MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 10|1972

Wahrscheinlichkeitstheorie

5.3. bis 11.3.1972

Die Tagung über Wahrscheinlichkeitstheorie leitete in diesem Jahr U. Krengel (Göttingen). Hauptsächlich behandelte Themengruppen waren Markoffprozesse, Grenzwertsätze, Wahrscheinlichkeitsmaße und Irrfahrten auf Gruppen. Daneben standen einzelne Vorträge über Geometrische Wahrscheinlichkeitstheorie, Informationstheorie, Verzweigungsprozesse, Statistik, Statistische Physik, Maßtheorie und Dynamische Optimierung.

Teilnehmer:

A. Antille, Zürich
U. Blanke, Bochum
R. Borges, Gießen
G.A. Brosamler, Heidelberg
A. Brunel, Rennes
W. Bühler, Mainz
S.D. Chatterji, Lausanne
Z. Ciesielski, Sopot
I. Csiszár, Budapest
M. Denker, Erlangen
R.M. Dudley, Cambridge/Mass.
A. Dvoretzky, Jerusalem
P. Gänßler, Bochum
Chr. Grillenberger, Göttingen
R. Hafner, Wien
W. Hansen, Bielefeld
H. Heyer, Tübingen
K. Jacobs, Erlangen
M. Keane, Rennes
H.G. Kellerer, Bochum
U. Krengel, Göttingen
L.M. LeCam, Berkeley
P.A. Meyer, Freiburg
M. Mürmann, Heidelberg
J. Neveu, Paris
P.E. Ney, Rehovot/Israel
F. Papangelou, Göttingen
M. Rao, Aarhus
P. Ressel, Münster
P. Révész, Budapest
J. Rosenmüller, Erlangen
H. Rost, Frankfurt
M. Schäl, Hamburg
E. Siebert, Tübingen
V. Strehl, Erlangen
D. Szász, Budapest
G. Székely, Budapest
K. Urbanik, Wroclaw
W. Waldenfels, Heidelberg
J. Walsh, Lausanne
H.N. Zessin, Bielefeld

Vortragsauszüge

A.Antille: Asymptotische Linearität einer Rangstatistik

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit "glatter" symmetrischer Dichte $f(x)$. Wenn man voraussetzt, daß

a) $\int f^3(x)dx < \infty$

b) $\Delta^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\Delta}[f(z+y)-f(y)]^2 dz\, dy \xrightarrow[\Delta\to 0]{} 0$

ist der Prozeß $Y_n(t) = \sqrt{n}(T_n(0,t) - t\int f^2(x)dx)$, $t \in [0,1]$

wobei $T_n(0,t) = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i<j} [I(\frac{1}{2}(X_i+X_j) \leqq tn^{-\frac{1}{2}}) - I(X_i+X_j \leqq 0)]$

(I(A) bezeichnet die Indikatorfunktion von A) asymptotisch linear im folgenden Sinn: $Y_n(t)$ konvergiert schwach gegen den Prozeß tZ, wobei $Z = N(0, 16[\int f^3(x)dx - (\int f^2(x)dx)^2]$. Dieser Satz findet eine Anwendung in der Statistik, nämlich für die Schätzung eines Lagenparameters. Man kann die Geschwindigkeit der Konvergenz einer konsistenten Schätzung für die asymptotische Varianz der Hodges-Lehmann-Schätzung für einen Translationsparameter genau studieren.

U.Blanke: Asymptotisches Verhalten von Eintrittsverteilungen bei Irrfahrten

Es sei eine aperiodische, rekurrente Irrfahrt in $\mathbb{Z}$ gegeben. Ist T_A die Eintrittszeit in die Menge A, so wird das asymptotische Verhalten der Wahrscheinlichkeit, bei Start im Nullpunkt die Menge uA $(:=\{ux \mid x\in A\})$ zuerst im Punkt ua zu treffen, untersucht. Es zeigt sich, daß die Folge $(\mathbb{P}_0[T_{na}=T_{nA}])_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht konvergiert. Regularitätsvoraussetzungen an das Verhalten der Übergangsfunktion $P(0,x)$ für große $|x|$ stellen jedoch Konvergenz sicher.

Für $\pi_A(x) := \lim_n \mathbb{P}_0[T_{na}=T_{nA}]$ ergeben sich z.B.:

(i) im Fall $\sigma_+^2 := \sum_{x>0} x^2 P(0,x) < \infty$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, $a_+ := \min A$:
$\pi_A(x) = \delta(x, a_+)$

(ii) im Fall $P(0,x) = |x|^{-2}c$ für alle $|x| > N (\in\mathbb{N})$, $c > 0$:
$\pi_A(x) = |A|^{-1}\chi_A(x)$.

Aussagen über π_A für Irrfahrten im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung werden benutzt zur Konstruktion einer Irrfahrt mit:
(i) $\pi_{\{1,2\}}(1)=1$, (ii) $\pi_{\{1,-1\}}(1)>1-\varepsilon$, (iii) $\pi_{\{-1,-2\}}(1)>1-\varepsilon$.

A.Brunel: Normalité des marches aléatoires vérifiant la condition de Harris

D.Ornstein a démontré récemment le théorème suivant. Si λ est la probabilité d'une marche aléatoire récurrente sur $\mathbb{R}$ et si, pour un $n\in\mathbb{N}$, $\lambda^{*n} = g_n\cdot\mu+\theta_n$ (Décomposition de Lebesgue, μ étant la mesure de Lebesgue) avec $g_n\cdot\mu>0$, alors pour toute fonction f, borélienne bornée à support compact, $\mu(f)=0$, la série $\sum_n \lambda^{*n}*f$ converge ponctuellement.
Plus généralement nous prenons un groupe G localement compact, séparable et compactement engendré, satisfaisant la condition suivante:
Il existe un voisinage symétrique compact V de e et une famille dénombrable $(V_n=x_nV)_n$ de translatés à gauche de V telle que:
pour tout translaté $V'=xV$ (ou Vx) il existe un recouvrement fini $V'\subset\bigcup_{j\in J}(V_j)$ et card $J\leq\alpha$ où α est un réel positif indépendant de x. (Par exemple toute extension compacte d'un groupe abélien, localement compacte, séparable et compactement engendrée, possède cette propriété).
Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant:
Théorme: Pour toute fonction f vérifiant les conditions:
1) $|f|$ est spéciale au sens de Neveu, 2) $\mu(f)=0$
la série $\sum_n \lambda^{*n}*f$ converge ponctuellement.
L'outil essentiel de la démonstration est l'opérateur potentiel récurrent W de Neveu et nous démontrons le théorème à partir de la convergence ponctuelle de la suite $\lambda^{*n}*Wf$.

S.D.Chatterji: A subsequence principle in probability theory

The principle in question can be stated as follows:
Let π be a certain quantitative asymptotic property

valid for any sequence of independent identically distributed random variables X_n belonging to some integrability class determined by the finiteness of a norm $\|.\|_L$. Then an analogous property $\tilde{\pi}$ is valid for a suitable subsequence $\{f_n\}$ of any sequence F of functions on any measure space such that $\sup_{f\in F} \|f\|_L < \infty$. Moreover, the subsequence can be chosen in such a way that any further subsequence will have the same property $\tilde{\pi}$. When π = the Kolmogorov strong law or the Marcinkiewicz theorem the principle is known to hold. Here we establish the validity of this principle for π = the central limit theorem and for π = the law of the iterated logarithm.

Z.Ciesielski: Uncertainty Principle

Let $\mathfrak{H}=L^2(R_1)$ be the complex Hilbert space with usual L^2 norm. Consider the one-dimensional harmonic quantum oscillator with the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}(P^2+Q^2)$, where P and Q are the momentum and position operators, respectively. The entropy of the oscillator is defined as follows: $E(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi|^2\log|\varphi|^2dx - \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}|^2\log|\varphi|^2dx$. It can be shown that the following inequalities hold:
$m_\varphi(H) \geq \sigma_\varphi(P)\,\sigma_\varphi(Q) \geq \frac{1}{2}\exp(E(\varphi)-E(\psi_o))$, where ψ_o is the ground state corresponding to H and m_φ, σ_φ^2 denote the mean and variance of the corresponding operator in the state φ, respectivly. It is proved that
$E(\varphi)-E(\psi_o) \geq \log 2 - 1$ and the conjecture is that
$E(\varphi)-E(\psi_o) \geq 0$. The case of equalities is discussed.

I.Csiszár: Information transmission with symbols of different costs

Let $\mathcal{X} = \xi_1,\xi_2,\ldots$ and $\mathcal{Z} = \zeta_1,\zeta_2,\ldots$ be sequences of RV's with values in an at most countable set X and in R^+, respectively; let ν_t be the largest integer n with $\Sigma_{i=1}^{n} \zeta_i \leq t$. The entropy rate of the source $\mathcal{X}$ with respect to the cost sequence Z is defined as
$H(\mathcal{X}\|\mathcal{Z}) = \lim_t t^{-1}H(\xi_1\ldots\xi_{\nu_t})$. A code is a mapping
$g: X^* \to Y^*$ such that $u<v \in X^*$ implies $g(u) < g(v) \in Y^*$.

Encoding the source $\mathfrak{X}$ by g one gets a new source $\mathfrak{Y} = \eta_1, \eta_2 \ldots$; let $\mathfrak{Z}' = \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots$ be a cost sequence asociated with $\mathfrak{Y}$. The rate of the encoding may be defined either as

$$L = \operatorname*{lim\,st}_{t\to\infty} t^{-1} \sum_{i=1}^{\nu_t^*} \zeta'_i \quad \text{or as} \quad \tilde{L} = \lim_{t\to\infty} t^{-1} E\left(\sum_{i=1}^{\nu_t^*} \zeta'_i\right) \text{ where } \nu_t^*$$

is the length of the random sequence $g(\xi_1 \ldots \xi_{\nu_t})$. If the code g is decodable in a weak sense and L or $\tilde{L}$ exists, under mild regularity conditions the following hold: $H(\mathfrak{Y}\|\mathfrak{Z}') = L^{-1}H(\mathfrak{X}\|\mathfrak{Z})$ (principle of conservation of entropy) or - supposing that $\mathfrak{Z}'$ is determined by a noiseless channel of capacity C through which $\mathfrak{Y}$ is transmitted - $\tilde{L} \geq C^{-1}H(\mathfrak{X}\|\mathfrak{Z})$ (noiseless coding theorem); under a stationarity condition the latter lower bound can be arbitrarily approached.

R.M.Dudley: Sample Functions of the Gaussian Process

Sample functions of Gaussian processes are studied through the isonormal linear process L on a Hilbert space H and its sets of continuity and boundedness (GC- and GB-sets respectively), as in J. Functional Analysis 1 (1967), 290-330. Let $H(C,\varepsilon)$ be the ε-entropy of a connected set C. If $\int_0^1 H(C,t)^{\frac{1}{2}}dt < \infty$ then C is a GC-set and L on C has a modulus of continuity $\varphi(x) = \int_0^x H(C,t)^{\frac{1}{2}}dt$. Conversely, using Slepian-Sudakov methods, if $\limsup \varepsilon^2 H(C,\varepsilon) = +\infty$ then C is not a GB-set. Applications: $H = L^2(U,\lambda)$, U = bounded domain in R^k, λ = Lebesgue measure, $C_o(U)$ (resp. $C(\alpha,U,M)$) = set of indicators of convex subsets of U (resp. subsets having boundaries with derivatives of orders $\leq \alpha$ bounded by $M < \infty$) is a GC-set iff $k = 1,2$ (resp. if $\alpha > k-1$, not if $\alpha < k-1$). If P(D) is elliptic of order s then $L = P(D)T$, T with continuous paths (in Schwartz distribution sense) iff $s > \frac{1}{2}k$. Details are in a paper submitted to Annals of Probability.

A. Dvoretzky: The three series theorem for dependent random variables

Let X_n $(n=1,2,\ldots)$ be random variables, $\mathfrak{F}_n$ be the σ-algebra generated by $X_1,\ldots,X_n$ and c a positive number. Put $p_n = P(|X_n| > c|\mathfrak{F}_{n-1})$, $\mu_n = E(\bar{X}_n|\mathfrak{F}_{n-1})$, $\sigma_n^2 = E(\bar{X}_n^2|\mathfrak{F}_{n-1}) - \mu_n^2$ where $\bar{X}_n = X_n I\{|X_n| < c\}$ is X_n trucated at c. Denote by C( ) [resp. D( )] the set of convergence [resp. divergence] of the indicated series.
It is easy to see that $C(\Sigma X_n) = C(\Sigma p_n) \cap C(\Sigma \bar{X}_n)$ and $C(\Sigma\mu_n) \cap C(\Sigma\sigma_n^2) \subset C(\Sigma\bar{X}_n) \subset C(\Sigma\mu_n) \cap C(\Sigma\sigma_n^2) \cup D(\Sigma\mu_n) \cap D(\Sigma\sigma_n^2)$
(all relations between sets are modulo null-sets).
A typical result is $\zeta \cap C(\Sigma X_n) = \zeta \cap C(\Sigma\mu_n) \cap C(\Sigma p_n) \cap C(\Sigma\sigma_n^2)$
where ζ is the set on which $\lim\sup \sigma_n^{-2} |\mu_n - E\mu_n| < \infty$.
This includes, of course, the classical 3-series theorem of Kolmogorov, and such results as Gundy's generalization to martingales of the theorem of Marcinkiewicz-Zygmund on independent random variables are also immediate corollaries. - The proof is based on a central limit theorem for martingales.

Ch. Grillenberger: Konstruktion strikt ergodischer K-Systeme

Durch die Ergebnisse von Jewett und Krieger (1969/70) ist bekannt, daß jedes invertierbare ergodische dynamische System auf einem Lebesgueraum maßtheoretisch isomorph ist zu einem strikt ergodischen dynamischen System (Ω, T) (Ω kp. metrisch, $T:\Omega \to \Omega$ Homöomorphismus, so daß Ω keine echte invariante abgeschlossene Teilmenge enthält und nur ein T-invariantes W-Maß trägt). Der Satz ist nicht konstruktiv, daher bleibt die Aufgabe, Systeme speziellen Typs zu konstruieren. An Mischungseigenschaften wurde bisher nur schwache Mischung erreicht (Katok-Stepin-Jacobs und Kakutani). Unter Verwendung von Parrys Theorie der Systeme von endlichem Typ und einer früheren Konstruktion, die mit Hilfe von Permutationen Folgen beliebig hoher Entropie liefert, gelingt es, im k-Shift ein System mit K-Mischung zu finden. Es ist unbekannt, ob das System sogar Bernoullisch ist.

R.Hafner: Ein Problem der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie

$X_1,\ldots,X_n$ seien ua. Zufallsvariable mit Werten im $\mathbb{R}^m$ und der gemeinsamen Dichte f. $-U = U \subset \mathbb{R}^m$ sei eine feste, symmetrische Teilmenge des $\mathbb{R}^m$.

Def.: X_i, X_j bilden eine U-Koinzidenz, wenn $X_i - X_j \in U$. Von jeder Realisierung $x_1,\ldots x_n$ wird ein Koinzidenzgraph $G(x_1,\ldots,x_n;U)$ erzeugt mit: $G(x_1,\ldots,x_n;U) = (\{1,\ldots,n\}, \{[i,j]: i \neq j, x_i - x_j \in U\})$. $G(\ldots)$ ist einfach, nichtorientiert und ohne Schlingen. Weiterhin sei $\mathfrak{G}_k$ ein Repräsentantensystem aller einfachen, nichtorientierten, zusammenhängenden Graphen ohne Schlingen mit k Knoten. $L(x_1,\ldots x_n;U,G)$ sei die Anzahl der zu $G \in \mathfrak{G}_k$ isomorphen Komponenten des Koinzidenzgraphen $G(\ldots)$.

Setzt man $\overset{k}{U}_G := \{(y_1,\ldots,y_{k-1}) : (y_1,\ldots,y_{k-1}) = (x_1-x_2,\ldots,x_k-x_{k-1})$ für $G(x_1,\ldots,x_k;U) \approx G\}$ und $\overset{k}{U} := \cup[\overset{k}{U}_G : G \in \mathfrak{G}_k]$, so gelten für eine Folge $(U^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ symmetrischer Mengen, deren Durchmesser gegen 0 geht:

Theorem 1: Unter den Voraussetzungen

1) $\|f\|_k^k = \int_{\mathbb{R}^m} f^k < \infty$,

2) $\lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)}) = \xi[\binom{n}{k} \|f\|_k^k]^{-1}(1+o(1))$,

3) $\lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)}_G)[\lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)})]^{-1} \to J_G \quad \forall G \in \mathfrak{G}_k$, gilt

$$(L(X_1,\ldots,X_n;U^{(n)},G) : G \in \mathfrak{G}_k) \xrightarrow{\omega} \otimes[P_{\xi J_G} : G \in \mathfrak{G}_k]$$

Theorem 2: Unter den Voraussetzungen

1) $\|f\|_s^s < \infty$ für ein $s > 2$, $s \in \mathbb{N}$,

2) $\lambda(U^{(n)}) = n^{-1}\varepsilon(n)$ mit $\varepsilon(n) = o(1)$, $n\varepsilon(n)^{s-2} \to \infty$, $n\varepsilon(n)^{s-1} < c$,

3) $\lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)}_G)[\lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)})]^{-1} \to J_G \quad \forall G \in \mathfrak{G}_k$, gilt

$$\left(\frac{L(X_1,\ldots,X_n;U^{(n)},G) - EL(\ldots)}{[\binom{n}{k}\|f\|_k^k \lambda(\overset{k}{U}{}^{(n)})]^{\frac{1}{2}}} : G \in \mathfrak{G}_k\right) \xrightarrow{\omega} \otimes[N(0,J_G) : G \in \mathfrak{G}_k] \quad \forall k \leqq s-1$$

Zu diesem Satz gibt es diskrete Analoga, die bekannte Ergebnisse über Besetzungsaufgaben wesentlich verallgemeinern.

H.Heyer: Neuere Ergebnisse in der Theorie der Wahrscheinlichkeitsmaße auf lokalkompakten Gruppen

Überblicksvortrag über Verallgemeinerungen zentraler Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie für Zufallsvariable mit Werten in lokalkompakten Gruppen G mit abzählbarer Basis. Für die Auswahl war der Prinzipcharakter bestimmend: Es lassen sich jeweils die Gültigkeitsbereiche der Sätze festlegen:

1.Äquivalenzprinzip: Für Folgen $(Y_n)_{n\geq 1}$ n-ter Partialprodukte unabhängiger G-Zufallsvariablen sind f.s., stochastische und Verteilungskonvergenz genau dann äquivalent, wenn G keine echte kompakte Untergruppe besitzt.

