MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 23/1972

Numerische Methoden bei Differentialgleichungen

5.6. bis 9.6.1972

An der Tagung über Numerische Methoden bei Differentialgleichungen, die unter der Leitung von J.Albrecht (Clausthal-Zellerfeld) und L.Collatz (Hamburg) stand, nahmen Wissenschaftler aus 8 Ländern teil. In zahlreichen Vorträgen wurden verschiedene Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungen besprochen und ein Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung vermittelt.

Gemäß ihrer numerischen Bedeutung hatten Diskretisierungsverfahren für Anfangs- und Randwertaufgaben sowohl gewöhnlicher als auch partieller Differentialgleichungen einen großen Anteil am Vortragsprogramm. Hierbei wurden besondere Fragen der Konvergenz, der Stabilität und der Auffindung numerisch verwertbarer Fehlerschranken besprochen.

Besonderes Interesse fanden Vorträge, deren Problemformulierung unmittelbar der Praxis entnommen waren. Es sei nur auf die Stichworte Populationsgenetik, Turbulenztheorie und Satellitenbahnen hingewiesen.

Neben der Erörterung offener Fragen, die Anlaß zu neuen Untersuchungen geben sollten, standen auch Möglichkeiten einer stärker anwendungsbezogenen Ausbildung von Mathematikstudenten im Mittelpunkt einer allgemeinen lebhaften Diskussion.

Besonderer Dank gebührt der Leitung des Hauses, die durch eine vorbildliche Betreuung und Organisation einen harmonischen Ablauf der Tagung ermöglichte.

Teilnehmer

H.Ade, Mainz
J.Albrecht, Clausthal
R.Ansorge, Hamburg
R.E.Barnhill, Uxbridge
G.Bertram, Hannover
W.Börsch-Supan, Mainz
E.Bohl, Münster
H.Braß, Clausthal
B.Brosowski, Göttingen
H.Brunner, Halifax
J.C.Butcher, Dundee
L.Collatz, Hamburg

L.Elsner, Erlangen
H.Engels, Jülich
P.Forster, Hannover
E.Gekeler, Mannheim
K.P.Hadeler, Tübingen
Hersch, Zürich
H.Hofmann, Erlangen
W.Hofmann, Hamburg
D.Kaesbauer, Oberpfaffenhofen
J.Keller, Aachen
W.Kollmann, Aachen
H.-J.Kornstaedt, Berlin
H.-O.Kreiss, Uppsala
J.D.Lambert, Dundee
F.Lempio, Hamburg
F.Locher, Tübingen
R.Mischak, Wien
J.L.Morris, Dundee
Mühlbach, Hannover
W.Niethammer, Mannheim
T.Postelnicu, Bukarest
V.Rathscheck, Hamburg
A.Sachs, München
S.Sarman, Clausthal
M.N.Spijker, Leiden
H.J.Stetter, Wien
W.Törnig, Darmstadt
I.Toma, Bukarest
W.Walter, Karlsruhe
J.J.Weinitschke, Berlin
B.Werner, Hamburg
H.Werner, Münster
W.Wetterling, Enschede
J.R.Witheman, Uxbridge
Wißkirchen, St.Augustin

Vortragsauszüge

H.J.STETTER: Extrapolationsverfahren zur numerischen Behandlung von stiff equations

Nach einer Bemerkung von Dahlquist sind Extrapolationsverfahren nicht für die numerische Lösung von stiff equations geeignet, auch wenn ein implizites Basis-Verfahren (z.B. Trapezregel) zugrundegelegt wird. Der Dahlquist'sche Einwand entfällt jedoch, wenn sämtliche Unterteilungen des Extrapolationsintervalls eine gerade Schrittanzahl besitzen. Man kann vielmehr zeigen, daß die auf der Basis der Trapez- oder der Rechteckregel mittels h^2-Extrapolation gewonnenen Verfahren A (α)-stabil sind, mit α nahe bei $\pi/2$; die theoretischen Grundlagen für implizite Extrapolationsverfahren - im Rahmen der Theorie für lin. Diffgln. mit konstanten Koeff. - sind also gegeben.

Die praktische Durchführung erfordert die effektive Lösung folgender Probleme:

1) Schrittweitensteuerung: Die für eine vorgegebene Genauigkeit zulässigen Extrapolationsintervalle Δt_μ können stark variieren (z.B. Vergrößerung um einen Faktor 1oo nach Durchlaufen der Anfangsphase), das maximale Δt_μ muß ohne großen Aufwand bestimmt werden können (Speicherung relevanter Zwischenresultate, Fortschreiten von feinerer zu gröberer Unterteilung).

2) Implizite Rechnung: Die Auflösung der impliziten Gleichungssysteme mit dem Newton-Verfahren erfordert gute Startwerte (möglichst nur eine Iteration), die Newtonmatrix soll nicht unnötig oft neu ausgewertet werden.

Bei einer rationellen algorithmischen Lösung dieser Probleme dürfte das implizite Extrapolationsverfahren das effektivste allgemeine Verfahren zur numerischen Lösung von stiff equations sein.

R.MISCHAK: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

Zur Erreichung von Stabilität bei Verwendung von Mehrschrittverfahren hoher Ordnung können verschiedene Verfahren zyklisch ausgewertet werden. Erläuterung eines M-zyklischen linearen k-Schrittverfahrens bestehend aus den Verfahren $\phi^{(i)}$ und Angabe von Stabilitätsbedingungen. Konstruktion eines "korrigierenden" Verfahrens zu einer gegebenen Menge von Verfahren und vorgegebenen Nullstellen des für die Stabilität ausschlaggebenden Polynoms. Dabei wurden zwei Fälle unterschieden. Es wurde endlich die Klasse der impliziten k-Schrittverfahren der Ordnung 2k-1, die alle instabil sind und einen freien Parameter besitzen, betrachtet und die Existenz von

$$\begin{cases} \text{stabilen } k-1 \text{ zyklischen } k\text{-Schrittverfahren der Ordnung } 2k-1 \\ \text{stabilen } k \text{ zyklischen } k\text{-Schrittverfahren der Ordnung } 2k \end{cases}$$

nachgewiesen.

H.BRUNNER: Über Klassen von A-stabilen linearen Mehrschrittverfahren maximaler Ordnung

Unter Benutzung eines Satzes von MARDEN über die Lage der Nullstellen gewisser rationaler Funktionen können auf natürliche Weise Klassen von A-stabilen linearen Zweischrittverfahren maximaler Fehlerordnung $p = 2$ gewonnen werden, wobei als deren zweites characteristisches Polynom ein von gewissen Parametern abhängendes Schur-Polynom gewählt wird. Für gewisse Werte dieser Parameter degeneriert das zugehörige Verfahren zu einem Einschrittverfahren: man erhält die Trapezregel beziehungsweise eine Klasse von Verfahren, die von LINIGER und WILLOUGHBY angegeben wurden. Ähnliche Ideen können zur Konstruktion von (praktisch weniger interessanten) A-stabilen linearen k-Schrittverfahren mit $k > 2$ verwendet werden.

Die Abhängigkeit des Diskretisationsfehlers von der Wahl der Parameter wird untersucht werden, und anhand numerischer Beispiele (von "stiff equations") werden zu verschiedenen Parametern gehörige Verfahren einander gegenübergestellt.

H.O.KREISS: Numerische Methoden für Anfangs-Randwertaufgaben

Anhand von einfachen Beispielen wird das Stabilitätsverhalten von Differenzapproximationen für Anfangs-Randwertaufgaben erklärt. Außerdem wird eine allgemeine Stabilitätstheorie entwickelt, die für Systeme mit variablen Koeffizienten gilt. Einzelheiten werden in "Mathematics of Computation, Vol.26, July 1972" veröffentlicht. (Zusammen mit B. Gustafsson and A. Sundström).

J.R.WHITEMANN: Numerical solution of elliptic boundary value problems containing singularities

Finite-difference and finite element solutions to elliptic problems having either Dirichlet or mixed boundary conditions are notoriously inaccurate when the problems contain boundary singularities such as occur at some corners. This is due to the unboundedness of certain derivatives of the solution.

A very brief survey of error analysis for finite-difference and finite element methods is given, and reasons for the failure of the usual error bounds to cover the cases of singular problems is discussed. Methods for incorporating singular functions having the form of the dominant part of the singularity to improve the numerical solutions are described. Examples of the use of these techniques for a model harmonic mixed boundary value problem are given. As no exact solution to this problem is known, an extremely accurate solution computed by the use of a conformal transformation technique is used for comparison. This transformation technique and its implementation are described.

R.E.BARNHILL: Computable error bounds for the finite element method for elliptic boundary value problems

Error bounds for the finite element method for elliptic boundary value problems are frequently of the form $\|\text{Remainder}\| < Kh^n \|u\|$ where h is a mesh parameter tending to zero, K is a constant depending on the smoothness of the solution u of the elliptic problem and the polynomial precision of the finite element solution, K is a constant, usually not known, independent of h and u and $\|u\|$ is a pseudonorm of u, for example, the sum of the L_2 norms of all the second order partial derivatives of u. In order to have a computable error bound, some value for K must be found. This talk describes how to calculate such constants by means of extensions of the Sard Kernel theorems. Application is made to a model problem with a finite element scheme on a triangulated region.

A.SACHS: Randinterpolation höherer Ordnung bei elliptischen Differentialoperatoren in Divergenzform

Mit Hilfe der Theorie des topologischen Abbildungsgrades wird die Lösbarkeit nichtlinearer elliptischer Differenzgleichungen in Divergenzform bei interpolierten DIRICHLET-Randbedingungen bewiesen, falls die Koeffizientenfunktion gewisse Vorzeichenbedingungen zur Realisierung eines diskreten Maximumprinzips erfüllen.

Numerische Beispiele aus der magnetostatischen Feldtheorie, der Minimalflächentheorie sowie der laminaren Strömungstheorie zeigen die Effektivität linearer Randinterpolation im Vergleich zu konstanter Fortsetzung der Randwerte bei nicht polygonalem Grundgebiet.

J.L.MORRIS: Splitting Methods for Parabolic and Hyperbolic Partial Differential Equations

The Generalization of Alternating Direction Methods from two to many space variables for parabolic partial differential equations leads in general to fairly complicated algorithms. In contrast Locally one Dimensional methods are simple to generalize to any number of space dimensions but unfortunately, lose accuracy if certain operators do not commute. In the present paper it is shown that an Alternating form of Locally one Dimensional (ADWoD) method retains accuraly for non commuting operators and for any number of space dimensions.

The idea is applied to nonlinear hyperbolic systems to produce optimally stable, optimally efficient methods.

J.HERSCH: Eine Kohärenzforderung für Differentialgleichungen

Ein möglicher allgemeiner Standpunkt zu der Approximation wird so ausgedrückt: Sukzessive Näherungs-Vorschriften sollten einander nicht widersprechen. Solche Methoden werden "Kohärent" genannt; sie sind im günstigsten Fall imstande, die genannte Lösung zu liefern.

Diese einfache "Kohärenzforderung" wird bei Saiten- und Membranschwingungen durch die Klassischen Differenzgleichungen nicht erfüllt; sie führt auf verbesserte Koeffizienten. (siehe auch C.R. Acad. Sci. Paris, 246, 1958, S.364-7)

Ich wäre für jede Angabe über ähnliche Überlegungen bei anderen Approximationsmethoden sehr dankbar.

H.ENGELS: Runge-Kutta-Verfahren auf der Basis von Quadraturformeln

Die AWA $y' = f(x,y), y(x_o) = y_o$, wird in der Form

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x,y(x))dx$$

durch eine Quadraturformel schrittweise angenähert. In den dabei im n-ten Schritt auftretenden Größen $f(x_n+\alpha_i h, y(x_n+\alpha_i h))$ ist $y(x_n+\alpha_i h)$ unbekannt und wird durch Extrapolation aus zurückliegenden, bekannten Daten so bestimmt, daß die Fehlerordnung der Quadraturformel nicht zerstört wird. Man kann dazu ein Taylor'sches und ein Lagrange'sches Interpolationspolynom verwenden und kommt damit auf bekannte und auf neue Runge-Kutta-Verfahren. Die wesentlichen Vorzüge dieser Vorgehensweise liegen darin, daß man unschwer Runge-Kutte-Verfahren von beliebig hoher Fehlerordnung konstruieren kann, sowie in der Möglichkeit zur Verwendung anderer interpolierender Funktionen. Natürlich ergeben sich durch Integration dieser interpolierenden Funktionen auch andere Qudraturformeln als Basis der Runge-Kutta-Verfahren. Wählt man eine geeignet verallgemeinerte Hermite-Interpolation, so erhält man Quadraturverfahren mit Eigenschaften Gauß'scher Quadraturen, speziell z.B. die Wilf'schen Quadraturformeln.

H.BRASS: Asymptotisch optimale Quadraturverfahren

Sei

$$K_{s,q} := \{f \mid f^{(s-1)} \text{totalstetig}; \ [\int_0^1 |f^{(s)}(x)|^q dx]^{\frac{1}{q}} \leq 1\}$$

$$1<q\leq\infty$$

$$Q_n\ [f] := \sum_{\nu=o}^{n} A_\nu^{(n)}\ f\ (\tfrac{\nu}{n})$$

$$R_n\ [f] := \int_0^1 f(x)dx - Q_n[f]$$

$$c(Q_n ; K_{s,q}) := \sup_{f\varepsilon K_{s,q}} |R_n[f]|; \quad c_n(K_{s,q}) = \inf_{Q_n} c(Q_n ; K_{s,q})$$

Es wird bewiesen

Satz: Es gibt eine Folge Q_n mit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{c(Q_n, K_{s,q})}{c_n(K_{s,q})} \leq 3$$

für alle s, q. Die Zahl 3 kann nicht durch 1 ersetzt werden.

F.LOCHER: Normschranken bei Quadraturformeln

Die L_1 - Norm des Peano-Kerns K einer Quadraturformel Q_n der Ordnung n läßt sich mit approximationstheoretischen Mitteln abschätzen in der Form

$$\int_{-1}^{1} |K(t)|dt < \frac{2+||Q_n||}{2^n(n+1)!} \quad ;$$

Diese Schranke ist in vielen Fällen nur um Faktoren größer als der genaue Wert. Außerdem erhalten wir mit Hilfe von Approximationsgrößen Abschätzungen für Quadraturfehler, welche numerisch gut zugänglich sind. Anwendungen auf die Konvergenztheorie (sowie bei der Interpolation) sind möglich.

J.D.LAMBERT: A modification of the shooting method for two-point boundary value problems in ordenary differencial equations

A new technique for the numerical solution of two-point boundary value problems altough applicable to a wider class of problems is most easily described in relation to the problem $y''=f(x,y), y(o)=0, y(1)=B$. Let $x_j = jh, j = 0, 1..,n$, where $x_n = 1$, and let $\phi(x)$ be an arbitrary function satisfying $\phi(o) = 0, \phi(1) = B$. By considering a sequence of boundary value problems of the form

$$y^{(j)''} = f(x,y^{(j)}(x), \quad y^{(j)}(x_j) = \phi(x_j), \quad y^{(j)}(1) = B$$

for $j = n-1, n-2,...,1,0$, it is possible to derive a recursive relation which yields an approximation to $y'(o)$, thus erasing the original boundary value problem to be replaced by an initial value problem. The technique can be regarded as a method (of limited accuracy) in its own region or as a device for obtaining initial estimates for the conventional shooting method.

E.BOHL: <u>Fehlerabschätzung bei diskreten elliptischen Problemen (DEP) und ihre konstruktive Realisierung</u>

Die Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben leitet häufig zu einem DEP. der Form A t = F t mit einer Tridiagonal-Blockmatrix A, welche nicht zerfällt, dem schwachen ZSK. genügt und überdies eine (qxq) L-Matrix ist. Das nichtlineare Feld F erfüllt eine Bedingung der Form

$$|F(t)-F(s)| \leq Q|t-s| \qquad (t,s \in \mathbb{R}^q)$$

mit einer nichtnegativen (qxq) Matrix Q. Es wurde eine Fehlerabschätzung für das Gleichungssystem A t = F t unter Berücksichtigung einer regulären Zerlegung A = M-N für A diskutiert, von Erfahrungen mit ihrer Anwendung berichtet und dazu unter Sondervoraussetzungen eine Theorie begonnen.

P.FORSTER: <u>Fehlerabschätzungen zum Galerkin-Verfahren</u>

Es werden Fehlerabschätzungen zum Galerkin-Verfahren für nichtlineare Randwertprobleme der Form

$$Lu+Q(x,u)=0, \quad \sum_{k=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu k}u^{(k)}(0)+\beta_{\mu k}u^{(k)}(1)] = 0 \quad \mu=1,\dots,2m$$

angegeben. Dabei sei L ein linearer Differentialausdruck 2m-ter Ordnung, Q nicht linear. Nach Einführung der Green-Galerkin-Funktion G_n (discrete variational Green's function) werden Abschätzungen von $G - G_n$ (G ist dabei die zu L und den Randbedingungen gehörende Greensche Funktion) zu Fehlerabschätzungen für die oben angegebenen nicht linearen Probleme ausgenutzt. Diese Abschätzungen werden für Differentialgleichungen 2. Ordnung für einige Ansatzfunktionen ausgewertet und mit bekannten Ergebnissen verglichen.

J.C.BUTCHER: <u>Order conditions for general linear methods for ordinary differential equations</u>

An Approach to the study of error propagation in methods of the type describend in [1] is presented.

The concept of "order" has to he modified to fit this general context. As a result, classical methods may be found to be capable of yielding results of higher accuracy than the classical theorie would suggest.

Certain methods motivated by this approach are described.

<u>Reference:</u>

[1] On the convergence of Numerival Solutions to Ordinary Differential Equations, J.C. Butcher, Math. Comp. 2o, 1966, 1 - 1o.

J.ALBRECHT: <u>Zur Wahl der Norm beim Iterationsverfahren für Randwertaufgaben</u>

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-v''(x) = f(x, v(x), v'(x)) \text{ in } a \leq x \leq b,\ v(a) = v_a,\ v(b) = v_b\ ;$$

f erfülle die Lipschitzbedingung

$$|f(x,\varphi,\varphi') - f(x,\psi,\psi')| \leq L_0(x)|\varphi-\psi| + L_1(x)|\varphi'-\psi'|.$$

Die Iteration

$$-v''_{k+1} = f(x, v_k, v'_k),\ v_k(a) = v_a,\ v_k(b) = v_b,\ (k = 0,1...)$$

werde als Spezialfall des Fixpunktsatzes für kontrahierende Abbildungen aufgefaßt; wählt man als Norm

$$||\varphi|| := \underset{a \leq x \leq b}{\mathrm{Max}} \frac{1}{\alpha(x)} \{L_0(x)|\varphi(x)| + L_1(x)|\varphi'(x)|\},$$

so wird

$$L := \underset{a \leq x \leq b}{\mathrm{Max}} \frac{1}{\alpha(x)} \int_a^b \{L_0(x)|G(x,\xi)| + L_1(x)|G_x(x,\xi)|\}\alpha(\xi)\, d\xi$$

L nimmt den kleinstmöglichen Wert an, wenn $\alpha(x)$ als erste (positive) Eigenfunktion des durch

$$T\,\alpha = \int_a^b \{L_0(x)|G(x,\xi)| + L_1(x)|G_x(x,\xi)|\}\alpha(\xi)\,d\xi$$

definierten positiven Operators T gewählt wird. Im Spezialfall $L_0(x) = L_0$, $L_1(x) = L_1$ (vgl. Lettenmeyer, Collatz, Schröder, Petry,...) wird so

$$\alpha(x) = {}_1F_1\left(-\frac{1}{4}(b-a)\frac{L_0}{L_1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\frac{L_1}{L}\frac{(b-2x+a)^2}{b-a}\right)$$

und L berechnet sich aus

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{4}(b-a)\frac{L_0}{L_1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(b-a)\frac{L_1}{L}\right) = 0.$$

Eine ausführliche Darstellung erscheint in Kürze in der ZAMM

P.WISSKIRCHEN: Integrationsformeln zur Bahnbestimmung künstlicher Satelliten

Zur Bestimmung der Bahn künstlicher Satelliten ist das Differentialgleichungssystem $\ddot{r} = f(t, r, \dot{r})$ bei gegebenen Anfangsbedingungen r_o, $\dot{r}_o$ numerisch zu integrieren.

Zur numerischen Behandlung des obigen Problems bieten sich Mehrschrittverfahren hoher Ordnung an. Es wird ein Mehrschrittverfahren angegeben, das - jedenfalls für gewisse Klassen von Erdsatelliten - bei vorgegebener Genauigkeit und Integrationszeit T einen etwa um 20% geringeren Rechenaufwand benötigt als bisher bei der NASA verwendete Methoden.

J.U.KELLER: Über eine lineare Integro-Differentialgleichung in der Turbulenztheorie

Aus den (nichtlinearen) Navier-Stokes-Gleichungen für turbulente Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen kann eine Bedingungsgleichung für eine gewisse Wahrscheinlichkeit g(a,t)da hergeleitet werden. ($a=(a_1 \dots a_n)$, $da=\prod_j da_j$). Diese Größe gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß $n \geq 1$ viele beliebige, aber reguläre Funktionale der die Strömung beschreibenden Felder zum Zeitpunkt t Werte zwischen a_j und a_j+da_j ($j=1 \dots n$) besitzen.

Die Gleichung ist eine lineare, partielle Integro-Differentialgleichung der Form

$$(\partial/\partial t)g(a,t)+(\partial/\partial a_j)\,(v_j(a)g) =$$

$$= \int_o^t ds \int_{-\infty}^{\infty} da'(\partial/\partial a_j)W(a)K_{jk}(a,a',t-s)\,(\partial/\partial a'_k)\,\frac{g(a',s)}{W(a')} \,.$$

Hierbei sind W, v_j, K_{jk} gewisse für das System charakteristische Funktionen der angegebenen Argumente.

Im Hinblick auf die zahlreichen praktischen Anwendungen dieser Gleichung wäre es wünschenswert, numerische Verfahren zu ihrer Lösung systematisch zu entwickeln.

K.P.HADELER: <u>Einige Differentialgleichungen der Populationsgenetik</u>

Seien $M = (m_{jk})$ und $G = (g_{jk})$ symmetrische Matrizen mit nichtnegativen Elementen. Die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_j = p_j \sum_k m_{jk}p_k - \sum_{r,s} m_{rs}p_r p_s \cdot p_j$$

$$\dot{a}_{jk} = \frac{\sum_i m_{ji}\, a_{ji} \sum_l m_{kl}\, a_{kl}}{\left(\sum_{r,s} m_{rs}\, a_{rs}\right)^2} \sum_{r,s} g_{rs}\, a_{rs} - g_{jk}\, a_{jk}$$

und ihre Zusammenhänge werden untersucht.

F.LEMPIO: Bemerkungen zur Lagrangeschen Funktionaldifferentialgleichung

Für ein allgemeines Optimierungsproblem mit Operatorgleichungen und Operatorungleichungen als Nebenbedingungen wird eine Lagrangesche Multiplikatorenregel vorgestellt, die im wesentlichen die Lösbarkeit einer Funktionaldifferentialgleichung beinhaltete. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß eine der zahlreichen bekannten Constraint Qualifications erfüllt ist.

Durch Spezialisierung wird der Zusammenhang dieser Funktionaldifferentialgleichung mit verschiedenen notwendigen Optimalitätskriterien und Dualitätsaussagen aus Approximationstheorie, Variationsrechnung und Steuerungstheorie aufgezeigt.

Gleichzeitig wird auf die Bedeutung von numerischen Verfahren zur Lösung der dabei auftretenden Funktional- und insbesondere Differentialgleichungssysteme hingewiesen.

I.TOMA: Conditions of uniqueness for the solutions of a special class of nonlinear boundary value problems

There are considered nonlinear operators, which are polynomials with respect to the unknown function $u:\Omega\to R^n$ (n=1 eventually) and to an elliptic operator Au. The boundary is $u/_{\partial\Omega} = 0$ - for n=1 the bilocal problem. If the coefficients are sufficiently regular, the the considered problem allows an unique solution if certain determinants, attached to the problem, are not 0 and satisfy also to another simple condition. Some examples are given, especially for ordinary differential equations (for instants, $y'' = y'^2 + 1 + [g(x)]^2$, $y(o)=y(1)=0$). This particular form of the considered operator enables the determining of sufficient conditions, numerically given, for the uniqueness of the solution of the problem : $f(x,u,Au)=g(x)$, $u/_{\partial\Omega} = 0$ where f is continuous with respect to u and Au.

W.NIETHAMMER: Zur analytischen Fortsetzung von Potenzreihenlösungen

Für die Aufgabe, eine durch ihre Potenzreihe gegebene Lösung einer Differentialgleichung über den Rand des Konvergenzkreises hinaus fortzusetzen, wird ein klassisches Summierungsverfahren herangezogen und auf seine numerische Brauchbarkeit untersucht. Ein bekannter Satz über den "Fortsetzungsbereich" des Verfahrens liefert auch Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der transformierten Reihe. Für gewisse Fortsetzungsprobleme werden in einem gewissen Sinne optimale Verfahren beschrieben. Ferner werden für die Berechnung der Summierungsmatrix Rekursionsformeln angegeben.

W. Hofmann, Hamburg