Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 / 01309

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 24/1972

Harmonische Analyse und Darstellungstheorie topologischer Gruppen

11.6. bis 17.6.1972

Vom 11.6. bis 17.6.1972 fand eine Arbeitsgemeinschaft München - Heidelberg über harmonische Analyse und Darstellungstheorie topologischer Gruppen statt, geleitet von den Professoren H.Leptin (Heidelberg) und E.Thoma (München). Neben anderem widmete sich die Tagung vor allem der Theorie der C^*-Algebren und dem Problem der zentralen idempotenten Maße auf lokal-kompakten Gruppen.

Teilnehmer

H.Behncke, Heidelberg
W.Beiglböck, Heidelberg
H.Bock, Heidelberg
W.Bös, Heidelberg
A.Carlton, München
F.Eckstein, München
R.Felix, München
V.Flory, Heidelberg
D.Gaspar, Aachen
W.Hauenschild, München
R.W.Henrichs, München
R.Illner, Heidelberg
H.Johnen, Aachen
E.Kaniuth, München
H.W.Kirstein, München
R.Klose, Heidelberg
M.Leinert, Heidelberg
H.Leptin, Heidelberg
J.Ludwig, Heidelberg
T.Mc Minn, München
G.Schlichting, München
A.H.Siddiqui, Heidelberg
H.L.Skudlarek, München
D.Steiner, München
E.Thoma, München
U.Wendl, Heidelberg
T.W.Wilcox, München

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Vortragsauszüge

F. ECKSTEIN, H.W. KIRSTEIN, R.W. HENRICHS: Über eine Struktur auf den Maximalen Linksidealen einer C*-Algebra. *)

Bekanntlich ist eine abelsche C*-Algebra mit Einselement isomorph zur Algebra der stetigen Funktionen auf dem Kompakten Raum der maximalen Ideale.
In Arbeiten von Charles A. Akemann *) wird eine zu einer Topologie analoge Struktur auf dem Raum der abgeschlossenen Linksideale einer beliebigen C*-Algebra A mit Einselement definiert.
Eine Projektion p im Bidual A^{**} von A heißt offen, wenn es ein abgeschlossenes Linksideal $\mathfrak{J}$ in A gibt so daß $A^{**}p$ der schwache Abschluß von $\mathfrak{J}$ ist. $\mathfrak{J}$ ist durch p eindeutig bestimmt. Eine Projektion p in A^{**} heißt abgeschlossen, wenn $1-p$ offen ist. Die minimalen Projektionen sind genau die minimalen abgeschlossenen. Das Infimum von abgeschlossenen Projektionen ist abgeschlossen. Dagegen ist das Supremum von zwei abgeschlossenen Projektionen nicht notwendig abgeschlossen. Dazu wird ein Beispiel angeführt, sowie eine hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit angegeben. Als wesentliches Hilfsmittel für einen Gelfandschen Darstellungssatz wird folgendes Analogon zum Urysohnschen Lemma bewiesen: Ist A eine C*-Algebra mit Einselement und sind p und q abgeschlossene Projektionen in A^{**} mit $pq=0$. so gibt es ein $a \in A$ mit $0 \leq a \leq 1$, $ap=0$ und $aq=q$.

----

*) C.A. Akemann The General Stone-Weierstraß-Problem, Journ.of Funct.Analysis, Vol.4, No.2
Left Ideal Structure of C*-Algebras Journ.of Funct.Analysis, Vol.6, No.2

G. SCHLICHTING: Ein Gelfandscher Darstellungssatz für C*-Algebren.

Sei $A = C(X)$ die Algebra der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorfraum X , sowie $B(X)$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

die Algebra aller beschränkten Funktionen $f : X \to C$. Mittels punktweiser Multiplikation operiert $B(X)$ auf $\ell^2(X)$ und läßt sich auf diese Art darstellen als W*-Algebra linearer Operatoren auf $\ell^2(X)$. Eine Projektion $p \in B(X)$ aufgefaßt als charakteristische Funktion einer Teilmenge von X ist offen g.d.w. $f_n \in C(X)$ existieren mit $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $p = \sup f_n$. Die Stetigkeit einer reellwertigen Funktion $f \in B(X)$ ist dadurch charakterisiert, daß die zu $\lambda \in \mathbb{R}$ gehörigen Spektralprojektionen $E(\lambda)$ offen sind. Ist A eine nicht notwendig kommutative C*-Algebra (mit Eins) so betrachtet man anstelle von $B(X)$ die durch die direkte Summe aller irreduziblen (paarweise nicht äquivalenten) Darstellungen definierte W*-Algebra M . Eine Projektion $p \in M$ heißt offen, wenn $p = \sup a_\alpha$, $a_\alpha \in A$ nach oben gerichtet, $0 \leq a_\alpha \leq 1$. Die "Stetigkeit" eines hermiteschen Elementes $a \in M$ ist mittels seiner Spektraldarstellung $a = \int \lambda \, d\, E(\lambda)$ dadurch definiert, daß alle $E(\lambda)$ offen sind. Der Satz von Gelfand überträgt sich mit diesen Begriffen auf beliebige C*-Algebren: Die hermiteschen Elemente $a \in A$ sind genau die stetigen hermiteschen $a \in M$.

H. SKUDLAREK: <u>Gelfand-Theorie für nichtkommutative C*-Algebren ohne 1</u>

Ein selbstadjungiertes $T \in M$ liegt genau dann in A , wenn T stetig ist, d.h., wenn die zu offenen Teilmengen des Spektrums von T gehörigen Projektionen offen in M sind, und T im Unendlichen verschwindet, d.h., wenn die Projektionen zu kompakten Mengen, die die Null nicht enthalten, kompakt sind (durch Elemente von A majorisiert werden).
Der Beweis läßt sich mittels Adjunktion der Eins auf den Fall mit Eins zurückführen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. BEHNCKE: Lokale C*-Algebren

1958 zeigte Katznelson, daß für eine kommutative halbeinfache komplexe Banach Algebra A, die den Funktional-Kalkül aller stetigen Funktionen hat, $A \cong C_{\infty}(\hat{A})$ gilt. Das Problem ist nun, diesen Satz geeignet zu verallgemeinern. Wir sagen daher: Eine komplexe Banach Algebra A mit Involution * heißt lokale C*-Algebra (LC*-Algebra), wenn jedes hermitesche Element in A den Funktional-Kalkül aller stetigen Funktionen hat. Man zeigt dann:

Satz: Sei A ein L C*-Algebra, dann existiert ein Ideal I in A mit den Eigenschaften

(i) I ist algebraisch isomorph und topologisch homeomorph zu einer C*-Algebra, insbesondere ist I gleich seiner C*-Hülle , $I = C^*(I)$.

(ii) $^{A}/I$ enthält kein Ideal I mit den Eigenschaften aus (i) .

(iii) I enthält das maximale postliminale Ideal von A .

Dieser Satz von B. Barnes (Vorabdruck) verallgemeinert also das Ergebnis von Katznelson auf postliminale C*-Algebren. Das allgemeine Ergebnis ist bis jetzt noch offen.

Reinhard ILLNER: C*-Algebren mit total geordnetem Dual:

In mehreren Stufen wird ausgehend von einer total geordneten Menge I ($|I| = \aleph_0$) eine C*-Algebra $\mathfrak{A}$ als Unteralgebra der Algebra $B(\mathfrak{H})$ eines Hilbertraumes $\mathfrak{H}$ konstruiert. Die zweiseitigen abg. Ideale von $\mathfrak{A}$ sind alle primitiv, und es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen diesen Idealen und den Schnitten in I . Dieser Zusammenhang ist eine Ordnungsisomorphie, d.h. ist ein Schnitt $\lambda < \mu$, so folgt $m_\lambda \subset m_\mu$, wenn m_λ und m_μ die zu den Schnitten gehörigen Ideale in $\mathfrak{A}$ sind. Die Eigenschaften von I übertragen sich folgendermaßen auf das Dual von $\mathfrak{A}$:

1) $\mathfrak{A}$ hat maximales (min.) Ideal <=>
   I hat maximales (min.) Element.

2) $\mathfrak{A}$ ist postliminal <=> I ist wohlgeordnet.

3) $\mathfrak{A}$ ist antiliminal <=> I hat kein kleinstes Element.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Wolfgang BÖS: Gewisse C*-Algebren

Man konstruiert zu einem Mengensystem M_o mit der Eigenschaft (1) : $m,n \in M_o \rightarrow m \cap n \in M_o$ eine geeignete C*-Algebra $\mathfrak{A}_{M_o}$, deren Struktur man möglichst genau aus M_o ersieht.

Die wichtigsten Ergebnisse sind:

Wenn M_o ein endliches System ist, kann man Idealen und primitiven Idealen umkehrbar eindeutig und ordnungserhaltend Teilmengen von M_o zuordnen. Der Dualraum $\hat{\mathfrak{A}}_{M_o}$ ist zu M_o ordnungsisomorph. Weiter läßt sich jede endliche halbgeordnete Menge mit (1) als Dual einer C*-Algebra realisieren. Wenn M_o abzählbar ist, kann man wieder die primitiven Ideale einschließlich Maximalität und Minimalität durch Teilmengen von M_o beschreiben. Der Dualraum $\hat{\mathfrak{A}}_{M_o}$ "enthält" M_o. Außerdem kann man Fragen der Post- und Antiliminalität durch Bedingungen für M_o ausdrücken.

H. LEPTIN: Kommutantensatz

Beweis des Satzes über die Kommutante des Tensorproduktes zweier von Neumann-Algebren nach M. Takesaki (Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Lecture Notes in Mathematics 128)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M. LEINERT: Segal-Algebren

In einer Banach-Algebra A sei B ein dichtes Linksideal, das bezüglich einer Norm $| \ |_B$ selbst eine Banach-Algebra ist, und es gebe ein $K > 0$, so daß

$$|b|_B \geq K\,|b|_A$$

für alle $b \in B$. Dann heißt B eine abstrakte Segal-Algebra bezüglich A. Wenn außerdem A und B rechtsseitige approximierende Einheiten besitzen (die nicht beschränkt zu sein brauchen), so gibt es eine bijektive Beziehung zwischen den abgeschlossenen Idealen von A und denen von B, und bei dieser Beziehung bleibt die Eigenschaft eines Ideals, approximierende Einheiten zu besitzen, erhalten. Die letzte Aussage stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von H.Reiter dar.

E. KANIUTH: Ein einfacher Beweis des Satzes von P.J. Cohen von Itô/Amemiya.

Es wurde ein einfacher und eleganter, von Itô und Amemiya [Bull.Amer.Math.Soc.6 (1964), p. 774-776] stammender Beweis des Satzes von P.J.Cohen über die Beschreibung der Idempotente in der Maßalgebra einer lokalkompakten abelschen Gruppe vorgetragen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

T. WILCOX: Zentrale idempotente Maße auf kompakten Gruppen

Berichtet wurde über die Arbeit: Rider, D., Central Idempotent Measures on Unitary Groups, Can.J.Math. 22 (1970), 719-725.
Sei G eine kompakte Gruppe. Ein zentrales Maß μ auf G ist genau dann idempotent, wenn

$$\hat{\mu}^2 = \hat{\mu} \text{ ist, wobei } \hat{\mu}(\pi) = \frac{1}{d_\pi} \int_G \overline{Sp\ \pi(x)}\ d\mu(x) .$$

Man kann also die zentralen idempotenten Maße charakterisieren durch diejenigen Untermengen von $\hat{G}$, deren charakteristische Funktion gleich einem $\hat{\mu}$ ist. Diese Untermengen bilden einen Ring und es wird bewiesen, daß dieser Ring bei Gruppen, die zwei gewisse Bedingungen erfüllen, gerade der sogenannte Hypernebenklassenring ist. Die unitären und die einfachen kompakten Lie-Gruppen erfüllen diese beiden Bedingungen.

D. STEINER: Hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit der Trägergruppe G eines zentralen idempotenten Maßes auf einer lokal kompakten Gruppe G .

Für beliebige idempotente Maße ist die Trägergruppe i.A. nicht kompakt (diskretes, nicht abelsches Gegenbeispiel von W. Rudin [1])
Ist G $\in$ [I N], d.h. besitzt G eine kompakte, invariante Umgebung der Einheit, so ist die Trägergruppe G_μ ein $[FC]^-$-Normalteiler in G , d.h. G_μ hat präkompakte Konjugationsklassen. Dann ist G_μ kompakt erzeugt und damit schon kompakt. (Mosak, Moskowitz [2])
Für zusammenhängende lokal kompakte Gruppen zeigen F.Greenleaf, M.Moskowitz und L.P.Rothschild in [3], daß G_μ ein $[FC]^-$-Normalteiler ist, und damit nach obigem Schluß wiederum kompakt.

[1] Rudin, W.: Idempotents in group algebras
Bull.Amer.Math.Soc.69, (1963), 224-227

[2] Mosak,R. und Moskowitz,M.: Central Idempotents in Measure Algebras
Math. Zeit. 122, (1971), 217-222

[3] Greenleaf,F., Moskowitz,M. und Rothschild,L.P.:
Unbounded Conjugacy Classes in Lie Groups and Location of Central Measures (Preprint).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. JOHNEN: Saturation auf kompakten Gruppen

Auf $L_p(SU(2))$, $1 \leq p \leq \infty$, ist der Mittelungsoperator S_a definiert durch

$$S_a f(x) = \int_{SU(2)} f(x\, g^{-1} a\, g)\, dg \qquad (f \in L_p(SU(2)) .$$

Für jedes stetige f oder $f \in L_p(SU(2))$, $1 \leq p < \infty$ gilt offenbar

$$\lim_{a \to e} \| S_a f - f \|_p = 0 .$$

Bezeichnet $\rho(e,a)$ den Abstand von a zur Identität in der normalen Riemannschen Metrik von $SU(2)$ und ist X_n der Charakter der n- dimensionalen irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$, dann gilt:

(i) $\| S_a f - f \|_1 = o(\rho^2(e,a))$

$\iff$ $f = \text{const}$;

(ii) $\| S_a f - f \|_1 = O(\rho^2(e,a))$

$\iff$ $(n^2-1) \cdot \int f(g)\, X_n(xg^{-1})dg = \int X_n(xg^{-1})d\mu(g)$,

wobei μ ein beschränktes Borelmaß auf $SU(2)$ ist.

Der Operator $\Delta f = \lim_{a \to e} \dfrac{S_a - I}{\rho^2(e,a)} f$ kann als eine Verallgemeinerung des Laplaceoperators auf $SU(2)$ aufgefaßt werden.

W. BEIGLBÖCK:

Bericht über die Arbeit von B. Kostant: "Quantization and Unitary Representations" (Lecture Notes in Math. 170, 1970)

M. Leinert (Heidelberg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©