MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 14/1972

Distributionen und partielle Differentialgleichungen

3.4. bis 7.4.1972

Unter Leitung von Prof. J. Wloka fand im Oberwolfacher Institut erstmalig eine Tagung über Distributionen und partielle Differentialgleichungen statt.

Teilnehmer

G. Bengel, Kaiserslautern

Ch.Ch. Chou, Perpignan

J. Cioranescu, Bukarest

M. Cirnu, Bukarest

K. Deimling, Karlsruhe

K. Floret, Kiel

B. Gramsch, Kaiserslautern

O.v. Grudzinski, Kiel

A. Körner, Kiel

P. Kosmol, Kiel

R. Meise, Mainz

R. Redheffer, Los Angeles

J. Schmets, Liege

E. Schock, Bonn

J. Weidmann, Frankfurt

J. Wloka, Kiel

M. Wriedt, Kiel

Z. Zieleszny, Amhurst, N. Y.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

WLOKA, J.: Einige Eigenschaften der Convolutionsoperatoren

Die Harnacksche Ungleichung $\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right| \leq \frac{\sup\limits_{|z'| \leq 4R} |F(z+z')| \sup\limits_{|z'| \leq 4R} |G(z+z')|}{\sup\limits_{|z'| \leq R} |G(z+z')|^2}$

(F,G und $^F/G$ holomorph, $0 \leq R$ beliebig) wird benutzt, um die Existenz einer Elementarlösung E, $f * E = \delta$, bei Convolutionsgleichungen nachzuweisen (hier ist $f \in \mathcal{E}'(R^r)$, so daß $\hat{f}$ slowly decreasing). Falls $\hat{f}(z)$ der sog. verallgemeinerten Malgrange'schen Ungleichung genügt: $f \in (M)$, kann man zeigen, daß die Elementarlösung E gewisse Regularitätseigenschaften hat. Zu (M) gehören z.B. $P(D)\delta(x)$, $\sum_{j=1}^{n} P_j(D)\delta(x-a_j)$. Auch sind für $f \in (M)$ die folgenden Abbildungen surjektiv $f*: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $f*: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $f*: \mathrm{Exp} \rightarrow \mathrm{Exp}$, und die Exponentialpolynomiallösungen liegen dicht in ker $f*$ in den Topologien von $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, Exp und $\mathcal{D}'$.

CHOU, Ch.Ch.: Sur l'inversibilité des opérateurs d' ordre infini et applications

Nous donnons une condition suffisante d'inversibilité des opérateurs de convolution dans l'espace des ultradistributions construites sur une classe de fonctions non quasianalytiques. D'une facon précise, si $t \mapsto M(t,\dots,t) \geq 0$ est une fonction décroissante telle que $\int_0^{+\infty} \frac{M(t,\dots,t)}{1+t^2}\,dt < +\infty$, alors $S \in \mathcal{E}'$ sera inversible si $\sup\limits_{|z| \leq M(x)} |\hat{S}(x+z)| \geq \mathrm{Exp}(-AM(x))$, $x \in R^n$, où A est une constante. Nous montrons ensuite que tous les operateurs d'ordre infini d'une classe de Gevrey sont inversibles dans une classe de Gevrey. Comme application, en utilisant ces operateurs, on construit un $\varphi \in \mathcal{D}$ inversible dans une classe d'ultradistributions de Gevrey, on montre de même que $\mathcal{D}(R^n) * \mathcal{E}(R^n,F) = \mathcal{E}(R^n,F)$ pour tout espace de Fréchet F.

ZIELEZNY, Z.: Hypoellipticity with respect to differential operators

Let Ω be an open set in R^n. A distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ is said to be strongly regular with respect to the differential operator $Q(D)$ if for every open set $\Omega' \subset\subset \Omega$ there exists an integer $m \geqslant 0$ such that $Q^k(D)T$, $k = 0,1,\ldots$, are all of order $\leqslant m$ in Ω'. Let $\mathcal{E}_Q(\Omega)$ be the linear space of all distributions in Ω which are strongly regular with respect to $Q(D)$.

A differential operator $P(D)$ is called Q-hypoelliptic, if, for any open set $\Omega \subset R^n$, every solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ of the equation

$$P(D)u = 0$$

is in $\mathcal{E}_Q(\Omega)$.

TH.1. $P(D)$ is Q-hypoelliptic if and only if there are constants γ, $C > 0$ such that

$$|Q(\zeta)|^{\gamma} \leqslant C(1+|\mathrm{Im}\,\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \; P(\zeta) = 0.$$

Th.2. The following conditions are equivalent:

1° $\mathcal{E}_P(\Omega) \subset \mathcal{E}_Q(\Omega)$, Ω nonempty, open set

2° $Q(\zeta)$ is bounded on every set $N(P,a) \cap V_b$ where $N(P,a) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |P(\zeta)| \leqslant a\}$ and $V_b = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\mathrm{Im}\,\zeta| \leqslant b\}$

3° For any $a \geqslant 0$ there are constants $C, h > 0$ such that

$$|Q(\zeta)|^{h} \leqslant C(1+|\mathrm{Im}\,\zeta|) \quad \text{for } \zeta \in N(P,a)$$

4° For any $b \geqslant 0$ there are constants $C', h' > 0$ such that

$$|Q(\zeta)|^{h'} \leqslant C'(1+|P(\zeta)|) \quad \text{for } \zeta \in V_b$$

WEIDMANN, J.: Störungen elliptischer Differentialoperatoren

Sind V und T Operatoren in $L_2(R^m)$, so heißt V T-klein im Unendlichen, wenn $D(T) \subset D(V)$ gilt und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r(\varepsilon) \geq 0$ existiert mit $\|f\| \leq \varepsilon(\|f\| + \|Tf\|)$ für alle $f \in D(T)$ mit $f(x) = 0$ f.ü. in $\{x \in R^m; \ |x| \leq r(\varepsilon)\}$; z.B. ist jeder T-kompakte Operator T-klein im Unendlichen. Ist T ein wesentlich selbstadjungierter Operator der Gestalt eines Schrödingeroperators und V symmetrisch und T-klein im Unendlichen, so gilt $\sigma_W(T) \subset \sigma_W(T+V)$ [σ_W = wesentliches Spektrum]. Ist auch T+V ein Schrödingeroperator, so gilt $\sigma_W(T) = \sigma_W(T+V)$; dies gilt noch für einige weitere Spezialfälle. Diese Resultate erlauben Störungen durch Operatoren der gleichen Ordnung wie die des ungestörten Operators und auch durch nicht-lokale Operatoren.

DEIMLING, K.: Absolutstetige Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen

Für das Darboux-Problem

(*) $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$,

$u(x,0) = \sigma(x)$, $u(0,y) = \tau(y)$, $(x,y) \in I \subset R^2$

existiert mindestens eine Lösung, absolutstetig in I im Sinne Carathéodorys, wenn $f(x,y,z,p,q)$ meßbar in (x,y) und stetig in (z,p,q) ist und einer Lipschitzbedingung in (p,q) genügt; τ und σ sind absolut stetig mit $\sigma(0) = \tau(0)$. Es ist immer noch offen, ob das Problem eine absolutstetige Lösung hat, wenn f keiner Eindeutigkeitsbedingung bezüglich p und q genügt. Für das allgemeine Goursat-Problem (*), $u(x,\alpha(x)) = \sigma(x)$, $u(\beta(y),y) = \tau(y)$ gilt folgender Existenzsatz: $|f(x,y,z)| \leq M(1+|z|)$, meßbar in (x,y), stetig in z; $\sigma(0) = \tau(0)$, σ und τ Lipschitz-stetig; $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha\uparrow$, $\beta\uparrow$, α Lipschitz-stetig, β absolutstetig und $\gamma(x) := \beta(\alpha(x))$ genügt der Bedingung $|\gamma(x)-\gamma(x')| \leq k|x-x'|$ mit

$0 < k < 1$; dann hat das G.-Problem eine absolutstetige Lösung. Ist eine der Bedingungen verletzt, so gibt es Gegenbeispiele. Sie hängen zusammen mit der Existenz integrierbarer Lösungen einer Funktionalgleichung der Form $\varphi(x) = g(x) + \varphi(\gamma(x))\gamma'(x)$, mit integrierbarem g.

GRAMSCH, B.: Ein Zerlegungssatz für verallgemeinerte Resolventen

Die Lösung des Cousin-I-Problems für (F)-Raum wertige Funktionen (Bungart 1964) wird auf den Fall von Funktionen mit Werten in vollständigen metrischen Vektorräumen übertragen. Dabei werden Ergebnisse aus der Integrationstheorie bzw. der Theorie topologischer Tensorprodukte nicht notwendig lokalkonvexer Räume verwendet. Es ergibt sich folgender

Satz: Sei T(z) eine analytische Operatorfunktion mit Werten in der Menge der Semifredholm-Operatoren eines Hilbertraumes H; ferner sei T(z') für ein z' aus dem Holomorphiegebiet $G \subset \mathbb{C}^N$ injektiv. Dann gibt es eine meromorphe Linksinverse M(z) auf G, die eine globale Zerlegung M(z)=A(z)+S(z) hat, wobei A(z) auf G analytisch und S(z) Werte in dem Ideal $\mathcal{J} = \bigcap_p 1^p(H)$ hat. ($\mathcal{J}$ ist nicht lokalkonvex).

Einige Erweiterungen und Verschärfungen dieses Satzes werden behandelt.

CIORANESCU. J.: Sur les semigroupes distributions et ultradistributions

On présente les suivants résultats sur les semi-groupes distributions et ultradistributions (de Lions) obtenus par le conférencier:

I. L'opérateur A, fermé, à Domaine dense dans l'espace de Banach E, est le générateur d'un semi-groupe distribution d'ordre fini ω

de croissance, $1 < \omega < +\infty$, si et seulement si $R(\lambda;A)$ existe pour λ dans une region logarithmique de dégré $< l = \frac{\omega - 1}{\omega}$, définie par:

$$\Lambda = \{\lambda = \xi + i\eta \mid \xi \geq (\alpha \ln|\eta| + \beta)^{l}, \xi \geq \xi_0\}, \quad \alpha, \xi_0 \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$$

et y vérifie une majoration du type: $\|R(\lambda;A)\| \leq \mathrm{pol}(|\lambda|)$, un résultat que généralise celui de C.Foias pour le cas des semi-groupes distributions d' opérateurs normaux dans un espace de Hilbert, d'ordre fini de croissance.

II. On donne un théorème d'approximation dans l'espace des distributions temperées à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, d'un semi-groupe distribution d'ordre fini de croissance par des séries de puissance.

III. On présente un théorème de type Hille-Yoshida pour les semi-groupes distributions, holomorphes.

IV. On donne un théorème du même type pour les semi-groupes ultradistributions, avec applications aux équations d'évolution en ultradistributions.

V. On étudie un semi-groupe distribution particulier, généralisant le semi-groupe des translations, à l'aide duquel on obtient une généralisation d'une inégalité de Landau-Kallman-Rota.

MEISE, R.: <u>Stetige Funktionen und Distributionen mit Werten in topologischen Vektorräumen</u>

Ist E ein vollständiger topologischer Vektorraum, so definiert man die E-wertigen Distributionen als $L_b(\mathcal{D}, E)$. Dieser Raum stimmt überein mit $E \check{\otimes}_\varepsilon \mathcal{D}'_b$ und mit $E \,\varepsilon\, \mathcal{D}'_b$. Aus einer neuen Beschreibung für $E \check{\otimes}_\varepsilon C(\mathbb{R}^N)$, die von Bierstedt und dem Verf. gegeben wurde, folgt leicht, daß die Funktionen in $E \check{\otimes}_\varepsilon C(R^N)$ E-wertige Distributionen definieren. Auch für die Definition der holomorphen E-wertigen Funktionen werden neue Gesichtspunkte aufgewiesen. Die Distributionen

in $L_b(\mathcal{E}(\mathbb{R}^N),E)$ bzw. $L_b(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N),E)$ lassen sich durch "Randwerte" geeigneter holomorpher E-wertiger Funktionen darstellen.
Für gewisse Distributionen lassen sich ähnlich wie für lokalkonvexe E Darstellungen als endliche Ableitungen stetiger Funktionen angeben, obwohl nicht jede stetige E-wertige Funktion auf $\mathbb{R}^N$ eine E-wertige Distribution zu definieren braucht.

FLORET, K.: Eine Bemerkung über getragene analytische Funktionale

Jedes von einer kompakten Menge $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ (Ω offen) getragene analytische vektorwertige Funktional auf Ω ist darstellbar durch ein lokales analytisches Funktional auf K.

BENGEL, G.: Der Vorbereitungssatz von Malgrange und Division von Distributionen

Anknüpfend an die Arbeiten von Wall, Mather, Nirenberg, Lojasiewicz und Glaeser (Liverpool Symp. on Singularities, LN 192) gibt der Verf. mit Hilfe der Darstellung einer Funktion $\varphi \in C_0^\infty$ als Randwert holomorpher Funktionen einen einfachen Beweis des Malgrange'schen Divisionssatzes und leitet daraus den Vorbereitungssatz für differenzierbare Funktionen auf die übliche Weise ab (s. B. Malgrange, Ideals of differentiable functions). Diese Sätze ermöglichen einen einfachen Beweis für die Möglichkeit, Distributionen durch reell-analytische Funktionen zu dividieren. Die Ungleichung von Lojasiewicz wird dabei nicht benutzt.

CIRNU, M.: Some aspects of the Composability Theory

A product for functions with functional values is given. It contains, as special cases, the convolution of the linear functionals, defined by J.D. Weston, E. Hewitt, and H.S. Zuckerman, the Volterra product (for kernels), the weak integral and the Fourier and Laplace transformations. The form of the linear (continuous) operators from a (topological) vector space E to a (topological) vector space of functions F is given, with the aid of this product. Also, the form of the linear (continuous) operators, permutable with the translations, is given, with the aid of the convolution of the linear (continuous) functionals. The Laplace tranformation for $(\mathcal{D},\mathcal{D})$-composable distributional functions is defined and some of its properties are presented. As an Appendix, the form of the linear functionals on a vector space of functions, invariant to translations, is given if the space verifies some conditions.

SCHMETS, J.: Quelques propriétés de l'espace $C_s(X)$, applications à $C_c(X)$ et $C_b(X)$

Soit X un espace complètement régulier et séparé. Nous notons C(X) l'espace des fonctions continues sur X, que nous identifions systématiquement a $C(\upsilon X)$, où υX est le repleté de X. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties finies (resp. compacte, bornées) de X, nous le notons $C_s(X)$ resp. $C_c(X)$, $C_b(X)$.
Nous établissons les résultats suivants:

Thm.1. L'espace $C_s(X)$ est un espace faible, toujours évaluable.

Thm.2. L'espace $C_c(\mu X)$ est l'espace tonnelé associé à $C_s(X)$; $C_s(X)$ est donc tonnelé si et seulement si tout borné de X est fini.

Thm. 3. L'espace $C_s(\upsilon X)$ est l'espace bornologique associé à $C_s(X)$; $C_s(X)$ est donc bornologique si et seulement si X et replét.

Thm. 4. L'espace $C_c(\upsilon X)$ est l'espace ultrabornologique associé à $C_s(X)$; $C_s(X)$ est donc ultrabornologique si et seulement si X est un espace replét où tout borné est fini.

Les techniques qui permettent d'établir le théorème 3 donnent une methode pour atteindre les espaces bornologiques associés à $C_c(X)$ et $C_b(X)$, répondant ainsi à une question de Buchwalter. Ce travail a été fait en commun avec Buchwalter.

SCHOCK, E.: Permanenzklassen nuklearer Räume

Eine Permanenzklasse π ist eine Klasse von lokalkonvexen Räumen, die abgeschlossen ist unter der Bildung von (1) Vervollständigungen, (2) Teilräumen, (3) separierten Quotienten, (4) beliebigen Produkten, (5) abzählbaren direkten Summen, (6) projektiven Tensorprodukten und (7) isomorphen Bildern. Ist E ein lokalkonvexer Raum, so sei $\pi(E)$ die kleinste E enthaltende Permanenzklasse.

Beispiel: Sei Φ die Klasse aller stetigen monotonen subadditiven Funktionen $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ mit $\varphi(0) = 0$. Für $\varphi \in \Phi$ ist die Klasse N_φ aller φ-nuklearen Räume eine Permanenzklasse (Rosenberger) [E heißt φ-nuklear, wenn für alle Nullumgebungen U eine Nullumgebung V existiert mit $\sum_n \varphi(\delta_n(V,U)) < \infty$].

Ist Ω die Klasse aller Räume mit maximaler diametraler Dimension, d.h. für jede positive Zahlenfolge (δ_n) und jede Nullumgebung U gibt es eine Nullumgebung V mit $\lim_{n\to\infty} \delta_n(V,U)\,\delta_n^{-1} = 0$, so gilt $\Omega = \bigcap_{\varphi\in\Phi} N_\varphi$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die kleinste (nicht triviale) Permanenzklasse ist π (R). $\pi(\mathbb{R})$ ist die Klasse aller Teilräume aller beliebigen Produkte von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$. $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \in \Omega$. Sei $E \in \Omega$. $E \in \pi(\mathbb{R})$ genau dann, wenn eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ existiert, so daß für alle p_U, $U \in \mathfrak{U}$, $E/_{\ker p_U}$ bornologisch ist. Schließlich ist, wenn E ein (F)-Raum ist, $E \in \pi(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow E_b' \in \pi(\mathbb{R})$.

O. v. Grudzinski (Kiel)