2.Konvergenzprinzip: Für Folgen $(\nu_n)_{n\geq 1}$ n-ter Faltungsprodukte von W-Maßen einer Folge $(\mu_j)_{j\geq 1}$ auf G existieren Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ in G, so daß $(\nu_n * \epsilon_{x_n})_{n\geq 1}$ konvergiert, genau dann, wenn G kompakt ist.

3.Starkes Konvergenzprinzip: Es sei G kompakt. Repräsentantensysteme in $\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{Z}(\mu) : \mu \in M^1(G)\}$ mit $\mathfrak{Z}(\mu) = \{\mu * \epsilon_x : x \in G\}$ lassen sich genau dann voll wählen (d.h. so daß für jede $(\mu_j)_{j\geq 1}$ die oben definierte Folge $(\nu_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn G total zusammenhängend ist.

4.Einbettungsprinzip: Für jede abelsche gleichgradig wurzelkompakte Gruppe G ist jedes unendlich teilbare W-Maß auf G H-stetig einbettbar für eine kompakte Untergruppe H von G genau dann, wenn G_o lokal zshgnd. ist.

5.Varianzprinzip: Es sei G kompakt. Eine Varianz auf der Halbgruppe $M^1(G)$ der W-Maße auf G (definiert als stetiger Halbgruppen-Homomorphismus V in R_+ mit der Eigenschaft $V(\mu) = 1 \Leftrightarrow \mu = \epsilon_x$ für ein $x \in G$) existiert genau dann wenn G Liesch ist.

Die zitierten Resultate gehen auf Cziszár, Kloss, Maksimov, Siebert und den Verfasser zurück.

M.Keane: Random Walks

Let $RW(\mu)$ denote the random walk generated by a probabiliy μ on the locally compact, compactly generated and separable topological group G. G is called transient if $RW(\mu)$ is transient for every μ whose support generates G (topologically). Otherwise G is recurrent.

Theorem 1: If G is nilpotent with maximal compact subgroup K, then G is recurrent iff G/K is abelian recurrent.

Theorem 2: The renewal theorem holds for G nilpotent.

Open problems: Extend these results to a solvable Lie group G. Is the group $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & e^b\end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ transient? Give a characterization of transience and recurrence for homogeneous spaces. If G is recurrent and $H\leq G$, is H recurrent?

A historical sketch of the problem of recurrence and renewal was given in the lecture.

P.A.Meyer: Markov random sets in continuous time
(results of B.Maisonneuve)

The "classical" theory of regenerative events in continuous time was developed by Krylov-Yushkevich, Horowitz, Hoffmann-Jørgensen (also Kingman in a less general set-up). In all these papers, the process which played the main role was the extension to continuous time of the age process of renewal theory. Recently, B.Maisonneuve has shown that a more complete theory can be developed, also in a much simpler way, using the "delay process" of renewal theory instead of the age process. One can really give satisfactory axioms for the intuitive idea of a Markov random set, thus providing a rather natural set-up for processes on the boundary, etc. The results concerning the age process are connected to those of Maisonneuve by time reversal.

J.Neveu: Sur l'irréductibilité des chaînes de Markov

On se donne une probabilité de transition $P=(P(x,F):x\in E, F\in\mathfrak{F})$ sur un espace mesurable (séparable) et une mesure σ-finie positive sur cet espace telle que $\int m(dx)P(x,.)\ll m$. On considère ensuite les 2 conditions d'irréductibilité suivantes: a) (m-irréductibilité): $m(F)>0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} P^n(x,F)>0\ \forall x\in E$,

b) (m-essentielle irréductibilité): $m(F)>0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} P^n(.,F)>0$ m p.p. sur E.

On sait que (b) entraîne que l'opérateur de contraction

positif sur $L^1(m)$ associé à P soit T $[(f.m)P = Tf.m]$ est ou bien dissipatif, ou bien conservatif ergodique (résultat de E.Hopf). On sait que (a) entraîne que ou bien $\exists h:E \to]0,\infty[$ mesurable telle que $\Sigma_{n\geq 1} P^n h$ soit bornée [cas transitive], ou bien P restreinte à une partie $E^* \in \mathfrak{J}$ de E, P-invariante et de m-mesure pleine, vérifie la condition de récurrence de Harris (cf. J.Neveu, Annales Fourier 1972). D'autre part il est évident que (a)⇒(b) et l'exemple des transformations ponctuelles préservant la mesure et ergodiques, définies sur un espace de probabilité non fini montre que l'implication (b)⇒(a) est fausse.
Mais on a le résultat suivant:
Si P est m-essentiellement irréductible, alors de 2 choses l'une: ou bien $\exists E_1 \in \mathfrak{J}^*$, P-invariant et de m-mesure pleine, tel que $m \ll \Sigma P^n(x,.)$ $\forall x \in E_1$ (P est donc m-irréductible sur E_1), ou bien $\exists E_2 \in \mathfrak{J}^*$, P-invariant et de m-mesure pleine, tel que $m \perp \Sigma_{n\geq 1} P^n(x,.)$ $\forall x \in E_2$.
Par exemple, si l'opérateur T associé à P est conservatif ergodique (auquel cas P est m-essentiellement irréductible) et si la condition $m \ll \Sigma_{n\geq 1} P^n(x,.)$ n'est pas satisfaite pour presque tout x, alors P vérifie la condition de Harris, du moins sur un ensemble P-invariant de mesure pleine. On rappelle que l'importance de la condition de Harris tient à la possibilité de développer une théorie du potentiel récurrent, de démontrer des théorèmes ratio-limites pour de tels P.

P.Ney: <u>Analytic Functions of Probability Measures</u>

Let $p(s) = \Sigma_0^\infty p_k s^k$ = the probability generating function of a non-negative, integer valued, aperiodic random variable; $a(s) = \Sigma a_n s^n$, $A_n = \Sigma_0^n a_i$, and $(ap)_k$ be defined by $a(p(s)) = \Sigma (ap)_k s^k$. Then clearly $(ap)_k = \Sigma_0^\infty a_n p_k^{*n}$, where p^{*n} = =the n-fold convolution of p. Take $\Sigma k p_k = 1$.

<u>Thm.</u>: <u>If</u> $\{a_k\}$ <u>is regularly varying and</u> $\Sigma k^3 p_k < \infty$, <u>then</u>
(*) $(ap)_k \sim cA_k/k$, $k \to \infty$.
If the reg. var'g condition is slightly strengthened, then $\Sigma k^2 p_k < \infty$ is sufficient. Results like (*) are also extended to a larger class than the reg. var'g sequences, which

e.g. includes $\exp\{k^{\beta}\}$, $\beta<\frac{1}{2}$.

Applications: (i) If $a_n \equiv 1$, then $(ap)_k = \Sigma_n p_k^{*n}$ = the classical renewal function.

(ii) Renewal sequences with gaps: e.g. $a_{n^2} = 1$, $a_j = 0$ for $j \neq n^2$ for some n. Then $(ap)_k \sim ck^{-\frac{1}{2}}$.

(iii) Two-dimensional time random walk renewal thm.: The renewal function here is $\Sigma_{n=0}^{\infty} d_n p_k^{*n}$, where d_n = number of divisors of n, and it is $\sim c \log k$. (A stronger result is in prior work by Ney, Wainger, to appear in Studia Math.)

(iv) There are similar averaging results for other arithmetic functions.

(v) If $a_n = m^n$, then $(ap)_k$ = mean number of visits to k in a branching random walk

There is a complementary class of results (Chover, Ney, Wainger, J. d'Analyse, 1972) for which $(ap)_k \sim cp_k$.

F.Papangelou: Expected increments of point processes

We consider a stationary point process on the line, with finite intensity, and prove that if none of its points can be predicted with positive probability, then there is a random, continuous and past-dependent change of time $t \Rightarrow W(\omega,t)$ $(t>0)$ that transforms the non-negative points of the process into a Poisson process with rate 1 and independent of the σ-field $\mathfrak{F}_0$ of events happening in $(-\infty,0)$. This transformation is a.s. abs. continuous iff the Palm probability P_0 of the process is abs. continuous relative to the unconditional probability P on $\mathfrak{F}_0$. If a condition similar to the latter is satisfied by a process of lines in the plane, with finite intensity and stationary under the Euclidean group, then such a process is doubly stochastic Poisson and its structure can be completely described.

P.Révész: Multiplicative Systems

The sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of random variables is called a multiplicative system if $E(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}) = 0$ $(i_1<i_2<\ldots<i_k,$ $k=1,2,\ldots)$. A central limit theorem and laws of iterated logarithm were presented for such systems. A convergence

theorem was given for four-wise multiplicative systems, i.e. it was shown that if $E(\xi_i^4) \leqq K$ $(i = 1,2, ..)$, $E(\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l) = 0$ $(1 \leqq i<j<k<l)$ and $\{c_k\}$ is a sequence of real numbers then the series $\Sigma c_k \xi_k$ is convergent with probability 1 if and only if $\Sigma c_k^2 < \infty$.
Some consequences of these theorems can be obtained for martingales and for subsequences of orthonormal systems.

P.Ressel: Laplace-Transformation nichtnegativer und vektorwertiger Maße

Nennt man eine Funktion $f: \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}$ positiv semidefinit, wenn $\Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j f(t_i + t_j) \geqq 0$ ist für alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+^p)^n$, $n \in \mathbb{N}$, so lassen sich die Laplacetransformierten nichtnegativer Maße auf $\mathbb{R}_+^p$ als diejenigen Abbildungen $f: \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}$ charakterisieren, die stetig, beschränkt und positiv semidefinit sind.
Sei H ein reeller Hilbertraum; unter einem orthogonalen H-wertigen Maß auf $\mathbb{R}_+^p$ versteht man eine σ-additive Abbildung $M: \mathfrak{B}_+^p \to H$ mit $\langle M(A), M(B) \rangle = 0 \quad \forall A,B \in \mathfrak{B}_+^p$, $A \cap B = \emptyset$.
Genau diejenigen $Y: \mathbb{R}_+^p \to H$ sind Laplacetransformierte orthogonaler H-wertiger Maße, die stetig und beschränkt sind und für die $\langle Y(s), Y(t) \rangle$ nur von $s+t$ abhängt. Hierauf aufbauend ergibt sich ein Darstellungssatz für stetige Halbgruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}_+^p$ in das "Einheitsintervall" der selbstadjungierten Operatoren auf H.

M.Schäl: Dynamische Optimierung unter Stetigkeits- und Kompaktheitsvoraussetzungen

In einem Entscheidungsmodell der dynamischen Optimierung bezeichne S den Zustandsraum, A den Aktionenraum, $R: (S \times A)^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $R_n: (S \times A)^n \times S \to \overline{\mathbb{R}}$ den Gewinn im Zeitintervall $(1,\infty)$ bzw. $(1,n+1]$. Durch jeden Plan π wird ein $P_\pi \in W((S \times A)^\infty)$, dem Raum aller W-Maße auf $(S \times A)^\infty$ induziert; $\int R dP_\pi$ stellt dann den mittleren Gesamtgewinn unter dem Plan π dar. Gilt $\int R dP_{\pi^*} = \sup_\pi \int R dP_\pi$, so heißt π^* optimal. Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß die Menge Λ der durch die Pläne induzierten W-Maße bzgl. geeigneter Topologien auf $W((S \times A)^\infty)$ kompakt ist und

$\int R dP$ nach oben halbstetig in $P \in \Lambda$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar die Existenz eines optimalen Plans. Außerdem gilt unter den gleichen Voraussetzungen
$\lim_n \sup_\pi \int R_n dP_\pi = \sup_\pi \int R dP_\pi$.

E.Siebert: Normalverteilungen auf lokalkompakten Gruppen

Orientiert an einer Charakterisierung der Normalverteilung auf dem R^n wird eine Definition der Normalverteilung für beliebige lokalkompakte Gruppen gegeben. Sodann wird gezeigt, daß solche Maße stets auf der Zusammenhangskomponente konzentriert sind. Umgekehrt wird auf dem Weg über die Lie-Gruppen gezeigt, daß auf jeder zusammenhängenden lokalkompakten Gruppe auch eine Normalverteilung existiert. Sodann werden die von Urbanik, Parthasarathy, Corwin und Carnal definierten Gaußmaße in diesen Rahmen eingeordnet. Schließlich wird die Konvergenz infinitesimaler Systeme gegen die Normalverteilung behandelt.

G.Székely: Über ein Bedienungsproblem

Ein Arbeiter bediene eine Gruppe von k Automaten in einer gegebenen Ordnung.Die Betriebsperioden der Maschinen sollen exponentielle Verteilung haben. Die Aufgabe ist, die Verteilung der Summe der Stillstandszeitperioden einer gegebenen Maschine festzustellen, die in einem gewissen Zeitraum t vorkommen. Die Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \dots$ sollen die Zeitdauer bedeuten,die zwischen dem Verlassen der Maschine durch den Arbeiter und seiner Rückkehr zu ihr vergangen ist, $\eta_1, \eta_2, \dots$ ist die Dauer der Stillstandszeiten und $\zeta_i = \xi_i - \eta_i$ die Betriebsperiode.
$F(t,z)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der Stillstandszeitperioden im Zeitraum $t \leq z$ ist.
Die Laplace-Transformierte von $F(t,z)$ wird mit Hilfe der Laplace-Transformierten der Verteilungsfunktion $G(x)$ von ξ bestimmt.

K.Urbanik: Extreme point method in limit problems

The theorem of Krein and Milman which asserts that a nonempty convex compact set in a locally convex Hausdorff space is the closed convex hull of its exteme points has frequently been employed to classical characterization theorems for measures. In 1963, D.G.Kendall obtained the integral representation of the Laplace-transform of an infinitely divisible distribution on R_+. Three years later S.Johansen used the same method of extreme point to obtain the Lévy-Khintchine formula in general case. In 1968, using the extreme point method I proved the following representation for distributions μ from Lévy's class L:

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left\{ iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{ty} \frac{e^{iv}-1}{v} dv - it \arctan y \right) \frac{\nu(dy)}{\log(1+y^2)} \right\}.$$

Recently, I proved the representation formula for self-decomposable distributions of order n:

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left\{ iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{ty} \left[\int_0^1 \frac{e^{izu}-1}{zu} \left(\log \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz - it(n-1)! \arctan y \right] \cdot \frac{\nu(dy)}{\log^{n+1}(1+y^{\frac{2}{n+1}})} \right\}$$

and for self-decomposable distributions of infinite order:

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left\{ iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\tfrac{1}{2} \log(1+z^2t^2) + i \arctan zt - \frac{itz}{1+\frac{2}{\pi}z} \right] \frac{\nu(dz)}{\log(1+z^2)} \right\},$$

ν being an arbitrary finite Borel measure on R.

W.v.Waldenfels: Stochastic movements in Hilbert space

A movement in Hilbert space is a family of unitary operators $(U_t^{t'})_{t,t'\in R}$ with the properties
(i) $U_t^t = 1 =$ identity, (ii) $U_{t'}^{t''} U_t^{t'} = U_t^{t''}$ for $t,t',t'' \in \mathbb{R}$.
In a stochastic movement the operators $U_t^{t'}$ are random variables. A stochastic movement is called stationary if $EU_t^{t'} = R(t'-t)$. The aim of the talk was to calculate $EU_0^t = R(t)$, when U was related to a stationary renewal point process. A development analogous to the 1,2,3,... particles-development ⊗ in physics, yielded a closed formula for R:

$R(t) = A^{fp} + A^f * (\delta - A)^{*(-1)} * A^p$ for $t \geqq 0$.

J.Walsh: Relations between time reversal and duality

Let $(X_t)_{t\geqq 0}$ be a right continuous strong Markov process with initial measure μ and lifetime ζ. The reversed process $\tilde{X}$ is defined by

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_{\zeta - t} & 0 < t \leq \zeta < \infty \\ \Delta & t > \zeta \text{ or } \zeta = \infty \end{cases}$$

where Δ is, as usual, the "cimetary". $\tilde{X}$ will again be a homogeneous Markov process, and will satisfy a slightly weakened form of the strong Markov property. Furthermore, $\tilde{X}$ and X are dual processes with respect to the measure $\mu G = \int_0^\infty \mu P_t dt$. On the other hand, if one starts with two processes in duality, one finds that they are connected by the reversal of time, but in a sense slightly different from the above. Suppose X and $\hat{X}$ are Markov processesin duality with respect to a σ-finite measure ξ, i.e. their semigroups $P_t, \hat{P}_t$ satisfy

$$\int f(x) P_t g(x) \xi(dx) = \int \hat{P}_t f(x) g(x) \xi(dx).$$

Then - apart from questions of left or right continuity - X and $\hat{X}$ have the following connection: consider the processes $\{\hat{X}_t, 0 < t < t_o\}$ and $\{X_{t_o - t}, 0 < t < t_o\}$, each with initial measure ξ. Then, conditioned on $\zeta > t_o$, the two processes have the same law. In other words, $\hat{X}$ is essentially the process X reversed from a fixed time.

H.N.Zessin: Kategorientheoretische Behandlung der Zustandsraumtransformation von Markoffprozessen

Das genannte Problem (Gegeben ein Markoffprozeß X mit Zustandsraum E und eine Zustandsraumtransformation $\varphi: E \to E'$. Wann existiert ein M.-P. X' mit ZR. E' und $X'_t = \varphi \circ X_t$?) wird behandelt mit Hilfe einer Kennzeichnung von Markoffprozessen als Operatoren auf Banachalgebren (die von U.Krause herrührt) und kategorientheor. Methoden. Genauer: Das Problem der ZR.-trsf. von M.-Prozessen wird vermöge eines injektiven, vollen Funktors der "Kategorie der Zustandsräume" in die "Kategorie der Banachalgebren" hinübergespielt zu einem Problem der Transformation dieser Banachalgebren mit den darauf operierenden, die M-Prozesse kennzeichnenden Operatoren. Es zeigt sich, daß das ursprünglich komplizierte Problem ganz einfach ist. Schließlich wird der Zusammenhang hergestellt zu Ergebnissen von Dynkin und Rosenblatt.

Ch. Grillenberger (Göttingen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft