MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 16/1972

Mathematische Logik

16.4. bis 22.4.1972

Unter Leitung von Prof.Dr.H.Hermes (Freiburg i.Brsg.) und Prof.Dr.K.Schütte (München) fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über mathematische Logik statt. Wie in vorangegangenen Jahren waren zahlreiche ausländische Gäste erschienen.

Das Spektrum der behandelten Themen war sehr breit und dürfte am besten aus den Vortragszusammenfassungen deutlich werden, wie sie hier unten in der Reihenfolge der Vorträge aufgeschrieben sind. (Da Herr W.Marek aus Warschau unerwarteterweise an der Tagung nicht teilnehmen konnte, wurde sein Vortrag von Herrn Felgner vorgelesen.)

Am 19.4.1972 fand abends eine Mitgliederversammlung der DVMLG statt.

Teilnehmer

E.Agazzi, Genua
J.Bammert, Freiburg
P.Bernays, Zürich
W.Bibel, München
E.Börger, Münster
B.Buchberger, Innsbruck
D.van Dalen, Utrecht
J.Diller, München
H.-D.Ebbinghaus, Freiburg
U.Felgner, Heidelberg
W.Felscher, Freiburg
H.E.Fenstad, Oslo
R.Fraissé, Marseille
K.Heidler, Freiburg
H.Hermes, Freiburg
W.Hodges, London
P.Janich, Konstanz
F.Kambartel, Konstanz
B.J.Koppelberg, Bonn
S.Koppelberg, Bonn
P.Krauss, Heidelberg
H.Läuchli, Zürich
H.Luckhardt, Marburg
A.Menne, Bochum

G.H.Müller, Heidelberg
A.Oberschelp, Kiel
W.Oberschelp, Aachen
H.Osswald, München
Th.Ottmann, Münster
Ch.Parsons, Heidelberg
H.Pfeiffer, Hannover
K.-P.Podewski, Hannover
W.Pohlers, München
K.Potthoff, Kiel
M.Pouzet, Lyon
A.Prestel, Bonn
A.Preller, Marseille
M.Richter, Tübingen
K.Schütte, München
W.Schwabhäuser, Bonn
J.C.Shepherdson, Bristol
D.Siefkes, Heidelberg
E.Specker, Zürich
H.Ströbel, Göttingen
W.W.Tait, Aarhus
Ch.Thiel, Aachen
M.Ziegler, Köln
J.Zucker, Amsterdam

Vortragsauszüge

Felgner, U.: Die Unabhängigkeit des BPI vom Ordnungserweiterungssatz OE.

Sei BP I das Boolesche Primidealtheorem, OE die Aussage "Jede partielle Ordnung kann zu einer linearen Ordnung erweitert werden", OTh das Ordnungstheorem "Jede Menge hat eine lineare Ordnung" und sei AC das Auswahlaxiom. Bekanntlich gilt (in ZF) AC→BPI→OE→OTh. A.R.D. Mathias zeigte, dass OE nicht aus OTh folgt und J.D. Halpern und A.Lévy zeigten, dass AC nicht aus BPI folgt. Die bisher offene Frage, ob BPI aus OE folgt, haben wir negativ beantwortet.

Satz: Jedes abzählbare Standard-Modell $\mathfrak{M}$ von ZF+V=L kann zu einem abzählbaren Standard-Modell $\mathfrak{N}$ von ZF+OE+¬BPI erweitert werden. In $\mathfrak{N}$ gilt die Kinna-Wagnersche Form des Auswahlprinzipes, nicht aber AC^{ω}. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ haben dieselben Kardinalzahlen.
Der Beweis verwendet eine Variante der Cohenschen Forcing Methode.

Börger, E.: Entscheidungsprobleme für Klassen von Kromformeln

a_i resp. b_i bezeichnen abgeschlossene Hornformeln der engeren Prädikatenlogik in konjunktiver Präfixnormalform mit nur den Prädikatensymbolen $K_0,\ldots,K_r$ (resp. für 1. zusätzlich beliebig vielen einstelligen Prädikatenzeichen) bei geeignet und für das Folgende fest gewähltem r. Wir konstruieren: 1.) Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck c Kromformeln b_i, a_i $(1 \leq i \leq 3)$ mit Präfixen AEEA, AE...EA, sodass c genau dann erfüllbar ist, wenn a_1, b_1 durch antisymmetrische und antitransitive, a_2, b_2 durch disjunkte, a_3, b_3 durch reflexive Relationen erfüllbar ist; 2.) Kromformeln a_i und Ausdrücke b_i $(1 \leq i \leq 4)$ mit nur einer dreistelligen neben sonst nur zweistelligen Alternationen und Präfixen EA, AEA, EAEA, AEEA resp., sodass mit den Definitionen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$d_n \equiv Az_o \dots Az_{n+1}(K_o z_o z_1 \wedge \bigwedge_{0<j<n} K_1 z_j z_{j+1} \wedge K_2 z_n z_{n+1} \rightarrow K_3 z_n z_{n+1})$ und $e_n \equiv Ez_o \dots Ez_n(K_o z_o z_o \wedge \bigwedge_{j<n} K z_j z_{j+1} \wedge K_2 z_n z_n)$ ein bel. c genau dann erfüllbar ist, wenn $a_1 \wedge a_2 \wedge d_{\bar{c}}$ resp. $a_i \wedge d_{\bar{c}}$, $b_1 \wedge b_2 \wedge e_{\bar{c}}$, $b_i \wedge e_{\bar{c}} (i=3,4)$ erfüllbar ist, wobei $\bar{c}$ eine Gödelnummer von c ist. Der mit den d_n angegebene Reduktionstyp ist scharf, weil für jedes endliche Präfixwort Π und alle nat. Zahlen $k, k_1, \dots, k_n$ die Klasse aller pränexen angeschlossenen Ausdrücke der eng. PL mit Alternationen höchstens der Länge k bei konj. Normalf. des Kerns und höchstens k_i Prädikatenkonstanten der Stellenzahl i $(1 \leq i \leq n)$ entscheidbar ist bzgl. Erfüllbarkeit. Die Klasse aller pränexen abgeschlossenen Kromformeln der eng. PL mit Präfix AEA...A und nur ein- und zweistelligen Prädikatensymbolen hat ebenfalls ein rekursiv lösbares Entscheidungsproblem.

Koppelberg, S.: Einige Klassen projektiver Boolescher Algebren.

Eine Boolesche Algebra (BA) A heisst projektiv, wenn für je zwei BAen B, C, jeden Epimorphismus $p: B \twoheadrightarrow C$ und jeden Homomorphismus $f: A \rightarrow C$ ein Homomorphismus $g: A \rightarrow B$ existiert mit $p \circ g = f$. Halmos zeigte, dass die Klasse P der projektiven Booleschen Algebren die Klasse K_o der abzählbaren BAen umfasst und unter Coprodukten und endlichen Produkten abgeschlossen ist. - P ist auch unter abzählbaren schwachen Produkten abgeschlossen, die durch $\prod^{\omega}_{n \in \omega} A_n = \{a \in \prod_{n \in \omega} A_n \mid a_n = 0$ für fast alle $n \in \omega$ oder $a_n = 1$ für fast alle $n \in \omega\}$ definiert sind. Sei K_1 die Klasse aller endlichen Produkte von Coprodukten abzählbarer BAen und K (bzw. L) die kleinste K_o umfassende, unter endlichen Produkten (abzählbaren schwachen Produkten) und Coprodukten abgeschlossene Klasse von BAen. Man kann zeigen, dass $K_1 \subsetneqq K \subsetneqq L \subsetneqq P$ ist. Die Isomorphietypen von Algebren aus K_1 lassen sich einfach beschreiben. Diese Ergebnisse beantworten die von Halmos gestellte Frage, ob $K_1 = P$ ist.

<u>Buchberger, B.</u>: Bedingungen für die Stärke von Berechenbarkeitsformalismen

Gesucht sind allgemeine Kriterien, damit ein vorgeschlagener Formalismus die Stärke der Standard-Berechenbarkeitsformalismen (Turing, Markow etc.) erreicht. Wir behandeln diese Frage in der folgenden präzisen Fassung: man gebe Bedingungen für die rekursiven Funktionen $\varrho, \overline{\Psi}, \chi, \gamma$ (γ ... Eingabevercodierung von "Programmen" und "Daten" im Formalismus, ϱ ... Ausgabevercodierung der Resultate, $\overline{\Psi}$ ... Funktion, die das Verhalten des Formalismus in einem Schritt beschreibt, χ ... Abbruchskriterium), damit der durch diese Funktionen bestimmte Berechenbarkeitsformalismus eine Gödel-Numerierung der partiell rekursiven Funktionen definiert. Wir konzentrieren uns vor allem auf die Untersuchung der möglichen Funktionen $\overline{\Psi}$ und zeigen, dass (grob gesprochen) genau jene Funktionen $\overline{\Psi}$ als die "Überführungsfunktionen" in Berechenbarkeitsformalismen auftreten können, deren "Graph" unendlich viele, unendlich lange, nicht zusammentreffende Wege enthält.

