MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

# Tagungsbericht 21|1972

## Grundlagen der Geometrie

21.5. bis 27.5.1972

Unter Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel) und E. Sperner (Hamburg) fand die Tagung über "Grundlagen der Geometrie" in diesem Jahr vom 21. bis 27. Mai statt.

Alle Teilnehmer sind der Leitung des Instituts dafür dankbar, dass sie ihnen auch in diesem Jahr Gelegenheit gegeben hat, in der angenehmen Oberwolfacher Atmosphäre Ergebnisse und Probleme geometrischer Forschung in Vorträgen und Diskussionen zu besprechen.

Die jährlichen Oberwolfacher Tagungen über die "Grundlagen der Geometrie" gehen auf eine Initiative von W. Süss zurück und können nun auf eine längere Tradition zurückblicken; mancher von denen, die mehrfach an diesen Tagungen teilgenommen haben, wird etwas wehmütig daran denken, dass aller Voraussicht nach die diesjährige Tagung die letzte gewesen sein wird, bei der die Vorträge in dem alten, mit vielen Erinnerungen verbundenen Institutsgebäude stattfinden konnten.

Teilnehmer

J. André, Saarbrücken
H.-J. Arnold, Bochum
F. Bachmann, Kiel
L. Bröcker, Kiel
Y. Chen, Waterloo
J. Cofman, Tübingen
K.J. Dienst, Darmstadt
G. Dühl, Hamburg
E. Ellers, München
A. Giuculescu, Bukarest
M. Götzky, Kiel
H. Groh, Aachen
G. Günther, Toronto/Kanada
H. Hischer, Saarbrücken
K. Johnsen, Kiel
J. Joussen, Dortmund
W. Junkers, Bonn
H. Kinder, Kiel

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

G. Kist, Hannover
P. Klopsch, Kiel
J. Küsel, Hamburg
K. Meyer, München
J. Nalbach, Saarbrücken
Patton, Toronto/Kanada
I. Pieper, Hannover
E. Salow, Kiel
H. Salzmann, Tübingen
E. Schröder, Hamburg
W. Seier, Hamburg
E. Sperner, Hamburg
R. Stölting, Kiel
K. Strambach, Tübingen
O. Tamaschke, Tübingen
Thomsen, Hamburg
Timm, J., Bremen
G. Törner, Giessen
H. Wähling, Hamburg
A. Wagner, Hamburg
H. Wefelscheid, Hamburg
H. Wolff, Kiel

## Vortragsauszüge

### J. ANDRÉ: F-Gruppen und ihre Geometrien

Eine Struktur $(V,+,F)$ heisst F-Gruppe, wenn (1) $(V,+)$ eine Gruppe ist, (2) $F \subseteq \mathrm{End}\,V$, (3) $0,1,-1 \in F$, (4) $F \setminus \{0\} \leq \mathrm{Aut}\,V$ gilt und (5): aus $x\alpha = 0$ bzw. $x\alpha = x$ für ein $x \in V \setminus \{0\}$ $(\alpha \in F)$ folgt $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$. Ein affiner Raum über einer F-Gruppe $V$ ist eine Inzidenzstruktur, deren Punkte die Elemente aus $V$, deren Linien (Blöcke) die Teilmengen der Form $uF + v$ mit $u,v \in V$, $u \neq 0$ sind und deren Inzidenz durch $\in$ gegeben ist. Es werden Eigenschaften dieser Räume angegeben und diese geometrisch vollständig gekennzeichnet für den Spezialfall, dass $F$ ein Fastkörper und $V$ als direkte Summe von Unterräumen der Form $uF$ mit $u \in V \setminus \{0\}$ und $u(\alpha + \beta) = u\alpha + u\beta$ für alle $\alpha, \beta \in F$ darstellbar ist (sog. reguläre F-Rechtsvektorräume).

### H.-J. ARNOLD: Semiaffine Spernersche Räume

Bewiesen wurde: Zu jeder projektiven Ebene $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in)$ lässt sich ein schwach affiner Raum (in Gestalt eines schwach affinen Richtungsfeldes $(V, \mathfrak{P})$) konstruieren [d.h. es lässt sich eine Menge $V = \{A, B, \ldots\}$ finden, auf der die Elemente $\sqsubset \in \mathfrak{P}$ Äquivalenzrelationen $(A \sqsubset B \vee \neg A \sqsubset B)$ sind mit (1) $\bigwedge_{A \neq B} \bigvee^{1}_{\sqsubset} A \sqsubset B$, (2) $\bigvee_{s \geqq 2} |A + \sqsubset| = s$, wobei $A+\mathfrak{c} := \{B \mid A \sqsubset B\}$ sei], so dass für einen Punkt $O \in V$ die Verbindungsgeraden $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \in \mathcal{G}$ in der Form $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \{\mathfrak{c} \mid O+\mathfrak{c} \subset O + \mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}\}$ geschrieben werden können. (Dabei bezeichne $\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}$ die Verbindungsrelation von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$).

Daraus folgt, dass sich jede projektive Ebene in einen semi-affinen Spernerschen Raum einbetten lässt. Die Parameter der Konstruktion lassen die Kennzeichnung solcher Spernerschen Räume zu, in denen die Gültigkeit des Satzes von Desargues (im Raume) aus seiner Gültigkeit in einer Teilebene gefolgert werden kann. -

L.BRÖCKER: Kinematische Räume

Betrachtet werden Inzidenzgruppen $G$ , welche Teilmengen eines desarguesschen projektiven Raumes $P$ sind, derart, dass $P \setminus G$ eine Punktmenge von der Ordnung 2 ist, d.h.: Jede Gerade, die nicht ganz in $P \setminus G$ liegt, schneidet $P \setminus G$ in höchstens 2 Punkten. Wenn das Invertieren in $G$ eine Kollineation bewirkt, heisst das Objekt $P,G$ ein "kinematischer Raum".
Es wird gezeigt:
Die kinematischen Räume entsprechen (bis auf zwei wohlbestimmte Klassen) 1-1-deutig den unitären Algebren über Körpern, in denen jeder 2-dim.Teilraum, der die Eins enthält, eine Unteralgebra ist.

Diese Algebren werden vollständig klassifiziert. Die einfachen sind: Die Quaternionenschiefkörper und die 2x2 Matrixringe über Körpern. Alle anderen besitzen ein Radikal der Codimension $\leq 2$ mit trivialer Multiplikation. Insbesondere fallen unter die kinematischen Räume die Gruppenräume der engeren orthogonalen Gruppen zur Dimension 3.

Y.CHEN: Eine Kennzeichnung gewisser quadratischer Algebren bzw. gewisser Kettengeometrien auf Grund von Doppelverhältnissen

Auf Grund von Doppelverhältnissen machte W. Benz in J. reine angew.Math.199 (1958) 56-90 eine Kennzeichnung der Kreisgeometrie über einem Körperpaar. Hier wollen wir das entsprechende tun für die folgenden Kettengeometrien über $\mathfrak{A}(K)$: K sei ein kommutativer Körper $\mathfrak{A}(K)$ eine quadratische Algebra über K mit Eins von $\mathfrak{A}(K)$ gleich Eins von K . Punkt heisse jeder Punkt der projektiven Gerade über $\mathfrak{A}(K)$. Kette heisse jedes Bild der projektiven Geraden bei einer Transformation aus $PGL(2,\mathfrak{A}(K))$. Als Zusatz erhalten wir eine Kennzeichnung der Algebra $\mathfrak{A}(K)$. Zur Beweismethode sei zu erwähnen: Benz führte einen Doppelverhältniskalkül ein und leitete das Körperpaar ab, ohne sozusagen auf die Existenz der Geometrie zu achten. Hier dagegen müssen wir vor allem die Geometrie konstruieren und den Satz von MIQUEL nachweisen (im Falle der Ordnung der Geometrie $\geq 7$).

G.DÜHL: <u>Eine Darstellung der affinen Ebenen durch verallgemeinerte Vektorräume</u>

Die zweidimensionalen Vektorräume über Schiefkörpern stellen bekanntlich genau die desarguesschen affinen Ebenen dar, wenn man die Vektoren als Punkte und die Nebenklassen der eindimensionalen Teilräume als Geraden nimmt. Es wird angegeben, wie man (unter Beibehaltung einer vektoriellen Addition und einer skalaren Addition und Multiplikation sowie einer Multiplikation Vektor mal Skalar) die Axiome des Vektorraumes abschwächen kann, so dass die allgemeine (nicht notwendig desarguessche) affine Ebene als zugehörige Geometrie entsteht. Als Illustration wird eine Charakterisierung der Translationsebenen durch die zugehörigen verallgemeinerten Vektorräume angegeben.

E.ELLERS: <u>Unitäre Bewegungen für Charakteristik 2</u>

Es ist bekannt, dass Bewegungen in metrischen Vektorräumen durch Spiegelungen dargestellt werden können. Lediglich für den Fall, dass der Koordinatenkörper die Charakteristik 2 hat und die Bilinearform symmetrisch ist, war bisher nichts bekannt. Es ist hier bewiesen worden, dass für Räume deren Dimension 3 nicht übersteigt, die engere Bewegungsgruppe von Spiegelungen an Geraden erzeugt wird. Damit ist eine in einer Arbeit von Dienst offen gebliebene Frage beantwortet. Ausserdem wird gezeigt, dass für symplektische Räume beliebiger Dimension die engere Bewegungsgruppe von Spiegelungen an Geraden erzeugt wird, die nicht im Radikal enthalten sind.

H.GROH: <u>Moebius planes with locally euclidean circles are flat</u>

In 1970, a construction principle due to W. HEISE yielded a new class of Moebius planes (MRI meeting "Grundlagen der Geometrie" 70). This class contains members all of whose substructures are copies of the ordinary (desarguesian) projective plane over the complex field $\mathbb{C}$ resp. quaternion field $\mathbb{H}$. The existence of natural topologies for these fields raised the question whether <u>topological</u> Moebius planes with corresponding (4-resp. 8-dimensional) point spaces P do exist. K. STRAMBACH conjectured that this is not so, and repeated this one year later in a talk ("Algebraische Ebenen", MRI meeting "Grundlagen der Geometrie" 71). - Here we prove that this conjecture is true for dim P = 4 , and, under the additional assumption that circles are locally euclidean, for the remaining dimensions 8 and 16.

H.HISCHER: <u>Erzeugendensysteme und der a-Dimensionssatz in atomaren, modularen Verbänden</u>

In atomaren, modularen Verbänden lässt sich neben der üblichen Dimension, die über Ketten definiert wird, eine davon abweichende über Atome einführen, die zur Unterscheidung a-Dimension genannt wird. Zum Beweis des Dimensionssatzes für die a-Dimension blieb eine Frage offen, die O. Tamaschke in Projektive Geometrie B.I. Hochschultaschenbücher Bd. 38/38a Mannheim 1967, Seite 46, als Problem formulierte. Es lautet: Ist stets $E_x \cup E_y$ ein Erzeugendensystem von $x \cup y$ , wenn $E_x$, $E_y$ Erzeugendensysteme von x bzw. y sind?

Dies wird durch ein Beispiel widerlegt, das sich darüber hinaus als charakteristisch für solche Verbände erweist, die die obige Eigenschaft von Erzeugendensystemen nicht aufweisen. In längenendlichen, modularen Verbänden ist diese Eigenschaft sogar gleichwertig mit der Gültigkeit des Dimensionssatzes für die a-Dimension.

K.JOHNSEN: Endliche Gruppen mit nichtelliptischer Spiegelungsgeometrie

Es wurden die endlichen involutorisch erzeugten Gruppen charakterisiert, in denen es eine nicht leere, invariante Menge P von Involutionen I gibt, für die gilt:

(i) $P^2 \cap I = \emptyset$, (ii) $(I \setminus P)^2 \cap I = P$, (iii) $G_{ger} = \{ g \mid g = \prod_{i=1}^{2k} x_i ,\ x_i \in I \setminus P \} \trianglelefteq_2 G$. Es treten dann folgende Fälle auf:

(A) $G_{ger}/O_{2'}(G) \cong Z_{2^n}$

($B_1$) $G_{ger}/O_{2'}(G) \cong Q_{2^n}$.

($B_2$) $G_{ger}/O_{2'}(G) \cong A_7$.

($B_3$) $G_{ger}/O_{2'}(G) \cong SL(2,q)$, q ungerade.

W.JUNKERS: Eine Kennzeichnung der desarguesschen projektiven Ebenen mit Hilfe des Satzes von Menelaos

Sei $\mathcal{P}$ eine projektive Ebene und $\mathcal{G}$ eine Gruppe. Ein $\mathcal{G}$-Verhältnis in $\mathcal{P}$ ist eine Abbildung, die jedem geordneten Tripel kollinearer Punkte O,A,B von $\mathcal{P}$ ein - hier mit O(A,B) bezeichnetes - Element aus $\mathcal{G}$ derart zuordnet, dass gilt: $O(A_1,A_2) \cdot O(A_2,A_3) = O(A_1,A_3)$ für je vier kollineare Punkte $O, A_1, A_2, A_3$ mit $O \neq A_1, A_2, A_3$.
Bezüglich einer solchen Abbildung verstehen wir unter dem Satz von Menelaos die Aussage: Sind A,B,C die Ecken eines Dreiecks und A*, B*, C* von diesen verschiedene Punkte auf den Gegenseiten von A bzw. B bzw. C, so gilt $A^*(B,C)\ B^*(C,A)\ C^*(A,B) = 1$ genau dann, wenn A*, B*, C* kollinear sind. - Wir beweisen den folgenden

Satz: Eine projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist genau dann desarguessch, wenn es eine Gruppe $\mathcal{G}$ gibt und dazu ein $\mathcal{G}$-Verhältnis in $\mathcal{P}$, für das der Satz von Menelaos gilt.

H.KINDER: Eine Hjelmslevgruppe

In der Automorphismengruppe G der Pappus-Konfiguration (9 Geraden, 9 Punkte, die üblichen 27 Inzidenzen) gibt es drei Klassen konjugierter Involutionen, die Menge $S_1$ der 9 Geradenspiegelungen, die Menge $S_2$ der 9 Punktspiegelungen, die Menge $S_3$ der 9 "Büschelpaarspiegelungen" (Fixpunkte: 3 unverbundene Punkte; Fixgeraden: 3 nichtschneidende Geraden). $(G, S_1 \cup S_2)$ ist eine nichtsinguläre Hjelmslevgruppe im Sinne von Bachmann. $(G, S_1 \cup S_3)$ und $(G, S_2 \cup S_3)$ sind (isomorphe) singuläre Hjelmslevgruppen.

J.KÜSEL: Archimedisch angeordnete schwach affine Räume

Für schwach affine Räume $\mathfrak{A}(S)$ über Skalarensysteme $S(+,\cdot)$ wurde der folgende Zusammenhang zwischen der geometrischen Anordnung von $\mathfrak{A}(S)$ und der algebraischen Anordnung von $S(+,\cdot)$ festgestellt:

Satz 1: Ist $\mathfrak{A}(S)$ $(\tau)$ $(X,Y)$-angeordnet, so ist $S(+,\cdot)$ bzgl.

$P_\tau := \{ x \in F \mid (0,0)((1,0),(x,0)) = 1 \}$ angeordnet.

Satz 2: Ist $S(+,\cdot)$ bzgl. P angeordnet, so ist $\mathfrak{A}(S)$ bezgl.

$$\tau_P((a_1,a_2),((b_1,b_2),(c_1,c_2))) := \begin{cases} sg(-b_1+a_1)\ sg(-c_1+a_1), & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ sg(-b_2+a_2)\ sg(-c_2+a_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

$(X,Y)$-angeordnet.

Satz 3: $\mathfrak{A}(S)$ ist genau dann bzgl. $\tau$ voll-angeordnet, wenn $S(+,\cdot)$ bzgl. $P_\tau$ voll-angeordnet ist.

Schliesslich wurde der Satz von Pickert: jede archimedisch angeordnete Translationsebene ist $\sigma$-isomorph zu einer Unterebene der reellen affinen Ebene verallgemeinert:

Satz 4: $\mathfrak{A}(S)$ ist genau dann bzgl. $\tau$ archimedisch $(X,Y)$-angeordnet, wenn $\mathfrak{A}(S)(\tau)$ $\sigma$-isomorph zu einer Unterebene der reellen affinen Ebene ist.

K.MEYER: Henkelgeometrien

$(\mathcal{P},\mathcal{L},\in)$ sei eine Inzidenzstruktur. Für alle $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{P}$ sei $[\mathcal{G}] := \{C\in\mathcal{L} : C\ni P \ \forall P\in\mathcal{G}\}$. $[P_1\ldots P_i]$ mit $P_j\in\mathcal{P}$ hat die Eigenschaft $\alpha_n$ (i.Z. $o([P_1\ldots P_i]=\alpha_n)$, wenn es für alle $Q\in\mathcal{P}\setminus\{P_1,\ldots,P_i,R_1,\ldots,R_n\}$ und gewisse $R_j\in\mathcal{P}$ genau ein $C\in[P_1,\ldots,P_i]$ mit $C\ni Q$ gibt. Ist $o([P_1,\ldots,P_i]) = \alpha_n$ und $o([P_1,\ldots,P_i]) \neq \alpha_{n-1}$, so nennt man $[P_1,\ldots,P_i]$ ein Büschel mit den Trägerpunkten $P_1,\ldots,P_i,R_1,\ldots,R_n$.

Über die Inzidenzen der ebenen (reellen), mehr als einpunktigen Schnitte eines Torus werden die folgenden Eigenschaften festgestellt:

1) $o([P_1,\ldots,P_4]) = \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ 1 \text{ oder} \\ \alpha \end{cases}$; $o([P_1,P_2,P_3]) = \begin{cases} 1 \text{ oder} \\ \alpha_1 \end{cases}$; $o([P_1,P_2])=\alpha_2$

2) Es gibt $C\in\mathcal{L}$, die $\mathcal{P}$ trennen und es gibt mindestens zwei $C^j\in\mathcal{L}$, die $\mathcal{P}$ nicht trennen.

Die Trenneigenschaft wird zur Unterscheidung von Berühren und Schneiden von Kurven benutzt.

3) Gibt es zu einem $Q\notin C$ und $B\in C$ genau ein $C_1\ni Q$, das $C$ in $B$ berührt, so bestimmen $B$ und $C$ sein Berührbüschel.

4) Ist $o(C_1\cap C_2) = 1$, so ist zwischen $C_1$ und $C_2$ genau 1 Berührung und kein Schnitt.
   Ist $o(C_1\cap C_2) = 2$, so sind zwischen $C_1$ und $C_2$ genau 2 Berührungen oder 2 Schnitte
   Ist $o(C_1\cap C_2) = 3$, so sind zwischen $C_1$ und $C_2$ genau 1 Berührung und 2 Schnitte
   Ist $o(C_1\cap C_2) = 4$, so sind zwischen $C_1$ und $C_2$ keine Berührung und 4 Schnitte.

5) Reichhaltigkeitsaussage, z.B.: Zu je zwei beliebigen Punkten gibt es mindestens eine sie trennende Kurve.

Eine Inzidenzstruktur mit den Eigenschaften 1) bis 5) heisse Henkelgeometrie. Offenbar trägt jede Henkelgeometrie eine Topologie mit T2.

I.PIEPER: Endliche geschlitzte Gruppenräume

Unter einem endlichen geschlitzten Gruppenraum verstehen wir eine endliche geschlitzte Inzidenzgruppe $(G,\mathcal{G},\cdot)$, in denen die Gruppe der Linkstranslationen transitiv auf der Menge der Fernpunkte operiert und in denen der affine Kern $\underline{1}$ ein Normalteiler ist. Wenn der Fernraum $\Lambda$ nicht leer ist, so gilt $|G| = 1+2 \dim \Lambda \geq 3$ und $\underline{1}_1$ ist die Translationsgruppe auf $\underline{1}$. Im Gegensatz zum projektiven Fall gilt

1. Es gibt endliche Inzidenzgruppen, die keine Gruppenräume sind.

2. Es gibt zweiseitige endliche Gruppenräume, die nicht abelsch sind.

Mit Hilfe der algebraischen Darstellung geschlitzter Inzidenzgruppen kann man auf jedem abelschen Gruppenraum alle Abbildungen $\varphi: G \longrightarrow A(G,\mathcal{G},\cdot)$ angeben, für die $(G,\mathcal{G},*)$ mit $a*b = a\cdot b^{(a^{\varphi})}$ ein Gruppenraum ist. Diese "abgeleiteten" Gruppenräume können intern gekennzeichnet werden.

E.SALOW: Koordinateneinführung in Hjelmslev-Gruppen

Ist R ein kommutativer Ring mit 1, so sei für $x \in R^3, f \in R^{3*}$ definiert: $x \text{ I } f :\longleftrightarrow xf = 0$. Rx heisst Punkt der Inzidenzstruktur P(R), wenn x unimodular ist und mit einem unimodularen $f \in R^{3*}$ inzidiert. Die Geraden von P(R) werden dual erklärt.

Sei (G,S) eine nichtelliptische Hjelmslev-Gruppe mit: 1. Zwei Punkte haben stets eine Verbindungsgerade. 2. Es gibt Geraden a,b,c,d mit $a|b$ und $c|d$, die sich paarweise eindeutig schneiden. 3. Auf jeder Geraden gibt es Punkte A,B mit A fern B, d.h. derart, dass alle Verbindungsgeraden von A und B punktgleich sind. Dann gibt es einen kommutativen Ring R mit 1 und $\frac{1}{2}$, in dem jeder Nichtnullteiler Einheit ist, und eine Abbildung $\eta$ von der zu (G,S) gehörigen Inzidenzstruktur in P(R) mit $(A|b \longleftrightarrow A\eta \text{ I } b\eta)$ und $(g \text{ I } A\eta \longrightarrow g \in S\eta)$. Es sei zusätzlich vorausgesetzt: Es gibt Geraden a,b,c,d mit $a|b$; $b|c$; $c|d$ und ab fern bc fern cd, derart, dass das Lot von cd auf a die Gerade d eindeutig schneidet (bzw. punktgleich mit d ist). Dann gibt es einen Homomorphismus $\varphi$ von (G,S) in eine von Symmetrien erzeugte Untergruppe der orthogonalen Gruppe des metrischen R-Moduls $\langle k_1\rangle \perp \langle k_2\rangle \perp \langle k_3\rangle$ mit Einheiten $k_1, k_2, k_3$ (bzw. Einheiten $k_1, k_2$ und $k_3 = 0$). Der Kern von $\varphi$ ist $Z(G_{ger})$.

H.SALZMANN: <u>Baer-Unterebenen 4-dimensionaler Ebenen</u>

Die maximale Unterebene $\mathfrak{B}$ der projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ heisst Baer-Unterebene, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ auf einer Geraden von $\mathfrak{B}$ liegt und dual jede Gerade von $\mathfrak{P}$ durch einen Punkt von $\mathfrak{B}$ geht. Ist die topologische projektive Ebene $\mathfrak{P}$ (als Punktmenge) homöomorph zur komplexen Ebene $\mathfrak{C} = PG_2(\mathbb{C})$, so gilt

(1) liegt jedes Viereck von $\mathfrak{P}$ in einer abgeschlossenen Baer-Unterebene, die von einer Involution elementweise festgelassen wird, so ist $\mathfrak{P}$ desarguessch. [Ein analoger Satz gilt in endlichen projektiven Ebenen. (Cofman)].

(2) Lässt $\mathfrak{P}$ eine Kollineationsgruppe $\Delta \cong PSL_3(\mathbb{R})$ zu, so ist $\mathfrak{P} \cong \mathfrak{C}$ und $\Delta$ lässt eine abgeschlossene Baer-Unterebene $\mathfrak{B} = PG_2(\mathbb{R})$ fest. [Die analoge Situation bei endlichen Ebenen führt auf die HUGHES-Ebenen (Dembowski)].

E.SCHRÖDER: <u>Zur Darstellung kinematischer Räume</u>

Sei $G$ eine Gruppe, erzeugt von $E$, und $E_g$ bzw. $E_u$ die Menge derjenigen Elemente von $G$, die als Produkt einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Elementen aus $E$ darstellbar sind. Weiter sei $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in)$ ein projektiver Raum mit der Ebenenmenge $\mathfrak{E}$.
$(G, E, \Pi)$ heisst <u>kinematischer Raum</u>, wenn gilt:

(V) $x, y \in E \Longrightarrow x^2 = 1 \wedge xyx \in E$;

(E) $\mathfrak{P} \supset E_g \wedge \exists \langle\ \rangle : E_u \xrightarrow{1-1} \mathfrak{E}$; (I) $\forall_{\substack{\alpha \in E_g \\ \varepsilon \in E_u}} (\alpha \in \langle\varepsilon\rangle \Longleftrightarrow \alpha\varepsilon \in E)$;

(R) $g \in \mathfrak{G} \wedge g \cap E_g \neq \emptyset \Longrightarrow |g \setminus E_g| \leq 2$.

Eigenschaften: Ist $|E| \geq 4$, so ist entweder $G$ gleich dem Zentrum $Z$ von $G$, oder $G/Z$ ist isomorph zur Bewegungsgruppe einer metrischen Ebene. Jede Bewegungsgruppe einer projektiv-metrischen Ebene wird auf diese Weise erhalten. Ist $\varepsilon \in E_u$, so bestimmt $F = \langle\varepsilon\rangle \setminus E_g$ den Typ der Geometrie: $F = \emptyset$; elliptisch; $F = \{\xi\}$: euklidisch; $F \in \mathfrak{G}$: ausgeartet; $F \subset \mathfrak{G}$ mit $|F| = 2$: minkows-

kisch; F = nichtausgearteter Kegelschnitt: hyperbolisch.
$E_g(\cdot)$ ist algebraisch darstellbar durch $(A^E/K^*)(\cdot)$, wobei A eine assoz. Algebra über K mit $A^E$ als Einheitengruppe und einer Basis $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ ist, deren Multiplikation durch $e_1 \cdot e_1 = \alpha + \gamma e_1$, $e_1 \cdot e_2 = e_3$, $e_2 \cdot e_1 = -e_3 + \gamma e_2$, $e_2 \cdot e_2 = \beta$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gegeben ist. Umgekehrt gehört zu jeder so definierten Algebra A ein kinematischer Raum $(G_A, E_A, A^*/K^*)$.

R.STÖLTING: <u>Eine Klasse nicht-singulärer endlicher Hjelmslev-Gruppen</u>

Um endliche, nicht-singuläre Hjelmslev-Gruppen zu bekommen, kann man Erweiterungen von endlichen, singulären Hjelmslev-Gruppen (H,S) betrachten, und zwar solche, die zu Hjelmslev-Gruppen (G,S') führen, zu denen es einen punkttreuen Epimorphismus $\Phi: G \longrightarrow H$ gibt mit einem Kern ungerader Ordnung. Punkttreu bedeutet, dass $\Phi$ die Punkte bijektiv abbildet. Genau wenn die Restriktion $W_T$ einer solchen Erweiterung auf die (abelsche) Translationsgruppe $T = P^2$ von (H,S) nicht semidirekt ist, ist (G,S') nicht singulär. Jeder derartigen Restriktion einer Erweiterung auf T entspricht genau ein $g \in \mathrm{End}(T \wedge T)$ mit $\sum_{s \in S(0)} T_s \wedge T_s \subseteq \mathrm{Kern}\, g$, wobei S(0) die Geradenmenge durch einen Punkt O von (H,S) bezeichnet und $T_s \subset T$ die Menge der Translationen mit s als Fixgerade ist.

G.TÖRNER: <u>Hjelmslev-Ringe und die Geometrie der Nachbarschaftsbereiche in den zugehörigen Ebenen</u>

Ausgangspunkt der Untersuchungen des Vortragenden ist ein Konstruktionsprinzip für Hjelmslev-Ringe, den Koordinatenbereichen von desarguesschen Hjelmslev-Ebenen. Geeignete epimorphe Bilder von Bewertungsringen sind Hjelmslev-Ringe. Ein Satz von Klingenberg (1954), der diesen Zusammenhang betraf, war inkorrekt; eine Verbesserung und zugleich Verallgemeinerung wird angegeben. Die möglichen Idealstrukturen der Hjelmslev-Ringe legen die Einführung von verfeinerten Nachbarschaftsbereichen in den zugehörigen Hjelmslev-Ebenen nahe, wobei die dort induzierten Inzidenzstrukturen wieder desarguessche Hjelmslev-Ebenen sind. Dabei kommt den Annullatoren der Ideale in den Koordinatenringen eine zentrale Bedeutung zu. Von hier kann man auch die von Artmann eingeführten desarguesschen Hjelmslev-Ebenen n-ter Stufe charakterisieren.

A.WAGNER: Untergruppen von PSL(n,q)

Sei $S_{d,q}$ ein d-dimensionaler Raum über dem Körper $K, |K| = q = p^n$. $\Gamma$ sei Kollineationsgruppe von $S_{d,q}$. $\Pi^{\Gamma}_{A,Z}$ sei die Gruppe aller Elationen in $\Gamma$ mit Achse A und Zentrum Z.

1. Wie entstehen Elationen? Hilfssatz: $\Gamma$ sei Kollineationsgruppe von $S_{d+1,q}$ und $S_d$ Unterraum von $S_{d+1}$. $\Gamma^* = \Gamma_{S_d} | S_d$. Es existieren $A_1, A_2, Z_1, Z_2$ so dass $\Pi^{\Gamma^*}_{A_1,Z_1} \neq 1$, $\Pi^{\Gamma^*}_{A_2,Z_2} \neq 1$, $|\Pi_{A_1,Z_1}| > 3$, $Z_1 \notin A_2, Z_2 \notin A_1$. Dann lässt sich jede Elation in $\Pi^*$ erweitern zu einer Elation in $\Pi$.

Dies führt zu einer Verallgemeinerung von D.G.Higman Ill.J. Math.1962 Prop.6.

2. Was erzeugen Elationen? Satz: $\Gamma$ sei irreduzibel auf $S_{d,q}$. $\exists A,Z$ so dass $\Pi^{\Gamma}_{A,Z} \neq 1$. Ferner sei $|\Pi^{\Gamma}_{A,Z}| > 2$. Dann enthält $\Gamma$ $PSL(d,p^k)$ oder $Sp(d,p^k)$ oder $U(d,p^k)$. (Für den Fall $|\Pi^{\Gamma}_{A,Z}| = 2$ siehe J. McLangklin Ill.J.Math.1969.)

R. Stölting, Kiel