MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 12 /1972

Gewöhnliche Differentialgleichungen

19.3. - 25.3.1972

Nach etwa zweijähriger Unterbrechung fand die dritte Tagung über gewöhnliche Differentialgleichungen statt; die Leitung hatten wieder H.-W. Knobloch (Würzburg) und R. Reißig (Bochum). Der Besuch einer Anzahl namhafter ausländischer Fachkollegen zeigte, daß die Tagungen von zunehmendem Interesse sind; auch das wissenschaftliche Programm machte eine positive Entwicklung erkennbar. Trotzdem bleibt festzustellen, daß in Deutschland das Fachgebiet "Analysis und Anwendungen", das weitverzweigt ist und sehr aktuelle Teilbereiche aufweist, nach wie vor unterentwickelt ist und an den Universitäten nicht in dem Umfang repräsentiert wird, der seiner theoretischen und praktischen Bedeutung entspricht. Im Unterschied hierzu wird im Ausland der Forschung auf dem Gebiet der "Angewandten Analysis" eine viel stärkere Förderung zuteil; das gilt insbesondere für die Themenkreise "Gewöhnliche Differentialgleichungen - Dynamische Systeme". Aus diesen Bemerkungen erklärt sich auch, daß die auf der Tagung dargebotenen Vorträge bei weitem nicht das gesamte Spektrum der modernen Theorie der Differentialgleichungen erfaßten.
Das Vortragsprogramm läßt sich ungefähr durch die Stichworte "Periodische Lösungen in nicht-autonomen Systemen - Dissipativität - Differentialgleichungen im Komplexen - Stabilität - Fortsetzbarkeit - Optimierung" kennzeichnen. Es waren nur Spezialvorträge über eigene Forschungsergebnisse - keine Übersichtsvorträge - vorgesehen. Da der Teilnehmerkreis relativ klein war, bot sich genügend Gelegenheit zu ausführlichen Diskussionen.
Im Anschluß an diese Tagung fand die Tagung "Regelungstheorie"

statt. Die von den Veranstaltern vorgesehene und von der Sache her gerechtfertigte Koppelung der beiden Tagungen erwies sich als sehr günstig, da eine beträchtliche Anzahl von Teilnehmern an beiden Veranstaltungen interessiert war. Schon jetzt ist geplant, im Frühjahr 1974 die beiden Konferenzen wiederum nacheinander abzuhalten.

<u>Teilnehmer</u>

J. André	Saarbrücken
I. Barbalat	Bukarest (Rumänien)
K. Böhmer	Karlsruhe
J. Boman	Stockholm (Schweden)
J.L. Corne	Louvain (Belgien)
L. Fischer	Saarbrücken
W. Hahn	Graz (Österreich)
J.K. Hale	Providence (USA)
W. Haußmann	Bochum
H. Herold	Berlin
F. Kappel	Würzburg
H.-W. Knobloch	Würzburg
H. Knolle	Bochum
R. Mannshardt	Bochum
J. Mawhin	Heverlee (Belgien)
M. Mikolás	Budapest (Ungarn)
K. Nixdorff	Bochum
C. Olech	Warschau (Polen)
K. Pfeiffer	Louvain (Belgien)
R. Rautmann	Karlsruhe
L. Reich	Graz (Österreich)
G. Reißig	Bochum
R. Reißig	Bochum
P. Sagirow	Stuttgart
W. Schempp	Bochum
M. Thoma	Hannover
I. Troch	Wien (Österreich)
G. Villari	Florenz (Italien)
J. Werner	Hamburg
C.-C. Yang	Washington (USA)

Vortragsauszüge

I. BARBALAT : Dissipativitätskriterien für gewisse nichtlineare Differentialgleichungssysteme

Die Lösungen des Systems

$$\frac{dx}{dt} = A\,x - B\,f(\sigma) + p(t,x)\ , \quad \sigma = R^*\,x\ ,$$

wo $A(n,n)$, $B(n,m)$, $R(n,m)$ konstante Matrizen sind und

$$f(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1),\ \ldots\ ,\varphi_m(\sigma_m))^*$$

gilt, sind künftig beschränkt, wenn gewisse Frequenzbedingungen erfüllt sind (mit oder ohne Einschränkungen für die Ableitungen $\varphi_i'(\alpha)$).