<u>Pfeiffer, H.</u>: Zur Bezeichnung von Ordinalzahlen

In Verallgemeinerung einer Methode von SCHÜTTE wird in Analogie zu einem Ansatz von KINO ein Bzeichnungssytem für Ordinalzahlen erklärt bestehend aus einer Termmenge Wd und einer zweistelligen Relation $\angle$ auf Wd, von der zu zeigen ist, dass sie Wd wohlordnet. Wd wird wie folgt induktiv definiert. $0 \in$ Wa; sind $a, b \in$ Wd, so auch $a \# b$, (a,b) und $[a,b]$. Unter $a \# b$ kann man sich die natürliche Summe von a und b vorstellen, unter dem sog. Anfangsterm $[a,b]$ in etwa die ordinale Anfangszahl $\varphi_a(b)$, wo $\varphi_0 = \lambda\xi\omega_\xi$, $\varphi_{\alpha+1} = \varphi'_\alpha$ und der Wertebereich von φ_λ (λ Limeszahl) Durchschnitt der Wertebereiche der φ_α für $\alpha < \lambda$ ist. Die Terme der Form (a,b) lassen sich als Werte von Normalfunktionen φ_α auf einer durch b festgelegten Zahlklasse veranschaulichen. Die Relation $\angle$ wird für Anfangsterme so definiert: $a_1 < b_1 \wedge \mathcal{L}a_1 \cup \mathcal{L}a_2 < [b_1, b_2] \vee a_1 = b_1 \wedge a_2 < b_2 \vee$ $\vee b_1 < a_1 \wedge [a_1, a_2] \leq \mathcal{L}b_1 \cup \mathcal{L}b_2 \Rightarrow [a_1, a_2] < [b_1, b_2]$, wo $\mathcal{L}a$ die Menge der in a vorkommenden Anfangsterme ist. In den übrigen Fällen wird $<$ so ähnlich erklärt wie in PFEIFFER, Archiv für math. Logik u. Grundl. 13, S.74. In dem Vortrag wird der Wohlordnungsbeweis für das beschriebene System angedeutet.

Ottmann, Th: Arithmetische Prädikate über einem Bereich endlicher Automaten.

Endliche, nicht vollständig definierte initiale Automaten vom MEALY-Typ mit je zwei Ein- und Ausgängen in jeder der beiden Richtungen rechts und links lassen sich in normierter Weise zu Ketten zusammensetzen. Jeder derartige Automat ist isomorph zu einer Automatenkette, in der nur Bausteine aus einer festen endlichen Menge (einer Basis) vorkommen. Über dem Bereich dieser Automaten wird der Begriff des arithmetischen Prädikats präzisiert: Ausgehend von den im intuitiven Sinn arithmetischen (sogar entscheidbaren) Eigenschaften der Isomorphie der Verhaltensgleichheit und der isomorphen Einbettbarkeit initialer Automaten erhält man durch Abschluss mit arithmetischen Mitteln, also insbesondere unter Verwendung von Quantoren über Automaten, endlich vielen Konstanten zur Bezeichnung der Basiselemente und eines Operationssymbols zur Bezeichnung der Operation der Verkettung zweier Automaten, eine Klasse von im intuitiven Sinne arithmetischen Prädikaten von Automaten. Es lässt sich zeigen, dass diese Prädikatenklasse übereinstimmt mit der Klasse derjenigen Prädikate, die man gewinnt durch eine Gödelisierung des Bereichs der Automaten und Übertragung des zahlentheoretischen Begriffs des arithmetischen Prädikats.

Shepherdson, J.C.: Computation over abstract structures

What functions can you compute given processing units operating on arbitrary data (e.g. real numbers, fishes) togother with unlimited computing power of the usual digital kind for the organisation and control of the processors?

The effective definitional schemes of Friedman (Logic Colloquium 1969) are claimed to give the right answer to this question and the modifications needed to take care of parallel computation and "partial" basic functions and relations are discussed.

Tait, W.W.: Theory of first order types

A survey of proof theory for first order systems (predicate logic, number theory, theory of constructive higher number classes, functionals of higher type.)

Bibel, W.: Ein mechanisches Beweisverfahren für die Prädikatenlogik.

Mechanische Beweisverfahren für die Prädikatenlogik werden effektiver, wenn man von der antipränexen Form einer Formel ausgeht, sodass man entweder auf den Herbrandschen Satz für allgemeine, statt wie bisher für pränexe, Formeln zurückgreifen muss oder, wie in dem hier beschriebenen Verfahren, sich lediglich auf den üblichen Konsistenz- und Vollständigkeitssatz für das zugrundegelegte formale System stützt. Dabei kann das Verfahren so konstruiert werden, dass es auf direktem Wege die in bestimmtem Sinne einfachste Herleitung ertastet.

Flum, J.: Hanfzahlen und Wohlordnungszahlen

Für eine Familie von Modellklassen wird die Hanfzahl und die Wohlordnungszahl definiert. Es wird gezeigt, dass für gewisse durch eine verallgemeinerte Sprache gegebene Familien von Modellklassen die Hanfzahl und die Wohlordnungszahl (mittels der Bethfunktion) zusammenhängen.

Heidler, K.: Reduktionstypen in der Prädikatenlogik mit ε-Operator.

Die Sprache der Prädikatenlogik mit dem Auswahloperator ε sei wie üblich mit Funktionssymbolen und der Gleichheit aufgebaut. Für $\Omega \subset \{\wedge, \vee, \varepsilon, =\}$ und eine Menge K von Prädikatssymbolen sei $L(\Omega, K)$ die Menge der Ausdrücke, die ausser $\neg, \wedge, \vee$ und Subjektssymbolen nur Symbole aus $\Omega \cup K$ enthalten.

1) Es gibt $\varphi \in L(\{\varepsilon, =\}, \emptyset)$, so dass für alle $A \neq \emptyset$: A ist unendlich gdw φ ist über A erfüllbar.

2) $L(\{\varepsilon, =\}, \emptyset)$ ist ein Reduktionstyp und unentscheidbar.

3) K enthalte nur einstellige Prädikatssymbole.
   (a) Alle erfüllbaren $\varphi \in L(\{\wedge, \vee, \varepsilon\}, K)$ sind endlich erfüllbar.
   (b) $L(\{\wedge, \vee, \varepsilon\}, K)$ ist entscheidbar.

4) (über die Reduktionstypen der Form $L(\Omega, K)$)
   (a) $L(\Omega, K)$ ist ein Reduktionstyp oder entscheidbar.
   (b) $L(\Omega, K)$ ist genau dann ein Reduktionstyp, wenn (1) $\varepsilon, = \in \Omega$ oder (2) $\wedge, \vee$ oder $\varepsilon \in \Omega$ und K enthält ein wenigstens zweistelliges Prädikatssymbol.

Fraïssé, R.: Intervalle d'une relation et extension par ultrafiltres intervallaires

Rappelons qu'un automorphisme local d'une relation R est un isomorphisme d'une restriction de R sur une autre. Un R-intervalle est une partie A de la base E de R, telle que tout automorphisme local de domaine et codomaine contenus dans A, une fois étendus par l'identité sur E-A, donne un automorphisme de R. Appelons R-filtre un ensemble $\mathcal{F}$ d'intervalles non vides, tel que (i) si A appartient à $\mathcal{F}$, tout intervalle contenant A apprtient à $\mathcal{F}$; (ii) si A, B appartiennent à $\mathcal{F}$, l'intersection $A \cap B$ (qui est un intervalle) appartient à $\mathcal{F}$. Un R-ultrafiltre sera un R-filtre maximal; pour deux R-ultrafiltres distincts $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, il existe un intervalle A de $\mathcal{U}$ et un intervalle B de $\mathcal{V}$ qui sont disjoints. Si R est une chaîne (ordre total), on retrouve les coupures non sauts. A chaque ultrafiltre $\mathcal{U}$ on peut associer au moins une relation $R_{\mathcal{U}}$ qui s'accorde à $\mathcal{U}$, en ce sens que pour chaque partie finie F de la base de $R_{\mathcal{U}}$, il existe, pour tout intervalle A de $\mathcal{U}$, un isomorphisme de $R_{\mathcal{U}}/F$ sur une restriction de R/A. On définit alors une unique fermeture, extension commune de R et des $R_{\mathcal{U}}$ (supposées de bases disjointes); elle généralise la construction de la chaîne des reels à partir de celle des rationnels. Problème: choisir les $R_{\mathcal{U}}$ pour que la fermeture soit une extension logique de R.

Fenstad, J.E.: On axioms for computation theories.

In Logic Colloquium 69 Y.N.MOSCHOVAKIS gave a system of axioms for general computation theories. In the present lecture we presant a modified approach in which the idea of LENGTH OF COMPUTATION is replaced by an axiomatically given notion of a SUBCOMPUTATION set.

Pouzet, M.: Interpretierbarkeit zwischen universellen Theorien

Bwtrachten wir eine Sprache ohne Funktions- und mit nur endlich vielen Prädikatenzeichen einer Stellenzahl $\leq m_0$. Wir ordnen einer universellen Theorie T durch Hinzunahme von m neuen einst. Prädikatenzeichen eine Theorie T^m zu und sagen, dass T m-schön ist, wenn es in jeder unendlichen Menge endlicher Modelle von T^m mindestens zwei verschiedene Modelle M, M' gibt, sodass M einem Untermodell von M' isomorph ist. Theorem: Ist T m_0-schön, so ist T und jede in T frei interpretierbare Theorie T' durch je einen

Allsatz axiomatisierbar. Wir erinnern, dass man eine in T interpretierbare Theorie T' wie folgt erhält: man erweitert T zu einer Theorie T^* durch Hinzunahme von Prädikatensymbolen $P_1,\dots,P_n$ und definierenden Axiomen $P_i x_1 \dots x_{n_i} \leftrightarrow \alpha_i(x_1,\dots,x_{n_i})$ mit offenen Ausdrücken $\alpha_i \in L(T)$; L(T') sei die Sprache mit nur $P_1,\dots,P_n$ und T' die Theorie, deren Theoreme gerade die in T^* ableitbaren Ausdrücke von L(T') sind. Beispiele: Erweitert man die Theorie der Ordnung durch endl. viele einst. Prädikate und evtl. Allsätze, so ist jede in der so erhaltenen Theorie frei interpretierbare Theorie durch einen Allsatz axiomatisierbar. Dies erweitert Ergebnisse von Frasnay sowie von Fraïssé und dem Autor. Man erhält analoge Ergebnisse für die Theorie der Bäume und die Theorie der Graphen der Länge 2. Für Details s. C.R.Acad.Sci.Paris, April 1972.

Schütte, K.: Zum Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik mit Identität.

Für die pränexen Formelklassen $\exists^m \forall^2 \exists^n$ der Prädikatenlogik mit Identität konnte bisher die Erfüllbarkeit noch nicht als eine entscheidbare Eigenschaft nachgewiesen werden. Es wird nun ein Verfahren zum Nachweis der Erfüllbarkeit von $\exists^m \forall^2 \exists$-Formeln der PL mit Identität skizziert. Der erste Schritt besteht darin, dass die Gleichungen in der betrachteten Formel separiert werden. Danach ist festzustellen, ob gewisse Bestandteile der Formel eine Singularitätseigenschaft haben. Ist dies nicht der Fall, so lässt sich die Erfüllbarkeit ähnlich wie in der PL ohne Identität entscheiden. Andernfalls ist die betreffende Formel F in eine Formel F' umzuformen, wobei F' von gleicher Art wie F, jedoch äusserlich komplizierter als F ist. Durch eine geeignete Definition eines Formelgrades ist dann nachzuweisen, dass der Übergang von F zu F' nach endlich vielen Schritten abbricht.

<u>Zusatz:</u> Es konnte bisher noch keine geeignete Graddefiniton für den Nachweis der Entscheidbarkeit von $\exists^m\forall^2\exists$ -Formeln gefunden werden. Das Entscheidungsproblem ist also für diese Formelklasse weiterhin offen. Nur die speziellere Klasse der Formeln

$$\forall x \forall y A(x,y) \wedge \forall x \exists z B(x,z)$$

konnte als entscheidbar nachgewiesen werden.

<u>Siefkes, D.:</u> Axiomatisierung in der monadischen Theorie von ω_1.

Die monadische Theorie zweiter Stufe von ω_1, $MT[\omega_1]$, und die der abzählbaren Ordinalzahlen, $MT[c.o.]$, sind entscheidbar. Axiomatisierungen führten zu folgenden Ergebnissen (mit J.R.Büchi):
<u>Satz 1:</u> $MT[c.o.]$ und $MT[\omega_1]$ sind endlich axiomatisierbar (über der elementaren Logik plus Komprehension und Extensionalität). $MT[\omega_1]$ hängt davon ab, ob man das Auswahlaxiom oder gewisse Negationen davon annimmt: das ist das erste Beispiel einer entscheidbaren Theorie, bei der sich "Variationen" der zugrundeliegenden Mengenlehre auswirken.
<u>Satz 2:</u> Die Tarski-Lindenbaum-Algebra B von $MT[c.o.]$ ist isomorph zu der Algebra der Teilmengen von ω^ω, die in $MT[c.o.]$ definierbar sind.
<u>Satz 3:</u> Axiomensysteme für die vollständigen Erweiterungen von $MT[c.o.]$ erhält man aus den entsprechenden für die elementare Theorie der Ordinalzahlen von Mostowski-Tarski, indem man die periodischen Teilmengen der Prim-Modelle dieser Erweiterungen festlegt.
<u>Satz 4:</u> B hat eine geordnete Basis vom Typ $1+2\cdot\eta$.

Podewski, K.-P.: Eine Ordnung der Theorien

Sei K eine zulässige Menge mit $K \models AC$ und $\omega \in K$. Zu jeder Theorie $T \in K$ gibt es dann ein Modell A aus K. Def: Sei $T \in K$. K heisst λ-saturiert bzgl. T, wenn für jede vollständige unwesentliche Erweiterung $T' \in K$ jedes Modell A, $|A| \leq \lambda$, bis auf Isomorphie aus K ist. Def: Von T_1 wird gesagt, dass es kleiner als T_2 ist, falls für jedes K und jedes λ gilt: Ist K λ-saturiert bzgl. T_2, dann ist K λ-saturiert bzgl. T_1. Es wurde eine Klasse von kleinsten und eine Klasse von grössten Theorien angegeben.

Lorenzen, P.: Konstruktive Deutung der Kripke-Semantik

Nach der dialogischen Begründung der konstruktiven Quantorenlogik werden klassische Quantorenkalküle durch Umdeutung der Adjunktionen ($\neg\wedge\neg$ statt $\vee$) begründet. Für den Beth-Kalkül wird die Existenz maximaler nicht geschlossener Zweige (im Falle nicht logisch-wahrer Formeln) als Existenz einer "Interpretation", die kein Modell ist, gedeutet.

Für Zukunftsaussagen wird dialogisch eine konstruktive Modallogik begründet, anschliessend der Übergang vom klassischen Modalkalkül M^* (v.Wright, Schütte) wie oben vollzogen. Der zu M^* gehörige Beth-Kalkül liefert wieder maximal nicht-geschlossene Zweige (in allen Teilentwicklungen). Diese lassen sich als "Interpretationen" der Kripke-Semantik deuten.

Agazzi, E.: Einige Bemerkungen über die semantische Funktion der axiomatischen Methode.

Die axiomatische Methode hat eine semantische Wirkung, insofern die Axiome eine implizite Präzisierung der Bedeutung der in ihnen vorkommenden sprachlichen Entitäten bilden - Unvollständigkeit, Nicht-Kategorizität, Existenz von Nicht-Standard Modellen als Grenzen für die Möglichkeit, die Gegenstände einer Theorie axiomatisch zu charakterisieren - Jede Menge von Axiomen, die innerhalb der ersten Stufe formuliert sind, besitzt immer ein bloss sprachliches intensional Nicht-Standard Modell, falls sie eines überhaupt besitzt - Die Hoffnung, das Standard-Modell zu gewinnen, kann durch eine Vermehrung der sprachlichen Komplexität der Theorie (die mehrere Sachzustände ausschliessen könnte) nicht erfüllt werden - Ein vernünftiger Weg dafür scheint dagegen zu sein, eine intensionale Semantik zugrunde zu legen, in der die sprachlichen Entitäten mit operativen "Kriteria" verknüpft werden, durch welche die Wahrheit oder Falschheit der Ausdrücke geprüft werden kann - Beispiele: das Skolemsche Paradox und die Güdelisierung.

Janisch, P.: Eindeutigkeitsprobleme der Protophysik

Nach einer Auseinandersetzung mit der jüngst veröffentlichten Kritik am Eindeutigkeitsanspruch der Protophysik (diese Kritik beruht auf einer Fehlinterpretation der Homogenitätsprinzipien als empirisch zu kontrollierende Hypothesen) wurde die Eindeutigkeit protophysikal. Normen (z.B. Vorschrift zur Herstellung ebener Platten) präzisiert durch Unterscheidung einer Herstellungsprxis (Nichtpassung plangeschliffener Platten wird durch Herstellungsfehler erklärt und entsprechend beseitigt) und einer Verwendungspraxis (Nichtpassung wird durch Störungen, z.B. Temperatureinflüsse, erklärt und entsprechend beseitigt). Die log. Schwierigkeit des Übergangs von mehrstelligen Prädikatoren (z.B. eine Platte P_1 ist flach bezügl. P_2 u. P_3) auf einstellige (z.B. P_1 ist flach) ist damit schon auf der Hestellungsebene gelöst; auf der Verwendungsebene können damit Ideatoren in allquantifizierten Aussagen vorkommen.

<u>Hodges, W.:</u> Cardinalities of homomorphic pre-images

T is a theory in the language $L = L_{K+\omega}$, where K is a transfinite cardinal; L has $\leq K$ symbols. By a <u>homomorphic preimage</u> of a Model $\mathfrak{L}$ of T, we mean a model $\mathfrak{N}$ of T such that there is a surjective map $f: \mathfrak{N} \to \mathfrak{L}$ such that for each relation symbol R of L, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{N}}$ implies $\langle fa_1, \ldots, fa_n \rangle \in R^{\mathfrak{L}}$ (and similarly for functions). Write $PI(\mathfrak{L}) = \{\mu : \mathfrak{L}$ has a homomorphic preimage of cardinality $\mu\}$.

THEOREM 1. Say $\mathfrak{L} \models T$ and card $\mathfrak{L} \geq K$. Then: (a) If card $\mathfrak{L} \leq \lambda \leq \mu$ and $\mu \in PI(\mathfrak{L})$, then $\lambda \in PI(\mathfrak{L})$. (b) If arbitrarily large $\mu <$ Hanf number of $L_{(\text{card}\,\mathfrak{L})^+\omega}$ are in $PI(\mathfrak{L})$, then all $\mu \geq$ card $\mathfrak{L}$ are in $PI(\mathfrak{L})$.

THEOREM 2. There is a countable first-order universal theory T such that for all $\lambda \leq \mu < \beth_{\lambda^+}$, T has a model $\mathfrak{L}$ of card. λ such that all cards. $\geq \lambda$ and $\leq \mu$ are in $PI(\mathfrak{L})$, but not arbitrarily large cardinals.

<u>Koppelberg, B.J.</u> Vergleich messbarer und stark kompakter Kardinalzahlen

Def.: $\varkappa$ messbar $\leftrightarrow \exists\, \varkappa$ -vollständiger freier Ultrafilter auf $\varkappa$.

$\varkappa$ stark kompakt $\leftrightarrow$ jeder $\varkappa$ -vollständige Filter ist in einem $\varkappa$ - vollständigen Ultrafilter enthalten.

Man erhält:

1.) Consis (ZFC + $\exists \varkappa$($\varkappa$ stark kompakt $\wedge \exists$ U(U normaler Ultrafilter auf $\varkappa \wedge \{\nu < \varkappa \mid \nu$ messbar$\} \notin$ U))) $\Rightarrow$

Consis (ZFC + $\exists \varkappa$($\varkappa$ stark kompakt $\wedge \{\nu < \varkappa \mid \nu$ messbar$\} = \emptyset$)).

Def.: $\varkappa$ superkompakt $\leftrightarrow$ für jedes $\lambda \geq \varkappa$ existiert auf $P_\varkappa(\lambda)$ ein normaler Ultrafilter.

Ein weiterer Satz ergibt sich, indem in 1) stark kompakt durch superkompakt und messbar durch stark kompakt ersetzt wird.

2) Consis (ZFC + $\exists\varkappa$($\varkappa$ stark kompakt)) $\Rightarrow$

Consis (ZFC + $\forall \alpha \in On\, \exists \beta (\beta \geq \alpha \wedge \beta$ messbar)).

<u>Luckhard, H.:</u> Über die Begründung der klassischen Analysis mittels höherer Bar-Induktion

Es wird die Entwicklung der Grundlagen der klassischen Analysis innerhalb der letzten 20 Jahre geschildert. Besonders behandelt wird die Gödel'sche Funktionalinterpretation und die sie tragenden Ideen. Spector's finite Reduktion der klassischen Analysis auf die primitiv und bar-rekursiven Funktionale aller endlichen Typen konnte vom Verf. mittels eines intuitionistischen Modells $\mathfrak{M}$, das der frei werdenden 2. Zahlenklasse entspricht, unter Verwendung von auf $\mathfrak{M}$-Subspezies verallgemeinerte Bar-Induktion als einziges bisher nicht intuitionistisches Prinzip fundiert werden. Der Verf. schlägt vor, dieses induktive Prinzip als intuitionistisch zu akzeptieren. Insgesamt: In dieser Erweiterung der bisherigen intuitionistischen Analysis ist die klassische Analysis konstruktiv begründbar. Der Verf. hält diese Reduktion auf induktive Prozesse, die sowohl an Beweistheorie wie Intuitionismus direkt anschliesst, für befriedigender als den Rückgriff auf voll-imprädikative Komprehension, die anderen Begründungen zugrunde liegt.

<u>Prestel, A.:</u> Pasch-freie Geometrie

Die Modelle der Pasch-freien Geometrie sind nach Szczerba und Szmielew die kartesischen Ebenen $\mathfrak{K}(K)$ über formal-reellen, pythagoreischen, semi-geordneten Körpern K. Dabei ist $\leq$ eine Semi-Ordnung (S.O.), falls $\leq$ eine lineare Ordnung von K mit $0 \leq 1$ und $(x \leq y \,.\!\rightarrow\, x+z \leq y+z)$ ist. Szczerba hat gezeigt, dass es eine echte (d.h. keine Anordnung) Semi-Ordnung auf den reellen Zahlen gibt, die das Stetigkeitsschema Σ_1:

$$\forall xy(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x \leq y) \,.\!\rightarrow\!. \,\exists z \forall xy(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x \leq z \leq y)$$

für alle 1.-stufigen Formeln in $+$, $\circ$ und $\leq$ erfüllt. Eingehendere Untersuchungen ergaben (für Körper der Chark. 0) u.a.:
(1) Nicht jeder überabzählbare Körper besitzt eine S.O. die Σ_1 erfüllt (Dies widerlegt eine Vermutung von Szczerba) (2) Jeder

Körper besitzt eine (bzgl. $+$, $\cdot$) elementare Erweiterung mit einer Σ_1 S.O. (3) Jeder überabzählbare Körper (von regulärer Mächtigkeit) besitzt eine S.O., die Σ_1 beschränkt auf Formeln ohne Quantoren erfüllt. (4) Die Dreiecksungleichung gilt in $\mathfrak{h}(K)$ genau dann, wenn $(\forall xy \in K)(0 \leq x \Rightarrow 0 \leq xy^2)$ ($\leq$ heisst dann <u>quadratische</u> S.O.) (5) Es gibt pythagoreische Körper mit echten quadratischen S.O., z.B. $R((Z \times Z))$. (6) Ist $\leq$ eine qu. S.O. auf K, so ist K bzgl. der Intervalltopologie ein top. Körper.

<u>Zucker, J.:</u> Systems of iterated inductive definitions: functional interpretation and ordinal analysis.

We consider intuitionistic theories ID_2^i of two (iterated) inductively defined sets with a certain syntactic condition on the defining predicates which, although stricter than positivity, is satisfied in all the well-known cases. The supremum of the provable recursive well-orderings of such theories is characterized in terms of a system of recursive functionals of finite type on trees of the first 3 number (or rather tree) classes, with a separate ground type for each class and recursion on each class. This characterization is obtained by means of a functional interpretation (modified realizability) of ID_2^i into a formal theory of these trees and functionals. However it is not known whether the same characterization holds for (classical) ID_2.

<u>Marek, W.:</u> On a strong form of the Mostowski-Suzuki-theorem

Mostowski and Suzuki (Fund.Math.65 (1969) 83-93) proved that every β-model for analysis has a proper elementary extension which is not a β-model.

<u>Theorem 1:</u> If M is a β-model, $M \models \forall x$ Constr(x), then there is M_1 such that $M \prec M_1$ or $M = M_1$, where M_1 is also β-model, such that no proper elementary extension of M_1 is a β-model. If M is countable, so is M_1.

Theorem 2: Assume $\mathfrak{P}(\omega)\subseteq L$; then for every countable β-model M there is a countable β-model M_1 such that $M \prec M_1$ or $M=M_1$, so that no elementary extension M_2 of M_1 of bigger length is a β-model.

Parsons, Ch.: Classification of Subsystems of Number Theory based on Schemata with Quantifier Bounds

Let Z_o be elementary number theory with defining equations for each elementary function and quantifier-free induction. Subsystems of full number theory are defined by schemata applied to formulae restricted as to quantifiers: the induction axiom (IA), induction rule (IR), FAC: $\forall x{<}a\, \exists y\; Axy \supset \exists c \forall x{<}a\; A(x, c_x)$. $S \subseteq T$ means that S is a subsystem of T. Then $IR(\Pi_{n+2}) \subseteq IR(\Sigma_{n+1})$ (hereafter IR^{Σ}_{n+1}, etc.). IA($\leq$ n nested unbounded quantifers) $\subseteq IA^{\Pi}_n$. $FAC^{\Sigma}_{n+1} \subseteq FAC^{\Pi}_n$. $IA^{\Pi}_n \subseteq FAC^{\Pi}_n$. $IR^{\Sigma}_{n+1} \nsubseteq FAC^{\Pi}_n$ and $FAC^{\Pi}_n \nsubseteq IR^{\Sigma}_{n+1}$. $IR^{\Pi}_{n+2} + FAC^{\Pi}_n \subseteq IR^{\Sigma}_{n+1} + FAC^{\Pi}_n$, but $IR^{\Pi}_{n+2} + IA^{\Pi}_{n+1} \nsubseteq IA^{\Pi}_{n+1}$. Therefore $IA^{\Pi}_{n+1} \nsubseteq IR^{\Sigma}_{n+1} + FAC^{\Pi}_n$, but IA^{Π}_{n+1} is a conservative extension of IR^{Σ}_{n+1} for Π_{n+2} sentences.

For a standard well-ordering $\prec$, let α-TIR and α-TIA be the rule and axiom of transfinite induction up to α. Then if $m \neq 0, \alpha \prec \omega_m(\omega)$, $\alpha\text{-TIR}(A)^{\Pi}_{n+1} \subseteq IR(A)^{\Sigma}_{n+m}$ (IR^{Σ}_{n+m} if $m \geq 2$); $\omega_m(\omega)\text{-TIR}^{\Sigma}_n \nsubseteq IA^{\Pi}_{n+m}$ (for n = 0 only if $\prec$ and certain ordinal functions are elementary). If $n \neq 0$, $\omega^2\text{-TIR}^{\Sigma}_n \nsubseteq IA^{\Pi}_n$.

Ziegler, M.: Die elementare Theorie henselscher Körper

Definition: Eine Theorie T^* heisst die K-Modellvervollstädnigung einer zweisortigen elementaren Theorie T mit den Sorten K und S, wenn

i) $L(T)=L(T^*)$ ii) $T \subseteq T^*$

iii) Für jedes Modell (K_1,S_1) von T gibt es eine Oberstruktur (K_2,S_2), die Modell von T ist, mit $S_1 \prec S_2$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

iv) Seien $(K_1, S_1) \subseteq (K_2, S_2)$ Modelle von T^* und $S_1 \prec S_2$, dann ist $(K_1, S_1) \prec (K_2, S_2)$.

Sei T_B die dreisortige Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik o, in denen, wenn der Restklassenkörper die Charakteristik p hat, der Wert v(p) von p kleinstes positives Element der Wertgruppe ist. Die drei Sorten der Sprache sind K,G,k: K der Körper selbst, G die Wertgruppe und k der Restklassenkörper. ($S := (G,k)$). Dann gilt

<u>Satz:</u> Die Theorie der hendelschen Modelle von T_B ist <u>die eindeutig bestimmte</u> K-Modellvervollständigung von T_B.

E. Börger (Münster)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft