MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 22/1972

Höhere Geometrie

28.5. bis 3.6.1972

Unter der Leitung der Professoren R.Artzy (Philadelphia, USA), W.Benz (Bochum) und F.Rado (Cluj, Rumänien) fand die diesjährige Tagung über Höhere Geometrie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Sie erfreute sich reger Teilnahme, was insbesondere auch dadurch zum Ausdruck kam, daß Vertreter aus zehn Nationen anwesend waren. Dem großen Umfang des Gebietes entsprechend, betrafen die gehaltenen Vorträge sowie die anschließenden Diskussionen zahlreiche Einzelgebiete dieser Disziplin.

<u>Teilnehmer</u>

M.Anton, Philadelphia
H.-J.Arnold, Bochum
R.Artzy, Philadelphia
A.Barlotti, Perugia
W.Benz, Bochum
A.Blaszkowski, Bochum
R.C.Bose, Fort Collins
H.Brauner, Wien
J. van Buggenhaut, Brüssel
Y.Chen, Waterloo
L.J.Dickey, Waterloo
J.-P.Doignon, Brüssel
J.Doyen, Brüssel
L.Dubikajtis, Torun (Polen)
E.Ellers, München
B.Farrahi, Bochum
F.Giuculescu, Bukarest
H.Groh, Aachen
V.Günther, München
E.Hartmann, Darmstadt
W.Heise, Hannover
M.Hoffmann, Karlsruhe
H.Hotje, Hannover
X.Hubaut, Brüssel
W.Junkers, Bonn
H.Karzel, Hannover
W.Kerby, Hamburg
R.Koch, München
H.-J.Kroll, Hannover
H.Kunle, Karlsruhe
D.Laugwitz, Darmstadt
W.Leißner, Bochum
R.Lingenberg, Karlsruhe
H.Mäurer, Darmstadt
K.Meyer, München
M.Meyer, Karlsruhe
J.Misfeld, Hannover
W.Nolte, Darmstadt
R.L.Patton, München
G.Riggert, Bochum
H.Schaeffer, Bochum
P.Scherk, Karlsruhe
K.Sörensen, Hannover
N.K.Stephanidis, Thessaloniki
K.Strambach, Tübingen
L.Tamassy, Debrecen
H.Wefelscheid, Hamburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

E. ELLERS: Unitäre Bewegungen für Char. 2

Es ist bekannt, daß Bewegungen in metrischen Vektorräumen durch Spiegelungen dargestellt werden können. Lediglich für den Fall, daß der Koordinatenkörper die Char. 2 hat und die Bilinearform symmetrisch ist, war bisher nichts bekannt. Es ist hier bewiesen worden, daß für Räume, deren Dimension 3 nicht übersteigt, die engere Bewegungsgruppe von Spiegelungen an Geraden erzeugt wird. Damit ist eine in einer Arbeit von Dienst offengebliebene Frage beantwortet. Außerdem wird gezeigt, daß für symplektische Räume beliebiger Dimension die engere Bewegungsgruppe von Spiegelungen an Geraden erzeugt wird, die nicht im Radikal enthalten sind.

K. MEYER: Tensorprodukt von orthogonalen Vektorräumen

Es seien (V_i, q_i), $i = 1,2$, orthogonale Vektorräume der $\dim V_i = n_i < \infty$ über dem kommutativen Körper beliebiger Charakteristik. $q_i: V_i \to K$ seien quadratische Formen, d.h.

(1) $q_i(x\xi_i) = x^2 q_i(\xi_i)$ für alle $\xi_i \in V_i$ und

(2) q_i assoziiert mit der symmetrischen Bilinearform $f_i: V_i \times V_i \to K$ durch $f_i(\xi_i \eta_i) = q(\xi_i + \eta_i) - q(\xi_i) - q(\eta_i)$ für alle $\xi_i, \eta_i \in V_i$.

Jedes Element $X \in V_1 \otimes V_2$ läßt sich darstellen als

(3) $X = \sum_{i=1}^{\delta} \alpha_i \otimes \beta_i$ mit $\alpha_i \in V_1$, $\beta_i \in V_2$.

Hierfür definiert man eine Funktion $a: V_1 \otimes V_2 \to K$ durch

$$q(\alpha_i \otimes \beta_i) = q_1(\alpha_i) q_2(\beta_i) \tag{4}$$

$$q\Big(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \otimes \beta_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} q_1(\alpha_i) q_2(\beta_i) + \sum_{i<j}^{r} F(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j)$$

für $r \geq 2$, wobei $F: V_1 \times V_2 \times V_1 \times V_2 \to K$ erfüllt. (5)

$$F(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_i) = f_1(\alpha_i, \alpha_j)q_2(\beta_i) \text{ bzw.}$$
$$F(\alpha_i, \beta_i, \alpha_i, \beta_j) = q_1(\alpha_i)f_2(\beta_i, \beta_j) \qquad (6)$$

$$F(x\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) = xF(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \qquad (7)$$

$$F(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) + F(\alpha_i, \beta_j, \alpha_j, \beta_i) = f_1(\alpha_i, \alpha_j)f_2(\beta_i, \beta_j)$$

für alle $\alpha_i \in V_1$, für alle $\beta_i \in V_2$. (8)

Es wird gezeigt:

1. q ist unabhängig von der Darstellung (3)
2. F ist "symmetrische" 4-lineare Form
3. $f(X,Y) := q(X+Y)-q(X)-q(Y)$ für alle $X, Y \in V_1 \otimes V_2$ ist symmetrische Bilinearform mit $f(\alpha_i \otimes \beta_i, \alpha_j \otimes \beta_j) =$ $= F(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j)$
4. q ist quadratische Form, die mit f assoziiert ist.
5. Jede quadratische Form q auf $V_1 \otimes V_2$ mit $q(\alpha \otimes \beta) =$ $q_1(\alpha)\cdot q_2(\beta)$ erfüllt (5) mit (3).

Literatur: Meyer, TU München, Abt. Mathematik, Bericht 7203, 1972

H. WEFELSCHEID: Über eine Klasse von scharf 3-fach transitiven Gruppen

Gewisse 2-Strukturen, die eine Verallgemeinerung des Begriffs der affinen Ebene, und gewisse B^{*}-Geometrien, die eine Verallgemeinerung der pseudoeuklidischen Geometrie sind, lassen sich mit Hilfe von scharf 2-fach resp. scharf 3-fach transitiven Gruppen darstellen (vgl. Karzel, Hamb. Abh. 1968 resp. Benz, Symp. Math. 1970). Für Konstruktions- und Einbettungsprobleme dürften daher folgende zwei Sätze von Interesse sein:

<u>Satz 1:</u> Es sei H eine auf einer Menge M scharf 3-fach transitiv operierende Permutationsgruppe und $F(+,\cdot,\sigma)$ das zugehörige KT-Feld. Wenn char. $F \neq 2$ und wenn es eine kommutative Untergruppe $A < F^{\times}(\cdot)$ mit $[F^{\times}:A] = 2$ und $A \subset S = \{x \in F^{\times};\ x\cdot\sigma(x) = 1\}$, dann ist $F(+,\cdot,\sigma)$ nach der in Hamb. Abh. Vol. 37, Seite 232, Satz 2.2 beschriebenen Methode konstruierbar.

<u>Satz 2:</u> Es sei (G,N) eine (auf der Menge N operierende) scharf 2-fach transitive Permutationsgruppe. Gibt es eine kommutative Untergruppe $A < G_a = \{\alpha \in G;\ \alpha(a) = a\}$ mit $[G_a:A] = 2$ für ein festes $a \in N$, dann existiert eine scharf 3-fach transitive Permutationsgruppe (H,M) derart, daß (G,N) als Permutationsgruppe isomorph zu $(H_b, M\{b\})$ ist.

H.-J. ARNOLD: <u>Geometrische Äquivalenz vektoriell strukturierter Gruppen</u>

Eine Gruppe $\mathfrak{g}(+)$ heiße vektoriell strukturiert, wenn eine Abbildung $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{g}$ in den Untergruppenverband $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ gegeben ist $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{T} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$, welche die Bedingung $\mathfrak{b} \in \mathfrak{a}\mathfrak{T} \Longleftrightarrow \mathfrak{b}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{T}$ erfüllt. Zwei vektorielle Gruppen heißen geometrisch äquivalent (in Zeichen: $(\mathfrak{g}(+), \mathfrak{T}, o) \sim (\mathfrak{g}'(+), \mathfrak{T}', o'))$, wenn die zugehörigen affinen Liniengeometrien (s. H.-J. Arnold: Die Geometrie der Ringe im Rahmen affgemeiner affiner Strukturen, Hamb. Math. Einzelschriften, Neue Folge, Heft 4) isomorph zueinander sind. Jede geometrische Äquivalenz läßt sich bis auf Isomorphie darstellen in der Form $(\mathfrak{g}(+), \mathfrak{T}, o) \sim (\mathfrak{g}(\dot{+}), \mathfrak{T}, o)$.

