MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17 / 1972

Methoden und Verfahren der mathematischen Physik

23. bis 29. April 1972

Bereits zum vierten Male konnte eine Tagung über "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" in Oberwolfach stattfinden. Sie stand wieder unter der Leitung von B. Brosowski (Göttingen) und E. Martensen (Darmstadt). Mit der gewachsenen Zahl der Teilnehmer erweiterte sich der Problemkreis der Anwendungen. Die Vorträge behandelten Probleme der Geodäsie, Meteorologie, Astrophysik, Quantenmechanik, Streutheorie und Kontinuumsmechanik. Darüber hinaus wurde diesmal auch der Entwicklung mathematischer Modelle für physikalische und biologische Vorgänge breitere Aufmerksamkeit gewidmet. Hierbei erwies sich die Teilnahme auch von Nichtmathematikern (Physikern, Geodäten, Mechanikern) als sehr fruchtbar und förderlich für den gegenseitigen Dialog.

Erneut wurden die engen Beziehungen zwischen physikalischen Fragestellungen, der mathematischen Theorie und der praktischen Behandlung der Probleme offenkundig. Bemerkenswert war das weitere Vordringen funktionalanalytischer Methoden, doch auch die klassischen Methoden behielten nach wie vor ihre Bedeutung. Schließlich beschäftigte sich wieder eine Reihe von Vorträgen mit numerischen Verfahren, deren Resultate von unmittelbarem Interesse für die Anwendungsgebiete waren.

Der bewußt klein gehaltene Teilnehmerkreis (43, davon 12 aus dem Ausland, mit 26 Vorträgen) ermöglichte eingehende Diskussionen und einen fruchtbaren Gedankenaustausch. Insbesondere der traditionelle Ausflug bot dazu bei strahlendem Frühlingswetter ideale Möglichkeiten, die von den Teilnehmern gerne genutzt wurden. Viele Diskussionen wurden abends bei geselligem Beisammensein im "Hirschen" weitergeführt.

Dem Institut und seinem Personal gebührt herzlicher Dank dafür, daß es in bewährter Weise dazu beitrug, den harmonischen Ablauf der Tagung zu ermöglichen.

Teilnehmer

B. Brosowski, Göttingen
W. Bürger, Darmstadt
S. Christiansen, Lyngby
C. L. Dolph, Ann Arbor/ Michigan
J. Donig, Tübingen
J. A. Dutton, University Park/Penn.
G. Fichera, Rom
K. v. Finckenstein, Garching
W. Gerdes, Darmstadt
E. Grafarend, Bonn
K. P. Hadeler, Tübingen
H. Haf, Stuttgart
A. Haimovici, Iasi
J. Hejtmanek, Graz
H. Hembd, Ispra
K. Jörgens, München
H. Kielhöfer, Bochum
K. Kirchgässner, Bochum
W. Knauff, Göttingen
T. Krarup, Kopenhagen
R. Kreß, Göttingen
D. Lortz, Garching
E. Lüneburg, Oberpfaffenhofen
E. Martensen, Darmstadt
E. Meister, Tübingen
H. Mülthei, Jülich
D. C. Pack, Glasgow
A. Piskorek, Warschau
J. Polášek, Prag
F.-O. Speck, Tübingen
B. Steffen, Göttingen
W. Törnig, Darmstadt
W. Velte, Würzburg
H. L. de Vries, Göttingen
H. Wacker, München
R. Wegmann, München
J. Weidmann, Frankfurt
H. J. Weinitschke, Berlin
W. Wendland, Darmstadt
H. Werner, Münster
J. Werner, Göttingen
Z. Wesołowski, Warschau
J. Wick, Jülich

Vortragsauszüge

B. BROSOWSKI u. R. WEGMANN: Numerische Behandlung eines Kometenmodells

Es wird folgendes Kometenmodell betrachtet: In einer parallelen Plasmaströmung (dem Sonnenwind) befindet sich eine punktförmige Quelle radial ausströmender neutraler Teilchen (der Kometenkern). Aus diesem vom Kometen gelieferten neutralen Hintergrund werden mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit durch Photonen Teilchen ionisiert und vom solaren Plasma aufgenommen. Das Plasma wird als ideales Gas behandelt (mit $\gamma = 2$) und beschrieben durch die hydrodynamischen Gleichungen, die modifiziert werden durch Quellterme. Es treten zwei Unstetigkeitsflächen auf: Eine Stoßfront und eine Kontaktfläche. Die Strömung wird als rotationssymmetrisch bezüglich der Achse Sonne-Komet angenommen. Es wird eine Modifikation eines Differenzenverfahrens von Godunov, Zabrodin und Prokopov beschrieben, mit der bei vorgegebener fester Kontaktfläche die Strömung in der allseitigen Umgebung des Kometen berechnet werden kann. Ergebnisse werden angegeben und diskutiert.

W. BÜRGER: Einfache Wellen in Kontinua

Die Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik für elastische und gewisse viskoelastische Kontinua lassen sich als Systeme quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in den Raumkoordinaten und der Zeit formulieren. Auf der Suche nach exakten Lösungen, die die Ausbreitung ebener Wellen beliebig großer Amplitude beschreiben, strebt man danach, die Zahl der unabhängigen Variablen zu verringern. Eine einfache Welle ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen, die vom Ort x und der Zeit t nur durch eine Phasenfunktion $\theta(x,t)$ abhängt. Beispiele sind die einfachen Expansions- und Kompressionswellen der klassischen Gasdynamik, deren Phasenflächen $\theta = \text{const}$ von Charakteristiken gebildet werden, und die stationären volldispergierten Wellen in relaxierenden Gasen sowie stehende Wellen großer Amplitude in Seilen und elastischen Drähten. Eine Klasseneinteilung der einfachen Wellen wird angegeben und an Draht und Seil demonstriert.

J. DONIG: Übergangsprobleme bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen

Es werden einige typische Übergangsprobleme für lineare elliptische Differentialgleichungen diskutiert, die bei der mathematischen Behandlung physikalischer Probleme auftreten. Es werden Lösungsmethoden mitgeteilt und Aussagen über die Lösbarkeit gemacht. Ein Querschnitt der bisher zu diesem Thema publizierten Arbeiten wird besprochen.

J. A. DUTTON: Spectra for a Class of Evolutionary Stochastic Processes

Many stochastic processes that arise in physical applications are not covariance stationary. Thus the usual definition of the spectral density, which gives the frequency decomposition of the variance, as a transform of the covariance function cannot be used. The class of processes represented by temporally-varying filtering of stationary processes are considered. The Priestley definition of an evolutionary spectral density applies, and is used to study the class. It is shown that these processes can be decomposed into a stationary component and an orthogonal, evolutionary residual. The stationary component, which is zero in some cases, is a best approximation in a mean square sense. A suitable definition of an evolutionary spectrum for ensembles of finite records is developed with the aid of the proper orthogonal decomposition theorem and illustrated by examples.

G. FICHERA: <u>Eigenvalue Problems of Mathematical Physics</u>

Eigenvalue problems for linear elliptic operators are considered and, by using the method of orthogonal invariants, arbitrarily close estimates for the eigenvalues are obtained. Examples concerning Continuum Mechanics are exhibited.

K. Graf v. FINCKENSTEIN: <u>Konvergenz eines Differenzenverfahrens nichtlinearer Diffusionsgleichungen im Zylinder</u>

Gegeben sei das folgende parabolische Anfangs-Randwertproblem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\eta(r,t,u,\frac{\partial u}{\partial r})\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right] \\ &u(r,0) = f(r) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq R \\ &\frac{\partial u}{\partial r}(0,t) = 0\,, \quad u(R,t) = g(t)\,, \quad \dot{g}(t) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq T \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Das Problem besitze eine eindeutige, hinreichend glatte Lösung u. Für η werden folgende Spezialfälle angenommen:

$$\text{(a)}\quad \eta = u^l \qquad \text{(b)}\quad \eta = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^l \quad , \quad l = 1,2,\ldots \,.$$

Es wird ein explizites Differenzenverfahren 2. Ordnung für (1) auf seine Konvergenz hin untersucht: Ist $z(\Delta r,\Delta t)$ der globale Verfahrensfehler im Sinne der Maximumsnorm, dann läßt sich für die jeweiligen Spezialfälle zeigen:

$$\text{(a)}\quad z = O(\Delta r^2) \quad , \quad \text{falls} \quad \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \leqq \frac{1}{4\|u\|^{\nu}} \quad , \quad \nu = 1,\ldots,l \quad ,$$

$$\text{(b)}\quad z = O(\Delta r^2) \quad , \quad \text{falls} \quad \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \leqq \frac{2}{9\|u'\|} \quad , \quad l = 1 \,.$$

(Im Falle (b) sind für $l > 1$ die Rechnungen noch nicht durchgeführt). Diese Konvergenzaussage gilt nur für ein endliches Zeitintervall. Der Beweis geschieht durch Abschätzung des Fehlers (bzw. der Fehlerdifferenzen) durch die Lösung einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung.

W. GERDES: Anwendung der Methode der retardierten Potentiale auf ein idealisiertes Modell des Smokatrons

Das Smokatronprojekt im Rahmen der kontrollierten Kernfusion wird in einem einfachen Modell behandelt. Man betrachtet in einem unendlich ausgedehnten Rohr mit Kavität eine Punktladung, die mit konstanter Geschwindigkeit längs der Rohrachse fliegt. Dies ist ein Randwertproblem für die MAXWELLschen Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{f} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{f}} = 4\pi \mathfrak{j}'$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{f} = 4\pi\lambda$$

(in komplexer Schreibweise mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + i\mathfrak{H}$) mit vorgeschriebenen Normalkomponenten von $\mathfrak{H}$ und Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$. Mit Hilfe der Sprungrelationen für retardierte Flächenpotentiale und einem Darstellungssatz für $\mathfrak{f}$ gelingt es, ein zum Differentialgleichungsproblem äquivalentes Integralgleichungsproblem herzuleiten, wenn man im Unendlichen geeignete Abklingbedingungen fordert. Für dieses wird ein Ersatzproblem formuliert und numerisch gelöst.

K. P. HADELER: Differential- und Differenzengleichungen in einigen biologischen Modellen

Es werden einige Selektionsmodelle der Populationsgenetik (im Anschluß an Blakeley, Kingman, Cannings et al.) betrachtet. Sei F eine symmetrische positive Matrix der Ordnung n, sei $S = \{ p = (p_j), p_j \geqq 0, \Sigma p_j = 1 \}$. Sei $T: S \to S$ die durch $Tp = PFp/p^*Fp$ definierte Abbildung (p Spaltenvektor, p^* Zeilenvektor, $P = (p_j \delta_{jk})$). Für $\phi(p) = p^*Fp$ gilt $\phi(Tp) \geqq \phi(p)$, $\phi(Tp) = \phi(p) \Longleftrightarrow Tp = p$. Die Gleichgewichtszustände und das asymptotische Verhalten der Lösungen von $p_{(\nu+1)} = Tp_{(\nu)}$ lassen sich leicht charakterisieren. Kontinuierliche Modelle führen auf Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{p} = PFp - p^*Fp \cdot p \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}_{jk} = (\Sigma\alpha_{jl})(\Sigma\alpha_{kl})\Sigma g_{rs}\alpha_{rs} - g_{jk}\alpha_{jk} ,$$
$$j,k = 1,\dots,n .$$

H. HAF: Zur Existenztheorie für ein nichtlineares Randwertproblem der Potentialtheorie

Im Anschluß an eine von R. I. Kačurowskii durchgeführte Verallgemeinerung der Fredholmschen Theorie auf nichtlineare Operatorgleichungen mit vollstetigen asymptotisch linearen Operatoren wird eine Anwendung dieser Theorie auf ein nichtlineares gemischtes Randwertproblem der Potentialtheorie gegeben. Hierzu wird eine geeignete Integralgleichung vom Hammersteintyp hergeleitet, auf die sich die Theorie von Kačurowskii anwenden läßt. Es werden insbesondere für den Fall, daß die "zugehörigen" homogenen linearen Probleme Eigenlösungen besitzen, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Lösungen der Randwertaufgabe angegeben und asymptotische Verzweigungspunkte diskutiert.

A. HAIMOVICI: Stabilitätsfragen bei partiellen Differentialgleichungen

On considère le système d'équations aux dérivées partielles

$$Lu = Au ,$$

où L est l'opérateur $a_{ij} \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ $(i,j = 1,2,\dots,p)$ à coefficients constants, A une matrice $m \times m$ à éléments constants, et u une fonction-vecteur à m composantes, définie sur le demiplan $x_n \geqq 0$. On étudie le comportement de u à l'infini, en relation avec la restriction (donnée) de u sur $x_n = 0$. On constate certaines analogies entre ce problème et celui de la stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires. A l'aide des résultats obtenus, on étudie aussi le système $Lu = Au + f(x,u)$, f étant une fonction-vecteur qui satisfait à des conditions convenables.

J. HEJTMANEK: Zur Streutheorie des linearen Boltzman-Operators

Der formale, lineare Boltzmann-Operator ist Summe eines abschließbaren Differentialoperators und eines beschränkten Integraloperators. Diese Operatoren werden in $L_p(R^3 \times R^3)$, $1 \leqq p < \infty$, zu abgeschlossenem Operator T bzw. A gemacht, die in $L^2(R^3 \times R^3)$ nicht selbstadjungiert sind. Das Spektrum von T besteht nur aus einem kontinuierlichen Anteil auf der imaginären Achse. Das abstrakte Cauchy-Problem ist lösbar für alle t. Es wird die Möglichkeit diskutiert, eine Streutheorie, die Möller'schen Wellenoperatoren und den Streuoperator für dieses Problem zu entwickeln.

H. HEMBD: Zur Lösung der Boltzmanngleichung für den Teilchentransport

Für die Integralgleichung des Teilchentransportes durch Materie wird ein Lösungsverfahren auf der Basis der Fouriertransformation angegeben. Das Verfahren eignet sich ganz allgemein zur Lösung von Problemen, die durch eine Integralgleichung vom Faltungstyp beschrieben werden. Der Kern kann eine schwache Singularität vom Typ des Potentials besitzen. Existenz- und Eindeutigkeitsfragen sowie die Konvergenz des Approximationsverfahrens im allgemeinen Falle werden diskutiert und am Beispiel der Transportgleichung verdeutlicht.

K. JÖRGENS: Pseudo-Differentialoperatoren in der Mathematischen Physik

Es wird eine Klasse von Operatoren beschrieben, die in der Quantenmechanik vorkommen und die als formale Pseudo-Differentialoperatoren dargestellt werden können. Nach E. Thue Poulsen (1964, unveröffentlicht) ist der Operator $\Theta(f)$ definiert durch

$$\Theta(f)\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i(x-y)p} f\left(\frac{x+y}{2}, p\right) \varphi(y)\, dydp$$

für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Quantisierung der klassischen Hamiltonfunktion $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Thue Poulsen zeigt, daß Θ eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ in den Raum $L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$ der stetigen linearen Operatoren ist, die $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in den Raum $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ abbilden. Es gibt eine stetige lineare Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ von $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ auf sich, so daß auch

$$\Theta(f)\varphi(x) = \int e^{ixy} \tilde{f}(x,y)\hat{\varphi}(y)\, dy \qquad \left(\hat{\varphi}(y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ixy}\varphi(x)\, dx\right)$$

für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt. In Spezialfällen ist also $\Theta(f)$ ein Pseudo-Differentialoperator. Es wird ein Kriterium dafür angegeben, daß für eine Funktion f der Form $f(q,p) = t(p) + v(q,p)$ der Operator $\Theta(f)$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.

K. JÖRGENS u. J. WEIDMANN: Streutheorie für nicht-lokale Wechselwirkungen

Sei T_1 die selbstadjungierte Realisierung von $-\Delta$ in $L_2(\mathbb{R}^m)$, $D(T_1) = W_2^2(\mathbb{R}^m)$. V sei ein Operator in $L_2(\mathbb{R}^m)$ mit den Eigenschaften

(a) V ist symmetrisch und $D(T_1) \subset D(V)$.

(b) Es existieren Konstanten $C \geqq 0$ und $\theta > 1$ mit
$||Vu|| \leqq C(1+r)^{-\theta}(||u||+||Tu||)$ für alle $u \in D(T_1)$ mit $u(x) = 0$ für $|x| \leqq r$.

Ist $T_2 = T_1+V$ selbstadjungiert, so wird mit Hilfe des Kriteriums von Cook, Jauch, Kuroda gezeigt, daß die Wellenoperatoren $W_{\pm}(T_2,T_1)$ existieren. Das Resultat erlaubt Anwendungen auf Störungen durch Differentialoperatoren bis zur Ordnung 2 und auf nicht-lokale Störungen.

H. KIELHÖFER: Stabilität bei fastlinearen Evolutionsgleichungen

Für die Evolutionsgleichung in einem Hilbertraum E

$$\frac{d}{dt} u = - Au - Mu + F(u) \quad , \quad u(0) = u_0 \quad ,$$

mit selbstadjungiertem, positiv definitem und kompakt invertierbarem A, linearem, durch A^{α} beschränktem M und nichtlinearem F, das ebenfalls durch A^{α} abgeschätzt werden kann, wird die Existenz, Stabilität und Instabilität untersucht. Dabei kann eine hinreichende und notwendige Bedingung — nämlich durch das Spektrum von A+M — für die Stabilität von u = 0 angegeben werden, falls $F \cdot A^{-\alpha} = o(||u||)$ ist. Die Ergebnisse werden bei der Untersuchung der Stabilität von stationären Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen angewandt.

T. KRARUP: Ein Versuch, Probleme der physikalischen Geodäsie mathematisch zu formulieren

In physical geodecy the problem is to find the potential of the earth. Classically the problem is attacked as a boundary value problem for harmonic functions outside the surface of the earth. This surface is supposed to be known approximately, but at every point of it the value of the potential as well as its gradient is known. The problem is a non-linear one, but it can perhaps be solved using successive approximations of type of regular oblique derivative boundary conditions: $\frac{\partial T}{\partial \nu} + aT = f$ on $\partial\Omega$ where ν is a differential vector field on $\partial\Omega$ which is never tangential to $\partial\Omega$, $a \geqq 0$ and f are given. This problem is known to have at least 3 independents known zero solutions, but it seems to be difficult to find reasonable sufficient conditions for its having not more than 3. It is proposed to formulate the problem in a least square sense, so that the problem becomes selfadjoint and this difficulty disappears.

R. KRESS: Potentialtheoretische Randwertprobleme bei Tensorfeldern beliebiger Dimension und beliebigen Ranges

Beim Dirichletschen bzw. Neumannschen Problem handelt es sich um die Angabe von schiefsymmetrischen Tensorfeldern vom Rang $o < p < n$ in n-dimensionalen euklidischen Definitionsbereichen mit vorgeschriebener Divergenz und Rotation, die auf dem Rande vorgegebene Tangential- bzw. Normalkomponenten annehmen. Mit Hilfe einer Integralgleichungsmethode werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze für diese Randwertprobleme gewonnen. Die durch den bekannten Hodgeschen Dualitätsoperator für schiefsymmetrische Tensorfelder vermittelte Dualität der beiden Randwertprobleme führt zu einer Deutung der bisher nur empirisch verstandenen Dualität der Randwertprobleme im dreidimensionalen Spezialfall.

D. LORTZ: Eigenwertschranken für die Hillsche Gleichung

Sucht man periodische Lösungen λ der Ricatti-Gleichung

$$\lambda' = \lambda^2 + f \quad , \quad f(x+1) = f(x) \;,$$

dann findet man, daß es solche genau dann gibt, wenn gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \alpha_0 \;.$$

Dabei ist α_0 der niedrigste Eigenwert für das Randwertproblem der Hillschen Gleichung

$$y'' + (\alpha + f - \int_0^1 f\,dx)y = 0 \quad , \quad y(x+1) = y(x) \;.$$

Die Lösung eines bestimmten Variationsproblems liefert eine untere Schranke für α_0, die sich nicht verbessern läßt, falls von der Funktion f nur ihr Mittelwert und die Norm ihrer Schwankung benutzt wird. Für die drei Fälle $p = 1$, 2 und ∞ von L_p-Normen wurde das Variationsproblem in geschlossener Form gelöst.

H. N. MÜLTHEI: Optimale Eindeutigkeitsaussagen für Goursatprobleme

Es wird die folgende Problemstellung betrachtet:

$$u_{xy} + a(t,x,y)u_y + b(t,x,y)u_x + A(t,x,y)u = f(t,x,y) ,$$
$$u(t,x,0) = \varrho(t,x) ,$$
$$u(t,0,y) = \sigma(t,y) , \quad \varrho(t,0) = \sigma(t,0) .$$

Hierbei werden bezüglich t verallgemeinerte Funktionen über einem Grundraum Φ betrachtet, während die Variablen x und y als Parameter zu interpretieren sind. $A(\cdot, x,y)$ ist ein parameterabhängiger stetiger und linearer Operator, der den dualen Raum Φ' in sich abbildet. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich die klassische Riemannsche Integrationsmethode für den hyperbolischen Fall auf obige Problemstellung in völlig analoger Weise übertragen. Man erhält auf diese Weise optimale Eindeutigkeitsaussagen für folgende Operatoren:

$$A(\cdot ,x,y) := \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu(\cdot ,x,y) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} , \quad k = 1,2,3,\ldots .$$

H. NEUNZERT u. J. WICK: Simulationsverfahren in der Plasmaphysik

Für die (räumlich) eindimensionale nichtlineare Vlasovgleichung gibt es eine Vielzahl numerischer Verfahren, die je nach Problemstellung mehr oder weniger mit den physikalischen Messungen übereinstimmende Ergebnisse liefern. Für keines dieser Verfahren ist jedoch Konvergenz nachgewiesen. Auffallend war aber die Tatsache, daß die in den letzten Jahren entwickelten Simulationsmethoden im Vergleich mit den anderen Verfahren "bessere" Ergebnisse lieferten, insbesondere bei systematischer Wahl der Anfangswerte. Aus der Art der Anfangsrealisierung wird die Definition einer Norm nahegelegt, die sich als tragfähig erweist, die Konvergenz des numerischen Verfahrens zu zeigen.

A. PISKOREK: Radon-Transformation und hyperbolische Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Sei $P(D,D_t)$ ein linearer homogener hyperbolischer Differentialoperator m^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten im (n+1)-dimensionalen (x,t)-Zeitraum. Das charakteristische Polynom $P(\xi,\tau)$ dieses Differentialoperators hat p Nullstellen $(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p,\ p > m)$ mit konstanten Multiplizitäten $(r_1,r_2,\ldots,r_p\ ,\ r_1+r_2+\ldots+r_p = m)$. Für spezielle Anfangswertaufgaben

($u(x,0+)=0$, $D_t^j u(x,0+)=0$, $j=1,\dots,m-2$, $D_t^{m-2}u(x,0+) = \delta(x)$) der Gleichung $P(D,D_t)u(x,t)=0$ in der Teilmenge $t > 0$ des (x,t)-Zeitraumes können explizite Darstellungen der Lösungen mit Hilfe der Radon-Transformation angegeben werden. Mit Hilfe dieser Darstellungen erhält man die Fundamentallösung des Operators $P(D,D_t)$ und auch die Lösung jeder klassischen Anfangswertaufgabe der Gleichung $P(D,D_t)u(x,t)=0$. Im besondern erhält man die Fundamentallösung der elastischen Grundgleichungen.

J. POLÁŠEK u. Z. VLÁSEK: Das rotierende radiale Profilgitter in ebener Potentialströmung

Für die Konturgeschwindigkeit auf Profilen eines rotierenden radialen Profilgitters in ebener Potentialströmung wird eine Integralgleichung hergeleitet. Es wird gezeigt, daß diese Integralgleichung unter der Voraussetzung, daß die Lage des hinteren Verzweigungspunktes bei relativer Umströmung bekannt ist, eine eindeutige Lösung hat. Aus der Konturgeschwindigkeit läßt sich dann im beliebigen Augenblick das ganze Geschwindigkeitsfeld eindeutig berechnen.

F. SPECK: Eine Klasse verallgemeinerter Faltungsoperatoren

Faltungsintegraloperatoren der Gestalt

$$A_o u(x) := a_o \cdot u(x) + \int_{E_m} k(x-y)\, u(y)\, dy \quad , \quad a_o \in \mathbb{C} \quad , \quad k \in L^1(E_m) \quad ,$$

etwa über dem $L^p(E_m)$ sind genau dann invertierbar, wenn ihr Symbol

$$\Phi A_o(\xi) := a_o + (Fk)(\xi) \quad , \quad F : \text{die Fouriertransformation} \; ,$$

auf E_m nirgends verschwindet. Unter Verwendung einer von I.B. Simonenko 1964 veröffentlichten Verallgemeinerungsmethode für singuläre Integraloperatoren vom Michlinschen Typus, läßt sich nun die Frage, ob Operatoren der Form

$$A\, u(x) := a(x) \cdot u(x) + \int_{E_m} K(x,y)\, u(y)\, dy$$

Noethersch und damit durch die Fredholmschen Sätze überschaubar sind, für eine gewisse Klasse genau beantworten. In Spezialfällen lassen sich einfache Kriterien, etwa wie folgt, angeben:

1) $a \in C(\tilde{E}_m)$, $K(x,y) = k(x-y) \cdot b(x,y)$, $k \in L^1(E_m)$,

$b \in C(\tilde{E}_m \times \tilde{E}_m)$ $(\tilde{E}_m = E_m \cup \mathfrak{M}$: die Mehrpunktkompaktifizierung)

$\phi(x,\xi) := a(x) + b(x,x)\,(Fk)(\xi)$ auf $\Delta := \tilde{E}_m \times \infty \cup \mathfrak{M} \times \dot{E}_m$;

2) $a \in C(\tilde{E}_m)$, $K(x,y) = k(x-y+\vec{f}(y)) \in L^{1,\infty}$, $k \in L^1$, $f \in C(\tilde{E}_m)$

$\phi(x,\xi) := (Fk_x)(\xi)$ auf Δ , $k_x(z) := k(z+\vec{f}(x))$.

Dann ist A Noethersch $\Longleftrightarrow$ $\phi(x,\xi) \neq 0$ auf Δ .

B. STEFFEN: Ein numerisches Verfahren zur Behandlung von Problemen mit freiem Rand der Laplacegleichung

Es sei B eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Dann gibt es genau dann eine in B harmonische Funktion u, die auf ∂B die Werte von f und deren Normalableitung die Werte von g annimmt, wenn zwischen f und g die folgende Integralgleichung besteht:

$$2\pi \cdot f(s) = \int f(t) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(s,t)}\, d\,O(t) - \int g(t) \frac{1}{r(s,t)}\, d\,O(t) \;.$$

Von dieser Integralgleichung ausgehend, lassen sich effektive Verfahren zur numerischen Behandlung von Problemen mit freiem Rand der Laplacegleichung konstruieren. Die Anwendung eines solchen Verfahrens auf das Problem der Vena contracta ergab für die Kontraktionszahl α die Schranken $0.57 < \alpha < 0.59$.

W. WENDLAND: Über Randwertaufgaben für verallgemeinerte analytische Funktionen

Durch Modifizierung der Greenschen Funktion mit Hilfe der harmonischen Maße der inneren Randkomponenten $\dot{\Gamma}_1,\dots,\dot{\Gamma}_m$ eines durch m+1 Hölderstetig differenzierbare geschlossene Jordan-Kurven $\dot{\Gamma}_0,\dots,\dot{\Gamma}_m$ berandeten Gebietes $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ kann man alle Lösungen des modifizierten Dirichlet-Problems (Muschelishwili) darstellen. Diese modifizierte Greensche Funktion und die Neumannsche Funktion führen zu einem Integralgleichungssystem 2. Art mit schwach singulären Kernen für die Lösung des Standard-Problems der Riemann-Hilbert-Aufgaben verallgemeinerter analytischer Funktionen

(1) $$w_{\bar{z}} = Aw + B\bar{w} + C \quad , \quad \operatorname{Re} w|_{\dot{\Gamma}} = \varphi \quad .$$

Die Integralgleichungen sind stets lösbar, führen direkt auf die Defekt-Indizes (1,m) oder (0,m-1) und liefern ein Kriterium für das Eintreten des einen oder des anderen Falles.

Z. WESOŁOWSKI: Propagation of acoustical wave in finite elasticity

In the reference configuration there moves the discontinuity surface $\mathcal{S}$. Basing on the compatibility equations for the jumps the propagation condition of $\mathcal{S}$ is derived. The equation of the ray and the ordinary differential equation for the amplitude are established. As an example is considered propagation of acoustical wave in finitely deformed elastic tube. For the Mooney material the second-order approximations for the ray, front of the wave, propagation speed and the ray speed are calculated. It is shown that the tube acts as an acoustical lens. The lens power is continuous function of the initial deformation.

W. Gerdes (Darmstadt)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft