MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 20/1972

Gruppen und Geometrien

14. 5. bis 20. 5. 1972

Die Tagung fand unter der Leitung von D. H i g m a n (Ann Arbor/USA) und H. S a l z m a n n (Tübingen) statt. Im Mittelpunkt stand die Verbindung gruppentheoretischer und geometrischer Methoden. Daß die Geometrie die Gruppentheorie mit Erfolg heranzieht, ist gut bekannt. In vielen Vorträgen dieser Tagung nun wurde die umgekehrte Tendenz deutlich, daß auch Gruppentheoretiker zunehmend versuchen, sich die Geometrie dienstbar zu machen. Man denke z.B. an eine (hier nicht erscheinende) mittlerweile 15-jährige Frage H. Wielandts, die er als "Visibility in finite planes" geometrisch formulierte. In dieser Hinsicht war die Tagung "a challenge to the geometers" - wie D. Livingston in seinem Vortrag sich ausdrückte (s.u.).

Teilnehmer

Assion, J., Bielefeld
Assmus, E.F., Bethlehem/USA
Baer, R., Zürich/CH
Baumann, B., Bielefeld
Bedürftig, Th., Tübingen
Betten, D., Nantes/F
Bröcker, L., Kiel
Buekenhout, F., Brüssel/B
Cameron, P.J., Oxford/GB
Doyen, J., Brüssel/B
Fischer, B., Bielefeld
Gardiner, A., "
Higman, D.G., Ann Arbor/USA
Hill, R., Nottingham/GB
Hubaut, X., Brüssel/B
Iden, O., Bergen/Norwegen
Kegel, O., London/GB
Lingenberg, R., Karlsruhe
Livingstone, D., Birmingham/GB
Lorimer, P.J., Auckland/New Zealand
Mäurer, H., Darmstadt
Melchior, U., Bochum
Nakamura, K., Tübingen
Ng, Frau M.-P., Coventry/GB
Prohaska, O., Kaiserslautern
Salzmann, H., Tübingen
Scherk, P., Toronto/Kanada
Schulz, R.-H., Tübingen
Seib, M., Tübingen
Seidel, J.J., Eindhoven/NL

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Stellmacher, B., Bielefeld
Strambach, K., Kiel
Wielandt, H., Tübingen
Wilson, J.S., Erlangen
Windelberg, D., Hannover

Vortragsauszüge

E.F.ASSMUS, Jr.: Relations between linear codes and designs.

Let A be a linear (n,k) code over F_q with minimum weight d. Its holding pattern is the collection of d-subsets of $\{1,2,\ldots,n\}$ one obtains by looking at the coordinate places of minimum weight vectors where the coordinates are non-zero. Then $d = n - k + 1 \Longleftrightarrow$ the holding pattern is the trivial design and, if $d = 2e + 1$, the code is perfect $\Longleftrightarrow$ the holding pattern is a design of type $S_{(q-1)^e}(e+1,d,n)$ where $S_\lambda(t,k,v)$ is a t-design on a v-set with blocksize k.

We ask whether there are Steiner Systems of type $S_1(d-1,d,2d)$ except the extension of the projective plane of order 2 and the Steiner System associated with the Mathieugroup M_{12}. Assuming such a design is a holding pattern over F_q leads one to very strong conclusions about the linear $(2d,k)$ code. E.g. $d = k$ and $q \geq \frac{d}{2}$. But one can not yet decide the non-existence.

Th.BEDÜRFTIG: Polaritäten und Homogenität ebener projektiver Ebenen.

An den Vortrag "Polaritäten ebener projektiver Ebenen" im Januar anschließend stellte sich die Frage nach einer Charakterisierung ebener Ebenen durch die Lage absoluter, bzw. nicht absoluter Punkte von Polaritäten dieser Ebenen.

Definition: Ist A Teilmenge der Punktmenge einer projektiven Ebene $\wp$, so heiße A zweifach absolut, wenn je zwei Punkte aus A absolute Punkte ein und derselben Polarität von $\wp$ sind.

Satz 1: Ist nur ein Punkt einer ebenen projektiven Ebene $\mathcal{P}$ nie absoluter Punkt einer Polarität von $\mathcal{P}$ und gibt es eine Gerade, deren Punktreihe zweifach absolut ist, so ist $\mathcal{P}$ eine Moulton-Ebene oder eine Ebene über einen Neokörper entweder mit Links-, oder mit Rechtskürzung, oder mit kommutativer Addition.

Satz 2: Ist A eine offene, nicht dichte Teilmenge der Punktmenge einer ebenen projektiven Ebene $\mathcal{P}$, sind die Punkte aus A nie absolute Punkte von Polaritäten von $\mathcal{P}$ und ist der Rand von A zweifach absolut, so ist die Kollineationsgruppe Γ von $\mathcal{P}$ einfach: $\Gamma \cong PSL_2(\mathbb{R})$.

D.BETTEN: 4-dimensionale Translationsebenen mit einer Fixrichtung

Die volle Kollineationsgruppe Γ einer 4-dimensionalen Translationsebene sei 7-dimensional und halte f Achsenpunkte fest. Dann ist bekanntlich für $f > 2$ die Ebene desarguessch, und für $f = 2$ gibt es genau drei Scharen nicht desarguesscher Ebenen. Im Vortrag wurde $f \geq 1$ bewiesen und eine Schar nicht desarguesscher Ebenen mit $f = 1$ hergeleitet.

L.BRÖCKER: Über eine Klasse pythagoreischer Körper

Ein Körper K soll strikt-pythagoreisch heißen, wenn K und jede reelle quadratische Erweiterung von K pythagoreisch ist. Im Anschluß an eine Arbeit von Diller und Dress (Arch.Math.16) wird gezeigt, daß die strikt-pythagoreischen Körper mit mindestens einer archimedischen Anordnung höchstens 4 Quadratklassen besitzen.

F.BUEKENHOUT: On transitive groups without symmetric pairs

Let G be a finite transitive permutation group on Ω , i the maximal number of fixed points of an involution in G, $i \geq 2$. Let an i-involution be an involution of G fixing i points and an i-block be the set of fixed points of an i-involution. G is said to have no symmetric pair if each involution of G leaving an i-block invariant fixes each point on this block. If G has no symmetric pairs then G acts on the set D of all i-blocks as a transitive group whose involutions are fixing just one element of D, each involution is an i-involution and one of the following occurs:

(1) $O(G) \neq 1$ and a 2-Sylow subgroup of G has exactly one involution;
(2) the set D of all i-blocks is a partition of Ω on which G/K is 2-transitive and normalizes a group $PSL_2(2^e)$, $Sz(2^e)$ or $PSU_3(2^e)$ in its natural representation;
(3) G normalizes a group $PSU_3(2^e)$ acting on the dual incidence structure of the unital underlying $PSU_3(2^e)$; in this case $i = 2^{2e}$ and $e > 1$.

P.J.CAMERON: On groups with two triply transitive permutation representations

Suppose the group G has inequivalent transitive representations on X and Y, with $|X| = |Y| = n \geq 4$, and only the identity fixes X and Y pointwise. If G is doubly transitive on X and intransitive on $X \times Y$, then symmetric designs can be used in investigations. We assume G is triply transitive on X (whence it is transitive on $X \times Y$) and the representations of G_{xy} on $X - \{x\}$ and $Y - \{y\}$ are equivalent $(x \in X,\ y \in Y)$. Then eithers (a) $n = 6$, $G = S_6$ or A_6, or (b) $n = 2^m$, $m \geq 2$, $G \leq [V(m,2) \oplus V(m,2)]\ GL(m,2)$. Tools in the proof are Moore graphs (in case (a)) and Latin squares (in case (b)). A variation characterising S_6, A_6, and M_{12}, using also extensions of symmetric designs and Hadamard matrices, was mentioned.

J.DOYEN: Some minimal problems on t-designs

a) R.M.Wilson proved recently that in any $S_\lambda(t,k,v)$ with $k \leq v - [\frac{t}{2}]$, the number b of blocks satisfies the inequality $b \geq \binom{v}{[\frac{t}{2}]}$. A t-design is called tight if $b = \binom{v}{[t/2]}$. Tight 2-designs are the usual symmetric 2-designs. The only examples of tight 4-designs known at present are the $S(4,7,23)$, its complement and the trivial $S_{\binom{v-4}{2}}(4, v-2, v)$. Are there any other examples? (if there are, the parameter k must be very large).

b) Let a Noda system be a non trivial Steiner system $S(t,k,v)$ in which any two blocks have a non-emty intersection. Noda has shown that the only Noda systems with $3 \leq t \leq 5$ are the $S(4, 5, 11)$ and the $S(4, 7, 23)$. The only other possible Noda system with $6 \leq t \leq 10$ would be an $S(10,11,23)$. Is a Noda system with $t = 11$ necessarily an $S(t,t+1,2t+3)$?

A.GARDINER: Groups generated by 3,6 - transpositions

B.Fischer has classified finite groups G satisfying:
(i) G is generated by a conjugacy class D of involutions such that $d,e \in D$ implies $o(de) \in \{1,2,3\}$.
(ii) $Z(G) = O_2(G) = O_3(G)$. Such groups G contain another class of involutions, $T(G) = T = \{de: d,e \in D, o(de) = 2\}$, with the property that
(iii) $t_1, t_2 \in T$ implies $o(t_1 t_2) \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Thus if we wish to consider subgroups of the groups G classified by Fischer, it would be useful to have a classification of groups F generated by a class T of involutions satisfying (iii). Aschbacher and Timmesfeld have made much progress in this direction. However the inclusion of the possibility that products t_1,t_2 of elements of T have even composite order robs us of many of the techniques developed in the other cases. In particular if F is generated by a class T of

involutions satisfying, (iv) $t_1, t_2 \in T$ implies $o(t_1 t_2) \in \{1,2,3,6\}$, then no examples are known where 6 actually occurs except for (a) certain soluble groups and (b) certain subgroups of direct products of groups arising in Fischer's classification. We have proved, that groups F satisfying (iv) and (v) $O_2(F) = O_3(F) = Z(F)$ which arise as subgroups of some group G occurring in Fischer's classification with $T \subseteq T(G)$ are all of type (b).

D.G. HIGMAN: Orthogonality relations for coherent configurations

We obtain orthogonality relations for the irreducible characters and for the coefficients of the irreducible representations of the centralizer algebra of a coherent configuration, and discuss some applications.

R. HILL: Rank 3 groups with a regular normal subgroup, and associated geometries

We discuss problems classifying subgroups of $PGL(n,q)$ which act on $PG(n-1,q)$ with a small number of orbits, and highly-transitively on one of them. Our approach is via rank 3 permutation groups with a regular normal elementary abelian subgroup. Use is made of the interplay of such groups with the theories of S-rings and of caps.

X. HUBAUT: New 4-designs

Two families of 4-designs generalizing those constructed by W.O.Alltop have been discussed.
Let P the projective line over $GF(2^n)$. If p is a point of P, $P-\{p\}$ has a structure of an affine geometry $AG(n,2)$. Let $B_o = \{$m-dimensional subspaces of $AG(n,2)\}$, and B the orbit of B_o under the action of $PSL_2(2^n)$; then B is the set of blocks of a 4-design $S_\lambda(4,2^m,2^n+1)$ with $\lambda = (2^n-3) \prod_{i=2}^{m-1} \frac{2^{n-i}-1}{2^{m-i}-1}$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Let $B_o' = \{m\text{-subspaces of } AG(n,2) \smile \{p\}\}$ and B' the orbit of B_o' under $PSL_2(2^n)$; then if $m \nmid n$, B is the set of blocks of $S_\lambda(4, 2^m+1, 2^n+1)$ with $\lambda = (2^n+1) \prod_{i=2}^{m-1} \frac{2^{n-i}-1}{2^{m-i}-1}$ if $m > 2$ and $\lambda = 5$ if $m = 2$.

O.IDEN: <u>Subplanes of free planes</u>

Let $F(J)$ be the free completion of a partial plane J . The partial subplanes $J_n, n=0,1,\dots,$ of $F(J)$ are defined inductively by $J_o = J$, $J_{n+1} \supset J_n$ and is the minimal extension of J_n with the property: any pair of lines of J_{n+1} intersect in J_{n+1} when n is even, any pair of points of J_{n+1} are on a line of J_{n+1} when n is odd. We can identify the points (or lines) of J_{n+1} with the pair of lines (or points) which define it and belong to J_n . Let τ be a subplane of $F(J)$. The τ-closure S^τ of S is the minimal partial subplane K of $F(J)$ which has the properties 1) $K \supset S$, 2) $x \in y$, $y \in K$, $x \in \tau$ implies $x \in K$. The canonical basis for τ is defined as $C = \bigcup_{k=o}^{\infty} C_k$ where $C_o = J_o \cap \tau$, $C_{k+1} = C_k \cup M_{k+1}^\tau$ where $M_{k+1} = J_{k+1} \cap \tau - [C_k]$. Clearly C_o is complete in J_o and $z \in M_k$, $k \geq 1$, implies that

(i) $y = \{w_1, w_2\} \in z, y \notin [C_{k-1}] \Longrightarrow w_i \notin [C_{k-1}], i=1,2$.

(ii) $n \in M_k \cup C_{k-1} \Longrightarrow zn = \{z,n\}$ or $zn \in [C_{k-1}]$.

It is <u>proved</u> that a partial subplane of $F(J)$ which is built upon a partial subplane C_o complete in J_o by the rule $C_{k+1} = C_k \cup M_{k+1}$ where M_{k+1} is the $[C_k]$ -closure of a subset of $J_k - [C_{k-1}]$ which satisfies (i) and (ii) is the canonical basis for the subplane it generates.

O.H. KEGEL: Transitive Einbettungen projektiver Ebenen.
(mit A. Schleiermacher)

Seien χ und $\daleth$ Kardinalzahlen von denen mindestens eine ≥ 1 ist, dann bezeichne $(\chi, \daleth)$ die ausgeartete projektive Ebene, in der χ Punkte mit einer Geraden und $\daleth$ Geraden mit einem Punkt inzident sind. Ist $\chi > 2$, so bezeichne Δ_χ die ausgeartete projektive Ebene, deren Punkte, außer einem, auf einer Geraden liegen, die Gesamtzahl der Punkte von Δ_χ ist χ.

Für jedes vorgegebene Paar von Kardinalitäten χ, $\daleth$ läßt sich jede projektive Ebene E einbetten in eine projektive Ebene $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, so daß Aut E $\lneqq$ Aut $\mathcal{P}$ und daß Aut $\mathcal{P}$ transitiv operiert auf der Menge der Konfigurationen vom Typ $(\chi, \daleth)$ (bzw. Δ_χ) in $\mathcal{P}$. Außerdem wurden vierecks-transitive Einbettungen diskutiert.

R. LINGENBERG: Charakterisierungen metrischer Ebenen durch Beweglichkeitsaxiome

In den heute weithin üblichen axiomatischen Grundlegungen der ebenen metrischen Geometrie steht als wichtigstes Axiom der Satz von den drei Spiegelungen. Es wird vorgeschlagen, dieses Axiom durch Beweglichkeitsaxiome zu ersetzen, und es werden als Beispiele die hyperbolisch-metrischen Ebenen, sowie die euklidischen und minkowskischen Ebenen behandelt.

D. LIVINGSTONE: On the definition of the Conway groups.

The definitions of the Conway groups and the Leech lattice were reviewed.
The talk was intended as a challenge to the geometers. There seems every reason to believe that more elegant descriptions of the two larger groups are possible, and of these can be given in a form minimizing the spezial rôle of M_{24}, they should prove of assistance in the search for analogous situations in higher dimensions.

P.J. LORIMER: Doubly transitive subsets of special doubly transitive groups.

A set R of permutations on a finite set Σ is called sharply doubly transitive if $1 \in R$ and if whenever $a,b,c,d \in \Sigma, a \neq b, c \neq d$, there is a unique member r of R with $r(a) = c$ and $r(b) = d$. Because Σ is finite the existence of such a set is equivalent to the existence of a projective plane having order the cardinality of Σ. We report that none of the following groups (in their usual doubly transitive representations) contains a sharply doubly transitive subset: $P\Gamma L(n,q)$, $n \geq 2$, $q \geq 5$; $AutPU(3,q)$, $q \geq 3$; $AutR(q)$; $Sz(q)$, where $R(q)$ is any group of Ree type and $Sz(q)$ is any Suzuki group.

If such a set R generates a group G of permutations on Σ and only the involutions of G transpose symbols of Σ then the plane corresponding to R is a translation plane.

H. MÄURER: Kreisspiegelungen in Möbiusebenen

Es wurden Möbiusebenen untersucht, in denen an jedem Kreis k ein Automorphismus $\sigma_k \neq 1$ existiert, der k punktweise festläßt: Liegt jede aus 4 Punkten bestehende, σ_k-invariante Menge auf einem Kreis und existieren 2 sich berührende Kreise k,l mit $l^{\sigma_k} \neq l$, so ist die Möbiusebene miquelsch.

U. MELCHIOR: Laguerre-Geometrie und streng-reguläre Graphen

Die Geometrie γ der totalisotropen Teilräume einer Polarität vom Index 2 im projektiven Raum $PG(n,p^i)$ wurde für $p \neq 2$ durch das Transitivitätsverhalten ihrer linearen Gruppe und durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß in jedem Kegel von γ eine Laguerre-Geometrie induziert wird.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M.P. Ng: <u>Transitive permutation groups of degree $3q + 2$, q being a prime number</u>

<u>Theorem:</u> If G is a transitive group of degree $3q + 2$, where q is a prime number and $q \mid |G|$, $q > 3$, then G is 3-fold transitive.

But only the proof for the special case when $p = 3q + 2$ is also a prime number is given. The proof follows the following main lines:

<u>Assumption:</u> G is not alternating or symmetric.

Let G act on Ω.

(1) G is doubly transitive (by Burnside's Theorem).

(2) $q^2 \nmid |G|$ and an element of order q in G has 3 q-cycles.

(3) G_a is primitive on $\Omega - \{a\}$.

Suppose G is not 3-fold transitive. Then

(4) $G_{a,b}$ has orbits of lengths 1, q and $2q$ on $\Omega - \{a\}$.

(5) $(1_{G_{a,b}})^{G_a}$ has irreduzible constituents of degrees 1, q and $2q$.

(6) $q = 5$ and $p = 7$. (Use D.G.Higman's results on groups of rank 3).

(7) G is 3-fold transitive (by a Theorem of P.Neumann).

H. SALZMANN: <u>Charakterisierungen der komplexen projektiven Ebene</u>

Es sei $\mathcal{P}$ eine kompakte topologische projektive Ebene mit 4-dimensionaler Punktmenge, Γ die Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$ versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, daß $\mathcal{P}$ desarguessch ist:

(1) $\dim \Gamma > 8$

(2) Γ hat eine Untergruppe $\Delta \cong PSL_3(R)$

(3) Γ hat eine 8-dimensionale Untergruppe Δ mit mehr als einem Fixelement.

Läßt Δ im Fall (3) genau eine Fahne fest, so ist $\mathcal{P}$ oder die duale Ebene $\bar{\mathcal{P}}$ eine Translationsebene, und der desarguessche Satz ergibt sich aus BETTEN's Klassifikation aller echten Translationsebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe.

J.J. SEIDEL: E.E. Shult's characterization of symplectic and orthogonal geometries over GF(2)

A graph has the triangle property if for every adjacent pair of vertices a,b there exists a vertex c , adjacent to a and to b, such that any further vertex x is adjacent to one or three of $\{a,b,c\}$.

Shult's theorem: The only regular graphes having the having the triangle property are the following: the complete graph, the void graph, the graphs obtained from the symplectic and from the orthogonal geometries over GF(2).

Our proof uses matrix methods, switching off graphs, and regular 2-graphs.

K. STRAMBACH: Nichtkompakte Graphen

Es wurden auf der Ebene realisierbare Graphen mit nichtkompaktem Fundamentalbereich studiert und mit ihrer Hilfe die Struktur der ebenen diskontinuierlichen Gruppen ohne kompakten Fundamentalbereich, aber mit endlichen Standgruppen bestimmt.

Th. Bedürftig (Tübingen)