Mit dieser Methode lassen sich im Falle nichtlinearer Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung konkrete Bedingungen aufstellen.

K. BÖHMER : Eine verallgemeinerte FUCHSsche Theorie

In der FUCHSschen Theorie wird das Wachstum der Lösungen von

$$\text{(D)} \qquad w^{(m)} + \ldots + a_j\,w^{(j)} + \ldots + a_o\,w = 0$$

durch das der Koeffizienten a_j abgeschätzt und umgekehrt. Ein Fundamentalsystem von (D) läßt sich aus Blocks der Form

$$w_n(z) = z^p\Big\{d_n(z) + \binom{n-1}{1}\,d_{n-1}(z)\,\log z + \ldots + d_1(z)\,(\log z)^{n-1}\Big\},\ n=1,\ldots,n_p\ ,\quad \sum_p n_p = m,$$

aufbauen, wenn die Koeffizienten a_j in einer geeigneten Umgebung $\dot{R}$ von ∞ holomorph sind, $p \in \mathbb{C}$, d_j holomorph in $\dot{R}$.

Mit einem Fundamentalsystem $\{w_1,\ \ldots\ ,w_m\}$ von (D) in der Umgebung $\dot{R}$ von ∞ , den Maximalbeträgen

$$M(r,w_n) = \max_{j=1}^{n}\{M(r,d_j)\}\ , \qquad M(r,W) = \max_{j=1}^{m}\{M(r,w_j)\}\ ,$$

$$M^*(r,A) = \max_{j=0}^{m-1}\Big\{r\ \sqrt[m-j]{M(r,a_j)}\Big\}$$

und der l-fach iterierten Wachstumsordnung

$$\lambda^{(l)}(f) = \max\left\{0\ ,\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log_{l+1} M(r,f)}{\log r}\right\}\ ,\ l \in \mathbb{N}_0\ ,$$

gilt der

Satz: $\lambda^{(l)}(M^*(r,A)) = p \Longleftrightarrow \lambda^{(l+1)}(M(r,W)) = p$.

Dabei ist $p \in \mathbb{R}_+ \cup \{0,\infty\}$. Für $p = 1 = 0$ erhält man die klassische FUCHSsche Theorie.

J.L. CORNE : Attractivity of closed sets proved by using a family of Liapunov functions

The classical Liapunov theorem on asymptotic stability requires the negative definiteness of the derivative of the Liapunov function. MATROSOV (1968) and ROUCHE (1968) have generalized this result by using a function V whose derivative is only negative semidefinite and a second one W (scalar for MATROSOV and vector-valued for ROUCHE) which possesses certain properties near the "dangerous set" E, on which the derivative of V vanishes. These authors made no use of the theorems of LA SALLE (1960 and 1968) which claim that the solutions tend to $E \cup \{\infty\}$. In the autonomous case, we know furthermore that they tend to $M \cup \{\infty\}$, where M is the largest invariant subset of E, but in the general case, no further information can be known.

Here we use, instead of W, a family of functions (one for each point of the set E) which ensures the ejection of the solutions out of a neighbourhood of this set, that is, a certain "non-invariance" property. On the other hand, we study more precisely than LA SALLE the asymptotic behaviour of unbounded solutions.

So, we apply ideas and methods close to LA SALLE's ones to generalize the MATROSOV - ROUCHE's theorems, and thus permit a good comparison between the two theories.

L. FISCHER : Die Lösung eines Überwachungsspieles mit der Theorie der Differentialspiele

Definition "Differentialspiel":

$\dot{x}_i = f_i(t,x,u,v)$

$x(t_0) = x_0$

$u \in U \subset R^p$, $v \in V \subset R^q$ (U und V kompakt)

$$P(u,v) = g_{t_o}(x) + \int_{t_o}^{T} h(t,x(t),u(t),v(t))\,dt \, .$$

Beim Überwachungsspiel handelt es sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel. Im Gegensatz zum Verfolgungsspiel ist der Spieler E innerhalb eines Kreises um die Position von P. Der Spieler P versucht, die Entfernung zu E unterhalb der vorgegebenen Schranke d zu halten. Die Auszahlungsfunktion nimmt nur die Werte +1 und -1 an.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\dot{x} = -\frac{s_1\, y\, \mu}{R} + s_2 \sin\psi \ , \quad \dot{y} = \frac{s_1\, x\, \mu}{R} + s_2 \cos\psi - s_1$$

($s_{1,2}$ —— Geschwindigkeit von P,E; R —— minimaler Wenderadius; $-1 \leqq \mu \leqq +1$)

Die Lösung des Problems hat kein Analogon bei der Lösung von Verfolgungsspielen. Man kann das Gebiet angeben, wo die Überwachung von E durch P gesichert ist.

W. HAHN : Über die Funktionalgleichung $f'(qz) = a\,f(z)$ und verwandte Gleichungen

Analytische Lösungen der Funktionalgleichung

$$\sum_{j,k} a_{jk}\, f^{(j)}(zq^k) = 0 \ , \ 0 < q < 1 \ , \ a_{jk} \text{ reell oder komplex}$$
$$(j=0,1,\dots,r;\ s=0,1,\dots,s)$$

lassen sich durch komplexe Integrale

$$\int \frac{z^t}{\Gamma(t+1)} F(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \int \exp(q^v z)\, H(v)\,dv$$

vom "MELLINschen" bzw. "LAPLACEschen" Typ darstellen, ferner durch Reihen der Gestalt

$$z^{\gamma} \sum \frac{K_m}{\Gamma(\gamma+m+1)}\, z^m \quad \text{bzw.} \quad \sum K_m \exp(q^m z) \, .$$

Die MELLINschen Integrale und die Potenzreihen konvergieren, wenn überhaupt, für $z \neq 0$. Die LAPLACE-Integrale und die DIRICHLET-Reihen konvergieren, wenn überhaupt, in einer Halbebene oder überall. Während sich die Integrale über die Konvergenzgerade in die Vollebene analytisch fortsetzen lassen, ist für die DIRICHLET-Reihen die Konvergenzgerade oft natürliche Grenze. Bedingungen für Nichtfortsetzbarkeit lassen sich angeben.

J.K. HALE : Dissipative ordinary and functional differential equations

Let X be a Banach space, $T: X \longrightarrow X$ continuous and $T^{m+n} = T^m T^n$ for all integers $m, n \geqq 0$. The operator T is said to be dissipative if there is a bounded set $B \subset X$ such that for any $x \in X$, there are a neighborhood O_x of x and an integer $m = m(x)$ such that $T^n O_x \subset B$ for $n \geqq m(x)$. The purpose of this talk will be to discuss the asymptotic behavior of T and especially fixed points of T under the assumption of dissipativeness and other smoothness conditions on T. Applications to differential equations will be given.

H. HEROLD : Ein Vergleichssatz bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

Es wird ein Satz angegeben, der es gestattet, die Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit komplexwertigen Koeffizienten mit den Lösungen linearer Differentialgleichungen mit reellwertigen Koeffizienten zu vergleichen. Das Ergebnis läßt sich auf in einem Gebiet der komplexen Ebene gegebene lineare Differentialgleichungen übertragen.

Satz: In $[a,b)$ seien die komplexwertigen Funktionen $p_j(x)$ $(j = 1,\ldots,n\geqq 1)$ und $f(x)$ sowie die reellwertigen, nicht negativen Funktionen $P_j(x)$ und $F(x)$ stetig, wobei $|p_j(x)| \leqq P_j(x)$ und $|f(x)| \leqq F(x)$ gelte. Ist $v(x)$ eine Lösung von

$$v^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} p_j(x)\, v^{(n-j)} = f(x)$$

und $V(x)$ eine Lösung von

$$V^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} P_j(x)\, V^{(n-j)} = F(x) ,$$

für die

$$|v^{(k)}(a)| \leqq V^{(k)}(a) \qquad (k = 0,\ldots,n-1)$$

ist, so gilt in $[a,b)$

$$|v^{(k)}(x)| \leqq V^{(k)}(x) - D_k(x)$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

mit einem gewissen $D_k(x) \geq 0$.
Im Spezialfall $v^{(n)} - p(x)\, v = 0$, $p(x)$ reellwertig, sind Ergebnisse von H. RÜSSMANN und K. KREITH bekannt.

F. KAPPEL : Die direkte Methode Ljapunovs bei Funktional-Differentialgleichungen

Es wird die direkte Methode bei Funktional-Differentialgleichungen folgenden Typs betrachtet:

$$\dot{x} = f(x_t, t) .$$

Dabei ist $f: \Omega \times R^+ \longrightarrow R^n$ mit $\Omega \subseteq H = \{\varphi \mid \varphi : (-\infty, 0] \rightarrow R^n\}$.
Für die Hauptsätze der direkten Methode kommt man mit dem folgenden Begriff des Abstandes als Maß für die Abweichung von der trivialen Lösung $(f(0,t)=0)$ aus:

$$d: \Omega \longrightarrow R^+ \text{ mit } 0 \in \overline{\{d(\varphi) \mid \varphi \in \Omega\}} .$$

Wählt man für die Anfangswerte einer Lösung einen anderen Abstand d_a als für die Lösungspunkte, so ist die E-Stabilität (W.HAHN, 1966) ein Spezialfall der d_a, d-Stabilität für gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei

$$d_a(\varphi) = |\varphi(0)| + \int_{-\infty}^{0} E(|\varphi(u)|)\, du ,$$

$$d(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} E(|\varphi(u)|)\, du$$

gesetzt wird.
Im Vortrag wird auch eine sehr allgemeine Fassung des Invarianzprinzipes für autonome Gleichungen angegeben (SIAM J.Appl.Math. 19 ,1970).

H.-W. KNOBLOCH : Optimierungsprobleme mit eingeschränkten Zustandsvariablen

Es werden Kontrollprobleme betrachtet, die durch folgende Daten definiert sind:

1. eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x,u)$
   (x = Zustandsvariable , u = Kontrollvariable)
2. Randbedingungen $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$
   für die Trajektorie
3. eine Menge U
   (Kontrollbereich = Wertebereich für die Kontrollfunk-

tion u(t))

4. eine Einschränkung der Form $g(x) \leqq 0$ für die Zustandsvariable .

Es geht um notwendige Bedingungen vom Typ des Maximumprinzips, denen solche Lösungen zu genügen haben, die in Bezug auf ein durch ein Integral gegebenes Funktional optimal sind. Berichtet wird über einen Zugang zu diesem Problemkreis, der in der Dissertation von Frau PLATE im wesentlichen entwickelt worden ist und zu schärferen notwendigen Bedingungen als die bisher bekannten Methoden führt. Die Kenntnis dieser Bedingungen kann die Zahl der in den Multiplikatoren vorkommenden Parameter reduzieren, was an einem konkreten Beispiel (Steuerung eines Erzentladers) demonstriert werden soll.

H. KNOLLE : <u>Nachweis von periodischen Lösungen durch Fixpunktsätze der Funktionalanalysis</u>

Betrachtet wird das (n+m)-dimensionale System

$$x' = A\,x + f(x,y,t)$$

$$y' = B\,y + g(x,y,t) \;,$$

wo f und g periodisch in t sind. Die Existenz einer periodischen Lösung wird bewiesen für die Fälle

1. f und g wachsen langsamer als $r = \sqrt{|x|^2+|y|^2}$ für $r \rightarrow \infty$,
   f ist gerade in y ,oder g ist ungerade in y ;
2. f ist beschränkt , g hängt nur von x und t ab ;

A und B nicht-kritisch in beiden Fällen.

Es werden Sätze über den Abbildungsgrad in Banach-Räumen benutzt.

R. MANNSHARDT : <u>Fortsetzbarkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Unstetigkeitsflächen</u>

Die rechte Seite des Systems $\dot{x} = f(x,t)$ sei stetig mit Ausnahme gewisser Hyperflächen, auf denen f nicht definiert sei.

Die Lösungen x(t) des Systems sollen mit wachsendem t verfolgt werden, bis sie eine solche Hyperfläche erreichen. Jeder Punkt der Hyperfläche sei Endpunkt von Lösungen, aber kein Anfangspunkt für eine Lösung. Der Lösungsbegriff werde nun so erweitert, daß die Lösungen auf der Hyperfläche selbst fortgesetzt werden können. Zu diesem Zweck wird die Gestalt von f näher spezifiziert. Unter Voraussetzungen, die realen Verhältnissen (etwa bei elektronisch gesteuerten Regelungssystemen) entsprechen, läßt sich die Fortsetzbarkeit von Lösungen im erweiterten Sinn beweisen.

J. MAWHIN : Fixed point methods in the study of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations

For couples of mappings (L,N) between locally convex topological vector spaces with L linear and N not necessarily linear satisfying some assumptions not explicited here, we define a coincidence degree which can be set-valued but conserves most of the properties of LERAY-SCHAUDER degree and reduces to it when L = I and N is completely continuous. This theory furnishes a number of existence theorems for operator equations of the form

$$L\,x = N\,x\ .$$

One of these theorems is used to give a direct and unified proof for the following result due to HARTMAN in case (a) below and, under more restrictive conditions, to KNOBLOCH and to SCHMITT in case (b):

If $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,x,y) \longmapsto f(t,x,y)$ is continuous and satisfies the following conditions:

1) f verifies a NAGUMO-HARTMAN condition in y for $t \in [0,1]$ and $\|x\| \leq R$;

2) $\langle x,f\rangle + \|y\|^2 \geq 0$ if $\langle x,y\rangle = 0$ and $\|x\| = R$, then

a) the boundary value problem: $x'' = f(t,x,x')$, $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$ $(|x_0|, |x_1| \leq R)$;

b) the periodic boundary value problem : $x'' = f(t,x,x')$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$,

has at least a solution x such that $\|x(t)\| \leq R$ $\forall$ $t \in [0,1]$.

C. OLECH : On global asymptotic stability on the plane

The following old problem will be discussed: for an autonomous system on the plane assume that at each point the characteristic roots of the Jacobian matrix have negative real parts and that the system admits a singular point. Is then this singular point asymptotically stable in the large?

R. RAUTMANN : Ein Lösungsoperator für gewöhnliche Differentialgleichungen

Bei geeigneter Festlegung der Funktionenklasse C^E existiert zu jedem Richtungsfeld $v \in C^E$ die eindeutig bestimmte allgemeine Lösung $Y(t,s,y_s)$ der Anfangswertaufgabe

$$(D) \quad \frac{dy}{dt} = v(t,y) \quad \text{für } t \in J = [0,a] \;,\; a > 0 \;,$$
$$y = y_s \quad \text{für } t = s \;,\; (s,y_s) \in J \times A \;.$$

Die Vektorfunktion $Y = L\,v$ ist auf $J \times J \times A$ mit Werten in A erklärt und stellt für jedes $v \in C^E$ den Wert einer durch (D) auf C^E definierten Abbildung L (des "Lösungsoperators") dar. Unter Verwendung bekannter Ergebnisse aus der Theorie der Differentialgleichungen (WALTER , JUNGERMANN , OLECH , WAŻEWSKI) und eines neuen Resultats von REDHEFFER lassen sich Klassen C^E angeben, wenn A ein Banach-Raum ist oder eine abgeschlossene Teilmenge eines Hilbert-Raumes H, die zu jedem Punkt von H mindestens einen nächsten Punkt enthält und eine Fortsetzbarkeitsbedingung erfüllt. Teilmengen A des Euklidischen R^n genügen der Fortsetzbarkeitsbedingung nach einem Satz von MC SHANE und WHITNEY. Eine Anwendung finden diese Ergebnisse z.B. bei speziellen Anfangswertaufgaben der Hydromechanik.

L. REICH : Analytische Differentialsysteme und kontrahierende biholomorphe Abbildungen

Von O. GÖTZ (Math.Ann. 172) und unabhängig vom Ref. wurde gezeigt, daß einer lokal-konformen Abbildung

$$z \longrightarrow w(z) = \lambda z + c_2 z^2 + \ldots$$

i.allg. kein autonomes analytisches Differentialsystem

$$\frac{dW}{dt} = b_1 W + b_2 W^2 + \ldots \;,\; b_1 \neq 0 \;,$$

in folgender Weise zugeordnet werden kann:

Für das allgemeine Integral $W(t,z)$ mit dem unbestimmten Anfangswert z, d.h. für das $W(0,z) = z$ gilt, ist überdies

$$W(1,z) = w(z) = \lambda z + c_2 z^2 + \ldots ,$$

sofern man die Konvergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty b_\nu W^\nu$$

fordert. Von E. PESCHL und dem Ref. wurde darüber hinaus ein Beispiel konstruiert (Bayer.Akad.Wiss. 1971), daß einem Potenzreihenvektor

$$z^{(1)} = A z + \mathcal{P}(z) \quad \text{— } A \text{ eine konstante } n,n\text{-Matrix},\quad z = {}^t(z_1, \ldots, z_n),\quad \operatorname{ord} \mathcal{P}(z) \geqq 2$$

i.allg. nicht einmal ein formales Differentialsystem im obigen Sinne zugeordnet werden kann. Demgemäß ergibt sich das Problem:

Man finde ein Kriterium dafür, daß es zu einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung

(1) $\quad z \longrightarrow z^{(1)} = A z + \mathcal{P}(z)$

analytische Differentialsysteme

(2) $\quad \dfrac{dZ}{dt} = B Z + \mathcal{Q}(Z)$

gibt, so daß für deren allgemeines Integral $Z(t,z)$ mit $Z(0,z) \equiv z$ überdies gilt

(3) $\quad Z(1,z) = A z + \mathcal{P}(z)$,

d.h. der "Randwert" für $t = 1$ sei der vorgegebene Potenzreihenvektor der kontrahierenden Abbildung.

Es wird gezeigt:

I) Es existiert ein algebraisches Kriterium, d.h. die Existenz eines Systems (2) wird durch das Verschwinden gewisser endlich vieler Polynome in den Koeffizienten von $\mathcal{P}$ bis zu einer festen Ordnung und gewissen Parametern beschrieben. Die Parameter sind Punkte einer affinen algebraischen Mannigfaltigkeit.

II) Die zu (1) mit (3) gehörigen Systeme (2) bilden in einem präzisierbaren Sinn ein affines algebraisches System.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Diese Ergebnisse folgen sofort aus Sätzen des Ref. über die sogenannte analytische Iteration kontrahierender biholomorpher Abbildungen (Berichte der GMD Bonn, 42, 1971).

R. REISSIG : Periodische Lösungen bei einigen nichtlinearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

Für die Differentialgleichung

$$x''' + \psi(x')\, x'' + \varphi(x)\, x' + \theta(t,x,x',x'') = p(t) ,$$

in der die Funktionen ψ , φ , θ und p in t ω-periodisch seien, wird unter den folgenden Bedingungen die Existenz wenigstens einer ω-periodischen Lösung nachgewiesen:

(i) $\int_0^{x_2} \psi(\xi)\, d\xi \ \mathrm{sgn}\, x_2 \to \infty$ für $|x_2| \to \infty$

(ii) $|\theta(t,x_1,\dots)| \leqq F$, $\theta(t,x_1,\dots)\ \mathrm{sgn}\, x_1 \geqq 0$ $(|x_1| \geqq h)$

(iii) $\left| \int_0^{x_1} \varphi(\xi)\, d\xi - b\, x_1 \right| \leqq M$ (b positive Konstante)

(iv) $\int_0^{\omega} p(t)\, dt = 0$.

Etwas stärkere Bedingungen benutzte EZEILO zum Beschränktheitsbeweis.
Der Existenzbeweis für periodische Lösungen stützt sich auf das LERAY-SCHAUDER-Prinzip in Zusammenhang mit ungeraden Vektorfeldern (vgl. G.GÜSSEFELDT, Math.Nachr. 48, 1971).

Die obigen Bedingungen können in verschiedener Weise modifiziert werden. Auf die Beschränktheit von θ kann man verzichten, wenn in dieser Funktion nur x als unabhängige Veränderliche vorkommt. Dabei muß aber

$$b < 4\pi^2 / \omega^2$$

vorausgesetzt werden.
Im Sonderfall

$$\psi(x) = a \neq 0$$

genügen die Annahmen

$$\theta(x)/x \to 0 \quad (|x| \to \infty) ,$$
$$\theta(x)\ \mathrm{sgn}\, x \geqq 0 \quad (|x| \geqq h)$$
und (iv) .

W. SCHEMPP : Zur Theorie der L_m - Splines

Es bezeichne I ein offenes, relativ kompaktes Teilintervall der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$, ω eine endliche Unterteilung von $\bar{I}$ und L_m einen gewöhnlichen linearen Differentialoperator m-ter Ordnung ($m \geqq 1$) mit nicht notwendig konstanten, aber hinreichend glatten Koeffizientenfunktionen. Es wird der Begriff des L_m- Splines zur Unterteilung ω erläutert, ein Abriß der Theorie der reellen Spline - Systeme gegeben und gezeigt, wie sich mit Hilfe dieser (funktionalanalytischen) Theorie die Minimaleigenschaften der interpolierenden L_m - Splines gewinnen lassen.

G. VILLARI : Einige Bemerkungen über die Existenz periodischer Lösungen für eine Klasse nichtlinearer Gleichungen dritter Ordnung

Die Überlegungen dieser Mitteilung wurden durch den Vortrag von R.REISSIG angeregt. Wir betrachten die Gleichung

$$(1) \quad x''' + f(x')\, x'' + g(x)\, x' + h(x) = p(t) \;,$$

wo f , g , h , p stetige Funktionen ihrer Argumente seien und $p(t+\omega) = p(t)$, $\omega > 0$ gelte. Nach der LERAY-SCHAUDER-Methode soll die Existenz harmonischer periodischer Lösungen bewiesen werden.

Dazu betrachtet man einen geeigneten Banach-Raum B, dessen Elemente Funktionen der Klasse $C^2[0,\omega]$ mit periodischer Randbedingung sind. Dort wird in der folgenden Weise eine vollstetige Abbildung

$$T_\lambda : \; u(t) \longrightarrow T_\lambda\{u(t)\} = x_{(\lambda,u)}(t) \;, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

definiert:

x(t) sei die eindeutig bestimmte ω -periodische Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$(2) \quad x''' + a\, x' + b\, x = \varphi[t,u(t)] \;,$$

$$\varphi[t,u(t)] = \lambda\{a\, u' + b\, u - f(u')u'' - g(u)u' - h(u) + p(t)\}$$

$$(b \neq 0) \;.$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind für $\lambda = 1$ die gesuchten periodischen Lösungen der Gleichung (1); für $\lambda = 0$ gibt es genau einen Fixpunkt: $u(t) \equiv 0$.

Bekanntlich existiert zu jedem Parameterwert λ wenigstens ein Fixpunkt, wenn man für $\lambda \in [0,1)$ eine a priori-Abschätzung der

Fixpunkte verifizieren kann. Dieses Problem wird unter den folgenden Bedingungen gelöst:

(i) $g(x) \leqq a < 0$

(ii) $\| g(x) \| \leqq M$

(iii) $\lim_{|x| \to \infty} h(x) \operatorname{sgn} x = + \infty \; (- \infty)$

Zu dem Zweck leitet man für die Elemente $u(t) = T_\lambda \{u(t)\}$, $0 \leqq \lambda < 1$, die Abschätzungen her:

$$\int_0^\omega u''^2 \, dt < L ,$$

$$|u'(t)| < m , \quad 0 \leqq t \leqq \omega ,$$

$|u(t)| > \alpha$ für $t \in [0,\omega]$, falls an einer Stelle $\tau \in [0,\omega]$ $|u(\tau)| > \beta(\alpha)$ ($\alpha > 0$ beliebig vorgegeben).

Die letzte Beziehung führt wegen

$$(1 - \lambda) \, b \int_0^\omega u \, dt + \lambda \int_0^\omega [h(u) - p(t)] \, dt = 0$$

zu einer Abschätzung für u(t), wenn man eine positive (negative) Konstante b verwendet.

J. WERNER : Positive Lösungen nichtlinearer Randwertaufgaben und Integrodifferentialgleichungen

Es werden Einschließungssätze für nichtlineare gewöhnliche Randwertaufgaben benutzt, um nichtlineare Sturm-Liouville-Probleme zu untersuchen. Mit Hilfe eines Satzes von SHAMPINE kann durch Konstruktion geeigneter Unter- und Oberlösungen ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz von RABINOWITZ (J.Diff. Equ.9, 1971) einfacher bewiesen und abgeschwächt werden. Neben der von RABINOWITZ betrachteten Aufgabe

$$L[y] = \lambda(g - f(x,y)) \, y , \quad R[y] = \theta$$

wird auch

$$L[y] + y \, f(x,y) = \lambda \, g \, y , \quad R[y] = \theta$$

untersucht. Unter geeigneten Voraussetzungen kann ein λ-Intervall angegeben werden, für welches diese Aufgaben genau eine im Innern des zugrundegelegten Intervalls positive Lösung haben. Zum Schluß wird die Aufgabenstellung erweitert auf Integrodifferentialgleichungen der Form

$$L[y] + y \int_a^b f(y(x),y(s),x,s)\, ds = \lambda g y \quad , \quad R[y] = \theta \quad .$$

C.-C. YANG : On meromorphic solutions of the Poincaré equation

The paper is mainly concerned with the growth of the meromorphic function u(z) which satisfies the Poincaré equation:

(*) $u(\lambda z) = h(u(z))$

where h is a given meromorphic function and λ is a constant with $|\lambda| > 1$.

The following two results have been obtained:

Theorem 1. Let h(z) be a given non-rational meromorphic function of zero order. Then any entire function which satisfies equation (1) has lower order equal to infinity.

Theorem 2. Let h(z) be a rational function of weight n ($n \geqq 2$), Suppose that u(z) is a meromorphic function of order ϱ ($0 \leqq \varrho \leqq +\infty$) which satisfies equation (*). Then ϱ must be finite and equal to $\log n / \log|\lambda|$.

R. Reißig (Bochum)