<u>Satz:</u> Ist $(\mathfrak{g}(+), \mathfrak{T}, o)$ eine endliche abelsche vektorielle Gruppe und ist $\mathfrak{k} := \cap\, \mathfrak{a}\mathfrak{T}$ direkter Summand von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{k}$, so definiert $\mathfrak{A} \neq 0$ jedes $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{k}))$ gemäß $\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + [\psi(\mathfrak{a}')](\mathfrak{b}')$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \bar{\mathfrak{u}}_1$ $(\mathfrak{a}' \in \mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{u}}_1 \in U)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' + \bar{\mathfrak{u}}_2$ $(\mathfrak{b}' \in \mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{u}}_2 \in U)$ eine zu $(\mathfrak{g}(+), \mathfrak{T}, o)$ geometrisch äquivalente vektorielle Gruppe $(\mathfrak{g}(\dot{+}), \mathfrak{T}, o)$.-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Diese Methode liefert alle zu $(\mathfrak{G}(+), \mathfrak{T}, o)$ geometrisch äquivalenten $(\mathfrak{G}(+), \mathfrak{T}, o)$, wenn die zu $(\mathfrak{G}(+), \mathfrak{T}, o)$ gehörige Geometrie VEBLENsch ist, d.h. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{T} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{T} + \mathfrak{b}\mathfrak{T}$ gilt und $(\mathfrak{G}(+)/_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{T}, o)$ SPERNERscher Raum ist, d.h. wenn $(\mathfrak{G}(+)/_{\mathfrak{R}}, \mathfrak{T}, o)$ eine affine Liniengeometrie mit eindeutiger Verbindungsgeraden definiert.

N.K. STEPHANIDIS: Über Geradenkongruenzen mit gemeinsamer Mittenfläche

Gegeben ist ein Strahlensystem S. Gesucht sind alle zu S orthogonalen Strahlensysteme, deren Mittenflächen mit der Mittenfläche von S identisch sind. Es gilt:

Satz 1: Ein Strahlensystem S der Differenzierbarkeitsklasse C^3 sei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G der (u,v)-Ebene erklärt. Es seien P(u,v) die Mittenfläche und M(u,v) die Mittenhüllfläche von S. Wir nehmen an, daß $P(u,v) \neq M(u,v)$ für jedes $(u,v) \in G$ gilt. Dann existieren in einer Umgebung eines jeden Punktes $(u_o,v_o) \in G$ unendlich viele Strahlensysteme, die zu S orthogonal sind, und deren Mittenfläche ebenfalls P(u,v) ist. Die Lösungsgesamtheit in (u_o,v_o) hängt von einer willkürlichen Funktion einer Variablen ab.

Satz 2: Es sei S das Normalensystem einer Minimalfläche P(u,v). Dann gibt es genau zwei Strahlensysteme S_1, S_2, die orthogonal zu S sind und P(u,v) als Mittenfläche haben. S_1 und S_2 bestehen aus den Tangenten der Asymptotenlinien von P(u,v).

Satz 3: Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der (u,v)-Ebene. Es sei $\overrightarrow{OM} = M(u,v)$ eine eineindeutige sphärisch abbildbare Fläche der Differenzierbarkeitsklasse C^4 in $\bar{G}$. Dann existieren in einem Teilgebiet von G Paare von Strahlsystemen S, S' mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mittenhüllfläche von S ist $\overrightarrow{OM} = M(u,v)$.
(b) S und S' haben dieselbe Mittenfläche
(c) S' wird von den Geraden MP erzeugt, wobei $\overrightarrow{OP} = P(u,v)$ die gemeinsame Mittenfläche ist.

Die Lösungsgesamtheit enthält zwei willkürliche Funktionen einer Variablen.

Ferner gilt das Resultat: Bezeichnet man mit k' das Krümmungsmaß des Strahlensystems S' des Satzes 3, so gilt

$$\iint_M \frac{\rho \wedge \sigma}{R} = 2 \iint_{\Sigma'} \sqrt{-k'}\, \omega'_{31} \wedge \omega'_{32}$$

Hierin bedeuten: $\rho \wedge \sigma$ das Flächenelement von M, $\omega'_{31} \wedge \omega'_{32}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes Σ' von S' und R^{-1} die Normalkrümmung von M, die der Tangentialrichtung $\overrightarrow{MP}$ entspricht.

R. KOCH: Stetige Scharen kongruenter windschiefer Strahlflächen mit gemeinsamer Zentralnormalenfläche

J. KRAMES hat 1947 alle windschiefen Strahlflächen mit nicht (in ein Ebenenbüschel) entarteter Zentraltorse angegeben, deren PIRONDINI-Klassen aus lauter kongruenten Flächen bestehen. Alle Flächen einer solchen Kongruenzklasse berühren einen Drehkegel bzw. eine Schraubtorse längs eines festen Kreises bzw. einer festen Bahnschraublinie (gemeinsame Striktionslinie!) und bilden, da sie durch Verdrehung der Erzeugenden in den Zentralebenen um jeweiligen Striktionspunkt durch einen jeweils konstanten Winkel auseinander hervorgehen, eine stetige (einparametrige) Schar kongruenter windschiefer Strahlflächen, denen überdies die Zentralnormalenfläche gemeinsam ist.

Die allgemeinsten Flächenscharen mit letztgenannter Eigenschaft zu bestimmen, ist das Ziel dieses Vortrags. Es wird zunächst gezeigt: Die in Frage kommenden Zentralnormalenflächen sind die allgemeinsten nichtzylindrischen Strahlschraub- bzw. -drehflächen; die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden dieser Flächen sind dabei die Striktionslinien der gesuchten Flächen. Anschließend werden - nach einer Klassifikation der möglichen Zentralnormalenflächen - die Flächen der gesuchten Strahlflächenscharen explizit angegeben.

W. JUNKERS: Die universellen Bewertungsgruppen der affinen und der projektiven Ebenen vom Moultonschen Typ

In der Theorie der Ordnungsfunktionen wird jeder affinen Ebene und der zugehörigen projektiven Ebene eine universelle Bewertungsgruppe γ zugeordnet. Neu ist das Ergebnis: Für jede affine oder projektive Ebene vom Moultonschen Typ (im engeren Sinne) gilt $|\gamma| = 2$.

Aufgrund des Begriffs der universellen Ordnungsfunktion läßt sich der traditionelle Begriff des Doppelverhältnisses in natürlicher Weise so verallgemeinern, daß er für jede projektive Ebene definiert ist. Von der gleichen Allgemeinheit ist dann auch der "Fundamentalsatz der projektiven Geometrie": Zwei Quadrupel aus je vier verschiedenen kollinearen Punkten sind genau dann projektiv äquivalent, wenn die ihnen zugeordneten Doppelverhältnisse konjugiert in der zugehörigen Bewertungsgruppe sind. Mit Hilfe jenes neuen Ergebnisses wurde bewiesen: Der Fundamentalsatz gilt zwar für jede desarguessche projektive Ebene, aber unter den nicht-desarguesschen projektiven Ebenen gibt es sowohl solche, für die er gilt, als auch solche, für die er nicht gilt.

M. ANTON: The isostrophisms of planar ternary rings

A projective plane may be coordinatized by arbitrarily choosing four points, such that no three are collinear. A planar ternary ring is the algebraic system arising from a specific coordinatization of the plane. Permuting the roles of the four points gives rise to an isostrophic planar ternary ring. The paper shows the relationship between linearity in the isostrophic planar ternary ring and certain algebraic properties in the initial one. It discusses some of the different types of identities in isostrophic planar ternary rings which coordinatize the same plane. A new method of proof for some well known theorems relating collineations in the plane to properties of the planar ternary ring is also presented.

R. ARTZY: Conics and ovals

In every projection plane, a Steiner conic may be defined as a set of points which in at least one Hall coordinate system ist $\{(x,y) \mid xy = 1\} \cup (0) \cup (\infty)$ [Krüger, Math.Z. 120 (1971)] . Ovals that are not conics exist. Which ovals are conics? Pascal's full theorem on an oval makes the plane pappian [Buekenhout, Arch. Math. 4 (1966); Artzy, Amer.Math.Monthly 75 (1968)] . Pascal's condition for five points implies the full condition [Hofmann, J. Geom. 1 (1971)]. There are two types of 4-point Pascal conditions: the type $\binom{UVE}{VUP}$ for any fixed U, V, E and all P, holds iff the oval is a conic [Martin, Atti. Perugia, 1971]; the other type $\binom{UVP}{QUV}$, for any fixed U and V and all P and Q implies that the ternary ring of oval coordinates [Artzy, Israel J. Math. 4 (1966)] coincides with the Hughes ternary ring of the plane. These two 4-point conditions occur in an oval in the nondesarguesian Veblen-Wedderburn-plane of order 9; they are not equivalent to each other.

H. HOTJE: Über topologische halbgeordnete Körper

Wyler zeigte 1951, wie man einer angeordneten projektiven Ebene eine topologische Struktur zuordnen kann. Betrachtet man als Verallgemeinerung der angeordneten Ebenen die halbgeordneten, so ergibt sich das Problem, ob in ähnlicher Weise eine Topologisierung möglich ist. Eine Teilantwort ergibt sich mit dem Satz: Es sei $F(+,\cdot,\tau)$ ein topologischer Fastkörper und P eine affine Untergruppe von $F^{\times}(\cdot)$ vom Index 2. Ist $F(\tau)$ zusammenhängend, so gilt $P+P \subset P$.

YI CHEN: Angle-monoid in the geometry of chains

The following property (*) holds in the geometry of chains over a quadratic algebra over a field: There is a set M and a function f on $\mathcal{P}^4$ to M ($\mathcal{P}$ is the point set of the geometry) such that
(1) f(1,2,3,4) exists whenever there is a chain passing through 1 and 4 and 1 $\neq$ 4 and there is a chain passing through 2 and 3 and 2 $\neq$ 3;
(2) of f(1,2,3,4) $\in$ M and t $\in$ M then there is exactly one 5 of such that f(1,2,3,5) = t;
(3) of f(1,2,3,4) $\in$ M then f(2,1,4,3) = f(3,4,1,2) = f(1,2,3,4) and
(4) (M,o) forms a monoid with
    (a) f(1,2,3,4) = unit whenever (1,2,3,4)Δ ;
    (b) f(1,2,3,4) o f(1,2,4,5) = f(1,2,3,5) defines the operation "o".

We can characterize the geometry of chains by (*) as W. Benz (Math.Ann. 165 (1966), 19-23) characterized the Möbius plane by a Büschelgruppe.

L.J. DICKEY: Block designs in hyperbolic planes

Configurations in finite planes can give rise to new block designs and can provide means of determining whether or not certain planes are isomorphic. Specific examples are discussed.

J. MISFELD: Einige Bemerkungen über topologische Vektorräume

Ein topologischer Vektorraum ist ein Vektorraum V über einem topologischen Körper (K, τ_o), der mit einer Topologie so versehen ist, daß die algebraischen Operationen stetig sind. Es stets [V:K] = n $\in$ N vorausgesetzt. Es gilt immer $\tau_o^n \leq \tau$. Es sei werden verschiedene Beispiele endlich-dimensionaler topologischer Vektorräume (V, τ, K, τ_o) gegeben, für die $\tau_o^n \lneq \tau$ gilt, die also nicht vom Typ $(K^n, \tau_o^n, K, \tau_o)$ sind. Es wurde gezeigt, daß die Topologie τ im Körper K (identifiziert mit einem 1-dimensionalen Untervektorraum $K\varphi < V$) sehr viele verschiedene Topologien induzieren kann; diese sind abhängig von der Auswahl des Repräsentanten $\varphi \in V$, sie wurden in Spezialfällen genau angegeben. Die folgenden Fragen wurden durch Gegenbeispiele verneint:

1. Ist ein Vektorraum über einem topologischen Körper, der eine Topologie τ so trägt, daß jeder (echte) Untervektorraum bezüglich der von τ induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum ist, selbst ein topologischer Vektorraum?

2. Ist ein Vektorraum über einem topologischen Körper, der eine Topologie τ so trägt, daß jeder (echte) Untervektorraum bezüglich der von τ induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum vom Typ K^r ist, selbst ein topologischer Vektorraum vom Typ K^n?

3. Ist ein topologischer Vektorraum, für den jeder (echte) Untervektorraum bezüglich der induzierten Topologie vom Typ K^r ist, selbst auch vom Typ K^n?

Dies zeigt, daß der Begriff des topologischen Vektorraumes sehr allgemein ist,und daß es gerechtfertigt ist, an die Topologien τ und τ_o zusätzliche Bedingungen zu stellen.

H.-J. GROH: Flat Möbius and Laguerre planes

Given any flat Möbius plane P, one can associate to each point $p \in P$ an incidence structure $S(P,p)$ which can he proved to be a (flat) Laguerre plane (H. Groh, Laguerre planes generated by Möbius planes, presented at MRI meeting "Grundlagen der Geometrie" 1971; submitted to Abh. Math. Sem. Hamburg). - Here the class of such "generatable" Laguerre planes $S(P,p)$ is characterized intrinsically within the class of all flat Laguerre planes. - The proof uses heavily that a big portion of the incidence properties (beyond L1-L4) of the classical Laguerre plane is forced, by topology, to carry over to arbitrary flat Laguerre planes (H. Groh, On flat Laguerre planes, presented at "Conference on Geometry", U Waterloo 71, J. of Geom. 1 (1971), 18-40)).

W. HEISE: Laguerre- and Minkowski-m-Structures

Analogous to the concept of Permutti's Möbius-m-structures (κ-affine planes) Laguerre- and Minkowski-m-structures are defined as generalizations of the plane Laguerre and Minkowski Geometry. A class of ovoidal Laguerre-m-structures is constructed. There are close connections between Minkowski-m-structures and sharply (m+2)-ply transitive sets of permutations. [done jointly with H. Karzel; to appear in Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste]

H.-J. KROLL: Zur Darstellung miquelscher Möbiusräume

Es sei Π ein projektiver Raum mit dim $\Pi \geq 2$ und O eine mindestens zweielementige Teilmenge von Punkten. Für jede Ebene E von Π sei $O \cap E$ entweder leer oder ein Punkt oder ein pascalsches Oval. Dann ist O ein Ellipsoid (nicht-ausgeartete Quadrik vom Index 1). Für den Fall endlicher Dimension wurde dieser Satz von J. Tits bewiesen (J. Tits, Ovoides à translation. Rend. Mat. 21 (1962), 37-59). Als Folgerung dieses Satzes erhält man, daß jeder miquelsche Möbiusraum die Geometrie der ebenen Schnitte eines Ellipsoids ist.

K. SÖRENSEN: Freie Erweiterungen von Minkowski-Ebenen

Es wird eine Folge von PARTIAL-MINKOWSKI-EBENEN konstruiert, deren Vereinigung eine Minkowski-Ebene ist. Bei geeigneter Wahl der Ausgangs-Partialebene läßt sich erreichen (wie bei Minkowski-Ebenen über quadratisch abgeschlossenen Körpern), daß je zwei Kreise der Ebene einen Schnittpunkt besitzen. Dieselbe Konstruktion läßt sich ohne das Berühraxiom durchführen, so daß man freie "Hyperbel-Strukturen" erhält.

K. STRAMBACH: Algebraische Geometrien

Es wurden alle algebraischen Geometrien, d.h. projektive Ebenen, affine Ebenen, Möbiusebenen und Laguerre-Ebenen klassifiziert, die sich auf einer k-Varietät so realisieren lassen, daß ihre Blöcke irreduzible über k definierte ebene algebraische Kurven sind.

X. HUBAUT: 2-designs associated with a cubic surface

Four strongly regular graphs and three symmetric 2-designs associated to a cubic surface of a 3-dimensional projective space are discussed. The correspond to the 27 lines, the 36 double-six, the 45 triangles and the 40 permutations of the lines in 9 triangles. Using the isomorphism of the simple group of the cubic surface with $PSU_4(4) \simeq P\Omega_5(3) \simeq P\Omega_6^-(2)$ they are shown to be members of infinite families of strongly regular graphs, some of them corresponding to symmetric 2-designs. Another generalization carring the fact that the graph is the Weyl group of E_6, the graphs correspond also to the geometry of Chevally group of type E_6.

J. DOYEN: Everything you always wanted to know about Steiner triple systems but were afraid to ask

The following problem are still open:

(1) If N(v) denotes the number of non isomorphic Steiner triple systems S(v), is it true that

$$N(v) \sim e^{\frac{v^2}{6} \log v} \quad ?$$

(2) If every triangle of an S(v) generates an S(v') with v' $\neq$ v, is it true that v' = 7 or 9?

(3) An S(v) is called line-symmetric if it has at least one involutary automorphism having exactly three collinear fixed points. Does there exist a line-symmetric S(v) for every v $\equiv$ 1 or 3 (mod 6)?

J. VAN BUGGENHAUT: $S_2(2,3,v)$-designs without repeated blocks

The neccessary condition $v \not\equiv 2 \pmod 3$ is also sufficient for the existence of a $S_\lambda(t,k,v)$ design without repeated blocks and $\lambda = 2$, $t = 2$ and $k = 3$.

D. LAUGWITZ: Kontingenzwinkel

Kontingenzwinkel (seit Euklid Buch I, Def. 8) sind "Winkel" zwischen sich berührenden Kurven. Präzise: Schenkel sind Kurvenkeime, d.h. Klassen lokal kongruenter Paare von Kurven. Winkel sind geordnete Paare von Kurven. Zwei Winkel α, β mit demselben Scheitel können "aneinandergelegt" werden, $\alpha \dotplus \beta$, wenn der zweite Schenkel von α zugleich erster Schenkel von β ist. In $\mathbb{R}^2$ lassen sich Kurvenkeime durch Funktionenkeime $[\Phi(r)]$ in Polarkoordinaten beschreiben. Ein Winkelmaß m ist eine Abbildung in eine geordnete abelsche Gruppe, so daß $m(\alpha \dotplus \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$, $m(\alpha) = 0$ nur für Winkel mit zusammenfallenden Schenkeln, m nur von $[\Phi(r) - \Psi(r)]$ abhängig, wenn $[\Phi]$, $[\Psi]$ die Keime zu α, β sind, $m(\alpha) > 0$ für $[\Phi] > 0$.

Satz: Alle Maße für Kontingenzwinkel sind ordnungstreu isomorph. Ausblick auf Non-Standard-Methoden.

R.C. BOSE: Representation of Hughes' Planes

Consider the finite projective space $S_4 = PG(4,q^2)$ of 4 dimensions based on the finite field $GF(q^2)$. Let Θ be a primitive root of the field satisfying the equation $x^2-c_1x+c_2 = 0$ where $c_1, c_2 \in GF(q)$. Let (x_1,x_2,y_1,y_2,z) be the coordinates in S_4. Let Σ_3 be the 3-space $z = 0$. A spread S_3 in Σ_3 is a set of disjoint lines such that each point is on one line of S_3. A particular spread of S_3 is obtained by taking the lines with equations

$$(y_1,y_2) = (x_1,x_2) \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ -c_2m_2 & m_1+c_1m_2 \end{bmatrix} \quad z = 0 \tag{1}$$

together with the line $(x_1,x_2) = (0,0)$, $z = 0$. This is a regular spread in the sense of Bruck. The Desarguesian affine plane Π of order q^2 is represented as follows: The lines of Π are represented by planes passing through S_3 not lying wholly in Σ_3. The points of Π are represented by points of $S_4-\Sigma_3$. Incidence is given by the containing contained relation. The lines of Π can be divided into two types. The lines of type I are represented by planes with equations

$$(y_1-a_2z,\ y_2) = (x_1-a_1z,\ x_2) \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ -c_2m_2 & m_1+c_1m_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

where $m_2 \neq 0$. The point $A = (a_1,0,a_2,0,1)$ on the plane $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ is called its vertex. If $m = m_1+m_2\Theta$, $a = a_1+a_2\Theta$ then this plane may be denoted by $D(m,a)$. It represents the line $y = m(x-a_1) + a_2$ of Π. The lines of type II are represented by planes Ω^*

$$(y_1-b_1z,\ y_2-b_2z) = (x_1,x_2) \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

If $b = b_1+b_2\Theta$ this plane may be denoted by $\Delta(m_1,b)$.

The points of Σ_3 may be divided into two classes 'red' and 'green'. A point $(x_1,x_2,y_1,y_2,0)$ is said to be red or green according as $N(x) = x_1^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2$ is a square or a non-square over $GF(q)$. A point of P of $D(m,a)$ is said to be red or green with respect to the plane if AP meets Σ_3 in a red or green point. Let $R(m,a)$ be the set of red points and $G(m,a)$ the set of green points of $D(m,a)$. Then an H-line $H(m,a)$ of type I is represented by the point set

$$H(m,a) = R(m,a) \cup G(m^q,a)$$

Type II H-lines are the same as type II lines of Π and are represented by the planes $\Delta(m,b)$. Then the set of H-lines constitute the lines, and the set of points $S_4-\Sigma_3$ constitute the points of a Hughes' plane of order q^2.

J.-P. DOIGNON: <u>On segment spaces</u>

Motivated by the work done by H. BUSEMANN (e.g. "The Geometry of Geodesics", 1955) and E. SOETENS (Thesis, Brussels, 1971), we call segment space any set S provided with a collection of subsets associated to pairs of points of S that satisfies nine axioms. Using the order topology on segments, a topology is defined on S. Local forms of Pasch's and Peano's axioms are used to define segment spaces that are locally 2-dimensional or finite dimensional. The following representation is then proved: If the segment space is locally 2-dimensional and desarguesian, each point has a neighbourhood isomorphic to an open convex subset of an affine space over an ordered skew-field; the same property is true for segment spaces of local dimension finite and greater than 2.

L. DUBIKAJTIS: <u>Über eine Verallgemeinerung des Vektorraumbegriffs</u>

In diesem Vortrag führe ich den Begriff: "der Raum der Winkelräume" ein. Wenn wir die charakteristischen Eigenschaften der Winkelräume analysieren, erhalten wir ein Axiomensystem dieses "Raumes der Winkelräume". Dieses Axiomensystem besitzt eine ganze Reihe anderer Modelle. Der "Raum der Winkelräume" kann auch auf andere Weise definiert werden. Wir können nämlich zeigen, daß für jeden "Raum der Winkelräume" eine Operatorenmenge existiert, die eine besondere algebraische Struktur, und zwar eine Verallgemeinerung des Schiefkörpers, bildet. Diese Struktur entsteht durch eine Abschwächung der Inversionsaxiome der Addition und Multiplikation in dem Schiefkörper und wird bezeichnet als "Viertelkörper". In ähnlicher Weise wie der Vektorraum über dem Körper gebildet wird, kann auch ein Vektorraum über dieser algebraischen Struktur konstruiert werden. Die Linearkombinationen der Vektoren in diesem Vektorraum erfüllen das Axiomensystem des "Raumes der Winkelräume". Und umgekehrt: der "Raum der Winkelräume" ist immer ein Vektorraum über dem oben beschriebenen "Viertelkörper".

H. MÄURER: Kreisspiegelungen in Möbiusebenen

Es wurden Möbiusebenen (i.e. Sinne) untersucht, in denen an jedem Kreis k ein Automorphismus $\sigma_k \neq 1$ existiert, der k punktweise festläßt: Liegt jede aus vier Punkten bestehende σ_k-invariante Menge auf einem Kreis und existieren zwei sich berührende Kreise k, l mit

$$l^{\sigma_k} \neq l$$

so ist die Möbiusebene miquelsch.

G. RIGGERT: Die kommutativen dreidimensionalen Ringerweiterungen von $R(\varepsilon)$

Zu $\mathbb{R}(\varepsilon) := \mathbb{R}[\varepsilon] / \langle \varepsilon^2 \rangle$ sollen sämtliche kommutativen dreidimensionalen Ringerweiterungen, bis auf Isomorphie, angegeben werden. n-dimensionale Ringerweiterungen eines Ringes R mit 1 werden hier als Ringe E definiert mit $E \supset \mathfrak{Z}(E) \supset R$ und E n-dimensionaler (freier) R-Modul.
Klassifiziert wird bezüglich Ringisomorphismen, die R auf sich abbilden.
Für $R = \mathbb{R}(\varepsilon)$ existiert zu jeder Erweiterung E Basis 1, x, y. Die Erweiterung ist vollständig bestimmt durch die Darstellung von x^2, y^2, xy bezüglich der Basis 1, x, y.

Wesentliche Forderungen stellt das Assoziativgesetz der Multiplikation. Geeignete Basissubstitutionen führen auf zwölf wohldefinierte, paarweise nicht isomorphe Endtypen $E_1, \ldots E_{12}$. Diese haben Basis 1, x, y mit:

im Ring	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
x^2	εy	x	x	εx	0	εx	0	x
y^2	x	$-1+x$	$-\varepsilon+\varepsilon x$	$-\varepsilon+x$	x	εx	εx	y
xy	ε	0	0	0	0	0	0	0

E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
x	εx	εx	0
0	εy	0	0
0	0	0	0

H. SCHAEFFER: <u>The von Staudt-Theorem for a certain class of rings</u>

For finitedimensional algebras A with unity over an infinite field K, char. K $\neq$ 2, we point out that the bijections $\lambda: \mathcal{P}_2(A) \to \mathcal{P}_2(A)$ of the projective line over A such that λ, λ^{-1} preserve harmonical position of points are induced by semilinear mappings.

L. TAMASSY: <u>Die Bestimmtheit der Kugel durch den Inhalt von gewissen Ebenenschnitten und der Zusammenhang von diesen mit der Minkowskischen und arealen Metrik</u>

It was proved by P. Funk that the only symmetrical star-shaped body $\mathcal{B}$ of the euclidean 3-space, all of whose inter-sections with planes through its midpoint O have surface area π, is the unit sphere. Let now $\mathcal{P}$ be a subset of the planes through O, namely the set of those planes, whose normals make an angle $< \eta$ with a fixed plane. We show that the only symmetrical star-shaped body $\mathcal{B}$ which is intersected by elements of $\mathcal{P}$ in figures of surface area π, is also the unit sphere, i.e. the assumption of Funk's theorem may be considerably weakened. - The result can be extended to n dimensional space and p < n dimensional planes. It is very probable that other symmetrical, star-shaped bodies are also determined by the area of the intersections of a small part of the planes through the midpoint.

A consequence of this result is the existence of areal spaces of A. Kawaguchi whose areal measure cannot be deduced from a general Minkowskian or Finsler metric. - There are some open problems.

W. BENZ: Einige Systeme algebraischer Kurven

Gegeben sei ein n-dimensionaler Vektorraum V_K über dem Körper K. Vermöge Multiplikationen auf V_K werden Kurvensysteme eingeführt, die ein ähnliches Verhalten aufweisen wie diejenigen der isotropen Geometrie, Möbiusgeometrie, Minkowskigeometrie. Auf folgende Saätze wird hingewiesen: (1) Ist $V_K(\cdot)$ fastquadratisch über K (mit a, b $\in$ V höchstens quadratisch über K ist auch $a \cdot b$ höchstens quadratisch über K mit $N(a \cdot b) = N(a) \cdot N(b)$, wo etwa N(a) die Norm von a bzg. K(a) über K bedeutet), so genügt das Kurvensystem dem Büschelsatz. (2) Ist eine Kurve des Systems gegeben, so lassen sich ihr (konstruktiv) Punkte p zuordnen mit $\dim \bar{p} = \dim_K K(p)$, wo $\bar{p}$ die lineare Hülle von p bezeichnet. Dabei wird $|K| > m + \dim_K K(p)$ vorausgesetzt, wo m die Anzahl der maximalen Ideale von $V_K(\cdot)$ bedeutet. (3) Ist das Kurvensystem vom Laguerretyp, so gilt $N^2 = 0$ für das maximale Ideal N von $V_K(\cdot)$ genau dann, wenn alle Kurven $\neq$ Geraden des Systems eben sind. (Hier muß char. K $\neq$ 2 sein. Der Fall char. K = 2 bedarf einer besonderen Behandlung.) Die Fälle $N^t = 0$, $N^{t-1} \neq 0$ werden ebenfalls beherrscht im Falle, daß das Kurvensystem Laguerretyp hat.

A. Blaszkowski, Bochum