lösungen beweisen, sondern sogleich auch die Konvergenz aller formalen Lösungen.

   (*) $\sum_j z^{\varrho_j} P_j(\log z)$,

   wobei $P_j(\log z)$ Polynome in log z mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}[z]$ sind.

2. Die genannte Methode findet auch Anwendung bei größeren Klassen von linearen Differentialsystemen, von denen der einfachste Fall hervorgehoben sei:

Satz: Vorgelegt sei

$$(**)\qquad z^{m_i}\frac{d^{l_i}y_i}{dz^{l_i}} = P_{i1}(z)y_1+\ldots+P_{in}(z)y_n,$$

$m_i>0$, $l_i>0$ ganz, $P_{ik}(z)$ holomorph in Umgebung von $z=0$; es sei $\operatorname{ord}_{z=0} P_{ik}(z)=m_{ik}$. Es gelte

(a) $m_i-l_i=m_{ii}$, $i=1,2,\ldots,n$,

(b) $m_{ii}-m_{ij}<m_{ij}-m_{jj}-1$

für $1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq i$.

Dann sind alle formalen Lösungen (*) von (**) konvergent. Es werden Abschwächungen von (a) und offene Fragen (eventuelle invariante Charakterisierung von (**) im Sinne von Horn und J.Moser) diskutiert.

M. v.RENTELN: Über einen Ring ganzer Funktionen endlicher Ordnung.

Betrachtet wird der Ring $E[\varrho,\infty)$ $(\varrho>0)$, der aus allen ganzen Funktionen f besteht, die in der Ebene einer Abschätzung $|f(z)|\leqq A\exp(B|z|^{\varrho})$ für 2 Konstanten $A,B>0$ (die von f abhängen) genügen.

Im ersten Teil werden wichtige Klassen von endlich erzeugten Idealen funktionentheoretisch charakterisiert und der Zusammenhang mit dem Coronaproblem aufgezeigt.

Im zweiten Teil wird u.a. eine Charakterisierung der maximalen Ideale von $E[\varrho,\infty)$ gegeben und die Struktur der Primideale untersucht.

ST. RUSCHEWEYH: Zur Vermutung von Polya und Schönberg

Seien S, $\hat{K}$, S^*, K die in $|z|<1$ schlichten, fast-konvexen, sternförmigen bzw. konvexen holomorphen Funktionen mit $f(o)=o$, und für $f=\sum a_k z^k$, $g=\sum b_k z^k$ sei $f*g:=\sum a_k b_k z^k$. Polya und Schönberg vermuteten: $f, g \in K \Rightarrow f*g \in K$. In diesem Zusammenhang steht der Satz: Sei $G(s)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht $\leqq 1$, die nur reelle Nullstellen in $s<-1$ besitzt, und sei

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} G(K)\left[\frac{G(-1)}{G(1)}\right]^{\frac{K}{2}} z^K$$

Dann ist

1) $g \in K,\ S^* \Rightarrow f*g \in K,\ S^*$.

Wenn $G(s)$ eine Nullstelle in $-1{,}30<s<-1$ besitzt, so ist außerdem:

2) $g \in S \Rightarrow f*g \in S^*$.

Weiter sei $N:=\left\{g \in S \,\middle|\, \frac{1}{z}(f*g) \neq 0,\ |z|<1,\ \bigwedge_{f \in S^*}\right\}$.

Die Vermutung $\hat{K} \subseteq N$ wird durch eine Reihe von Beispielen erhärtet. So ist z.B. der Variabilitätsbereich des Funktionals $\frac{f(z)}{z}$ bei festem z in N und $\hat{K}$ identisch.

W. SCHWARZ: Irrationale Potenzreihen

Es seien $g(x)$ bzw. $\phi(x)$ Polynome mit komplexen bzw. reellen Koeffizienten, jeweils vom Grade $\geqq 1$. Ergebnisse von HECKE, PÓLYA, M.NEWMAN und anderen legen folgenden Satz nahe:
Die Potenzreihe (hier bezeichnet $[\beta]$ die größte ganze Zahl $\leqq \beta$)

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g([\phi(n)])z^n, \quad |z|<1,$$

stellt genau dann eine nicht-rationale Funktion dar, wenn wenigstens ein Koeffizient der ersten Ableitung $\phi'(x)$ des Polynoms $\phi(x)$ eine irrationale Zahl ist.

F.W.CARROLL und J.H.B.KEMPERMAN einerseits, D.CANTOR andererseits, erzielten allgemeine Ergebnisse, die den genannten Satz als Spezialfall enthalten.
Hier wird zunächst für obigen Satz ein dritter Beweis angedeutet, der Gleichverteilungseigenschaften der Folge $\{\phi(n)\}$ benützt. Sodann wird mit Hilfe eines Kriteriums von N.WIENER ein vierter, von R.WALLISSER (Freiburg) und dem Vortragenden stammender Beweis gegeben, der nicht nur die Irrationalität, sondern gleich die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe (*) über $|z|=1$ liefert.

P. TURAN: Über einige Anwendungen der Graphentheorie auf komplexe Funktionentheorie

H.J.W. ZIEGLER: Über meromorphe Flächen in R^{2n}

Es seien $\hat{f} = (\hat{f}^1,\ldots\hat{f}^n)$ $n \geq 1$ in C meromorphe Funktionen.

Es sei $C_\infty = C - \bigcup_{j=1}^{n}$ (Polstellen von $\hat{f}^j$), ${}_oC_\infty = C_\infty - [w \mid w \in C, \hat{f}^{1'}(w) = \ldots = \hat{f}^{n'}(w) = 0]$. Durch Zerlegung $\hat{f}^j = f^{2j-1} + if^{2j}$ in Real- und Imaginärteil erhält man eine verallgemeinerte Minimalfläche $S : C_\infty \to R^{2n}$, $w \mapsto f(w) = (f^1(w),\ldots f^{2n}(w))$ im Sinne von S.S.Chern und R.Osserman. Die durch Einschränkung von S auf ${}_oC_\infty$ erhaltene Immersion S_o ist eine reguläre Minimalfläche in R^{2n}. Ich bewies die folgenden 3 Hauptsätze:

1. $T(r,S) = H(r,S-a)+N(r,o,S-a)+m(r,o,S-a)+\log|d_{a,\lambda}|$, $(a \in R^{2n})$

2. $T(r,S') = G(r,S) + N(r,o,S') + m(r,o,S') + \log|d_{o,\lambda'}|$,

3. $(q-2)T(r,S)+G(r,S) \leq \sum_{k=1}^{q} [H(r,S-a_k)+N(r,o,S-a_k)] - N_1(r) +$
$$+O(\log(rT(r,S))).$$

T,H,N,m,G,N_1 heißen "Charakteristik", "a-Sichtbarkeitsfunktion", "Anzahlfunktion der a-Stellen", "a-Schmiegungsfunktion", "Krümmungsfunktion", "Anzahlfunktion der mehrfachen Stellen"; $d_{a,\lambda}$ ist ein von a abhängiger konstanter Vektor $\in R^{2n}$.

Für n=1 geht 1. in den ersten, 3. in den zweiten Hauptsatz der Theorie von R.Nevanlinna über; 2. ist eine integrierte Fassung eines verallgemeinerten Satzes von Gauss-Bonnet für S. Es werden eine sphärische Form $T_o(r,S)$ der Charakteristik, $H(r,S-a)$ und $G(r,S)$ geometrisch interpretiert mittels 2n-dim. stereogr. Projektion, der Fubini-Study Metriken auf $C^n \subseteq P^n(C)$ und $P^{2n-1}(C)$ und Sichtbarkeits- und Gauss-Abbildungen $\sigma_a, \gamma : {}_oC_\infty \to Q_{2n-2} \subset P^{2n-1}(C)$.

Jörg Winkler (Berlin)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft