MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 25/1972

Variationsrechnung

18.6. bis 24.6.1972

Die diesjährige Tagung über Variationsrechnung wurde von den Herren E.Heinz (Göttingen), S.Hildebrandt (Bonn) und W.Jäger (Münster) geleitet.

Im Mittelpunkt standen die verschiedenen Zugänge zur Behandlung von Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung durch Minimalisierung geeigneter Funktionale sowie neuere Resultate über die Regularität solcher Lösungen.

Teilnehmer

W.K.Allard, Pisa (Italien)
F.J.Almgren, Princeton (USA)
H.W.Alt, Münster
W.Alt, Münster
L.Cesari, Ann Arbor (USA)
M.Emmer, Ferrara (Italien)
I.Frehse, Heidelberg
C.Gerhardt, Mainz
K.Goldhorn, Mainz
K.Gornik, Bonn
J.Guckenheimer, Princeton (USA)
R.Gulliver, Berkeley (USA)
F.P.Harth, Bonn
E.Hölder, Mainz
H.Kaul, Bonn
F.Lewerenz, Göttingen
R.Meise, Mainz
M.Miranda, Ferrara (Italien)
J.C.C.Nitsche, Minneapolis (USA)
H.Pecher, Göttingen
B.Schmidt, Bonn
H.Schmidt, Münster
U.Staude, Mainz
K.Steffen, Bonn
F.Tomi, Münster
W. von Wahl, Bonn

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

Frederick J. ALMGREN , jr. :

Geometric measure theory and the calculus of variations

There will be three main topics discussed:

(1) Relationship between the functional analytic and the measure theoretic settings for parametric variational problems.

(2) Brief survey of geometric measure theory.

(3) Recent results related to the existence and regularity of solutions to elliptic parametric variational problems with constraints in the setting of geometric measure theory.

One class of problems in the calculus of variations involves integrals of the form

$$\Phi(f) = \int_{x \in W} \varphi(x, f(x), Df(x))\, dx_1 \ldots dx_k \quad ,$$
$$W \subset \mathbb{R}^k,\ f: W \to \mathbb{R}^n,\ \varphi: W \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^+ .$$

Such problems are said to be "in parametric form" in case $\Phi(f) = \Phi(f \circ g)$ for each diffeomorphism $g : W \to W$. These integrals are of special geometric significance since their value depends only on the geometric properties of $f(W)$ and not on the particular parametrization which produces it. Indeed, such integrals are characterized by the existence of an integrand $F : \mathbb{R}^n \times G(n,k) \to \mathbb{R}^+$, such that for each f,

$$\Phi(f) = \int_{p \in f(W)} F(p, \mathrm{Tan}(f(W),p)) \cdot N(f,p)\, d\mathcal{H}^k_p \quad ,$$

where $N(f,p) = \mathrm{card}(f^{-1}\{p\})$, $\mathcal{H}^k$ k-dimensional Hausdorff measure on $\mathbb{R}^n$.

One notes that what is needed to integrate such an integrand F is a Radon measure on $\mathbb{R}^n \times G(n,k)$. Such Radon measures are called <u>k-dimensional varifolds in $\mathbb{R}^n$</u>.

Willam K. ALLARD :

On the first variation of a varifold: a regularity theorem

A varifold of dimension k in a Riemannian manifold M of dimension n is, by definition, a Radon measure on the Grassmann bundle of k-planes over M. To any classical geometric object in M corresponds in a natural way a k-dimensional varifold in M. Given any varifold in M, we define its first variation distribution, which corresponds to the mean curvature vector field if the varifold is regular. Our main result gives very weak conditions on a varifold and its first variation distribution which imply the regularity of the varifold.

Jean GUCKENHEIMER :

Singularities in two-dimensional area-minimizing integral currents modulo 3 in $\mathbb{R}^3$

The phenomenon of three smooth two dimensional surfaces meeting at 120^{o} angles along a smooth curve is well known from soap films. This has also been shown to be the nature of the singularities of a certain fairly general class of area-minimizing surfaces, namely, integral currents modulo 3. I will dicuss such surfaces and the major tool used in proving the smoothness of the singular set, an "epiperimetric inequality" analogous to the one introduced by Reifenberg.

Lamberto CESARI :

Existence theorems for multidimensional Lagrange problems

The author takes into consideration nonparametric problems of optimization concerning the minimum of a functional which in most cases is the sum of a γ-dimensional integral on a fixed domain G in E_γ, $\gamma \geq 1$, and of a $(\gamma-1)$-dimensional integral on the boundary ∂G of G. These integrals are expressed in terms of one or more unknown functions x

defined on G , and of a number of their partial derivatives and of their boundary values, as well as of possible distributed control functions u on G and boundary control functions v on ∂G .

The same functions x and control functions u and v are required to satisfy a number of nonlinear partial differential equations on G and on the boundary ∂G . Also, they are required to satisfy a number of possibly unilateral constraints.

Lower closure theorems may replace traditional lower semicontinuity arguments, and variants of Kuratowski's upper semicontinuity of sets replace traditional conditions of seminormality. By the use of Mazur theorem on normal spaces and of Krasnoselski's results on Caratheodory operators, seminormality type conditions can often be drastically reduced or eliminated. Existence theorems for optimal solutions are then proved by direct methods.

Robert GULLIVER :

Nonexistence of false branch points on surfaces with prescribed mean curvature

A brief overview of the Gulliver-Osserman-Royden theory of branched immersions is given and applied to surfaces of prescribed mean curvature. A simple proof of a geometric strong maximum principle is presented. This is then used to show that a surface in E^3 of prescribed mean curvature H, of the type of the disk, cannot have false branch points, provided that the boundary is mapped injectively, $|H| \leq 1$, and that the surface lies in the open unit ball of E^3.

Mario MIRANDA referred about

Hypersurfaces with prescribed mean curvature.

He investigated the equation $\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{D_i f(x)}{\sqrt{1+|Df(x)|^2}} = A(x,f(x))$ with boundary condition $f|_{\partial\Omega} = g$, $g \in L_1(\partial\Omega)$ and A measurable and bounded, by minimizing the functional

$$\mathcal{F}(f) := \int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\,dx + \int_\Omega \int_0^{f(x)} A(x,t)\,dt\,dx + \int_{\partial\Omega} |f-g|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

on $L_1(\Omega)$.

Michele EMMER :

Equilibrium surfaces of a liquid in a capillary tube

We study the problem of minimizing the functional

$$L_\nu(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\,dx + \int_\Omega f^2\,dx + \nu \int_{\partial\Omega} f\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is open and bounded, $\partial\Omega$ locally lipschitz, $f \in BV(\Omega)$.

We have proved the following results:

Theor. If $0 \leq \nu \leq 1/\sqrt{1+L^2}$, where L is the lipschitz constant of $\partial\Omega$, then there exists one and only one function in the class $BV(\Omega)$ which minimizes $L_\nu(f)$.

Theor. If for every $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ we have

$$\int_\Omega (\sqrt{1+|Df|^2} + f^2)\,dx \leq \int_\Omega (\sqrt{1+|D(f+\varphi)|^2} + (f+\varphi)^2)\,dx$$

then $f \in C^\omega(\Omega)$ for $n \leq 6$, while for $n > 6$ there exists an open set $\Omega_0 \subset \Omega$ with $f \in C^\omega(\Omega_0)$ and

$$H_s(\Omega - \Omega_0) = 0 \quad \forall s > n-7 .$$

Johannes C. C. NITSCHE :

Verallgemeinerte Scherksche Minimalflächen und die Ungleichung von E. Heinz und E. Hopf

Die Funktion $z(x,y)$ sei eine Lösung der Minimalflächengleichung im Kreise $x^2 + y^2 < R^2$. Für die Gaußsche Krümmung $K(x,y)$ der durch $z(x,y)$ dargestellten Minimalfläche gilt dann die Ungleichung

$$|K(0,0)| \leq \frac{c}{R^2 \cdot W^2(0,0)} \quad , \quad W(x,y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} ,$$

wo c eine universelle Konstante ist, deren bester Wert bislang nicht bestimmt wurde.

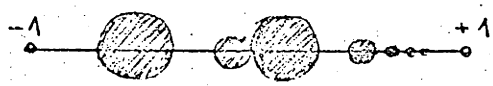
Für Lösungen $z(x,y)$, welche der Symmetriebedingung $z(x,y) = z(x,-y)$ genügen, wurde nun bewiesen, daß $c = \frac{\pi^2}{2}$ die bestmögliche Konstante ist. Der Beweis beruht auf dem Vergleich der Fläche $z(x,y)$ mit „verallgemeinerten

Scherkschen Minimalflächen". Das sind über gewissen Vierecken definierte Lösungen der Minimalflächengleichung, die bei Annäherung an die Seiten abwechselnd nach $+\infty$ und $-\infty$ gehen. Man kann sie als Verallgemeinerung der klassischen Scherkschen Fläche $\log \cos y - \log \cos x$ ansehen. Da eine explizite Darstellung solcher Flächen nicht möglich ist, liegt die Hauptschwierigkeit in der Gewinnung hinreichend präziser Information über ihre Eigenschaften. [Die Arbeit wird demnächst in J. Applic. Anal. erscheinen.]

Hans-Wilhelm ALT :

<u>Die Existenz einer Minimalfläche mit freiem Rand vorgeschriebener Länge</u>

An den Endpunkten eines Drahtes befestige man einen Faden der Länge L und spanne in diese Konfiguration eine Fläche x. Diese Fläche kann über einem Definitionsbereich B



parametrisiert werden. B besteht aus $[-1,1]$ und abzählbar vielen nebeneinander liegenden Kreisen. Ist der Draht durch einen Bogen $\Gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, gegeben, so lauten die Randbedingungen für eine Fläche $x \in H_2^1(\mathring{B}) \cap C^0(B)$

1) Länge $(x|_{\text{oberer Rand von } B}) \leq L$

2) $x|_{\text{unterer Rand von } B} \to \Gamma([-1,1])$ monoton mit der Normierung $x|_{[-1,1] \setminus \mathring{B}} = \Gamma$.

Unter solchen zulässigen Flächen minimalisiere man das Dirichlet-Intgral. Die Existenz eines Minimums wird in zwei Schritten gezeigt:

<u>Satz 1:</u> Ist $\mathcal{B}_0$ die Menge der Definitionsbereiche B, auf denen eine Minimalfolge existiert, so hat $\mathcal{B}_0$ bzgl. der Relation "$\subset$" minimale Elemente.

<u>Satz 2:</u> Ist $B \in \mathcal{B}_0$ minimal, so gibt es eine Minimalfolge auf B, die in der schwachen Topologie von $H_2^1(B)$ gegen eine zulässige Fläche konvergiert.

Klaus STEFFEN :

Ein Existenzsatz für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

Sei Γ eine rektifizierbare, geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ und $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion. Das Plateauproblem zu H und Γ besteht darin, eine Fläche $x : \overline{B} \to \mathbb{R}^3$ der Klasse $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ zu finden, $B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, die folgende Bedingungen erfüllt :

$$\Delta x = 2(H \circ x) x_u \wedge x_v \quad \text{in } B$$

$$x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v = x_u \cdot x_v = 0 \quad \text{in } B$$

$$x|_{\partial B} : \partial B \to \Gamma \quad \text{topologisch}$$

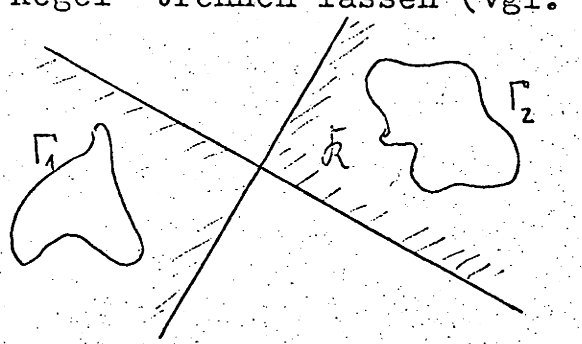
Dann hat x in allen Punkten (u,v), in denen $x_u \wedge x_v \neq 0$, die mittlere Krümmung $H(x(u,v))$. Eine Lösung dieses Problems ist nur zu erwarten, wenn H gewissen durch die Geometrie von Γ bedingten Einschränkungen unterliegt, z.B. erhält S. Hildebrandt Lösungen, wenn $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |H(x)| \leq (\text{Umkugelradius von } \Gamma)^{-1}$, und H. Wente, wenn $H = \text{const}$ und $|H| \leq \frac{1}{5} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A_\Gamma}}$ mit $A_\Gamma :=$ Infimum der Flächeninhalte aller in Γ eingespannten Flächen. Das letzte Resultat wird verbessert und auf den Fall gewisser variabler H erweitert, d.h. es werden Existenzsätze für das Plateau- Problem zu H, Γ bewiesen, wenn H Einschränkungen unterliegt, die alleine durch A_Γ bestimmt sind.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Stephan HILDEBRANDT

1. Notwendige Bedingungen für die Existenz mehrfach zusammenhängender Lösungen des Plateauschen Problems

Sei Ω eine zusammenhängende, offene Menge in $\mathbb{R}^2$, und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ n zusammenhängende abgeschlossene Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^3$. Dann werden quantitative geometrische Bedingungen angegeben dafür, daß es eine Minimalfläche (und allgemeiner: eine H- Fläche) $\mathfrak{X} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ gibt, deren Randwerte auf $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ liegen und für die $M_i \cap \mathfrak{X}|\partial\Omega$ nicht leer ist für alle $i = 1,2,\ldots,n$. Beispielsweise gibt es keine zweifach- zusammenhängende Minimalfläche, die von zwei geschlossenen Kurven Γ_1 und Γ_2 berandet wird, falls sich Γ_1 und Γ_2 durch einen zu $\{\mathfrak{X} = (x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ kongruenten Kegel "trennen" lassen (vgl. Fig. 1). Dieses Resultat enthält eine Reihe von Nitsche's Ergebnissen als Spezialfälle.



Die Beweismethode beruht auf dem Maximumprinzip, man weist nach, daß $k \circ \mathfrak{X}$ für geeignete Testfunktionen $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

2. Zur Regularität der Lösungen zweidimensionaler Variationsprobleme mit Hindernissen

Seien Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^2$, K eine abgeschlossene Menge des $\mathbb{R}^N$, und $f : \Omega \times K \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$,
$f = f(w,x,p)$, $w = (u,v)$, $x = (x^1,\ldots,x^N)$, $p = (p_1,p_2)$, $p_\alpha = (p_\alpha^1,\ldots,p_\alpha^N)$. Setze $E(x) = \iint_\Omega f(w,x,\nabla x)\, du\, dv$.

Schließlich bezeichne $x : \Omega \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung eines Variationsproblems der Art

$$\text{"} E \to \text{Min. in } \mathfrak{C} = \mathcal{C} \cap H_2^1(\Omega, K) \text{"} \quad ,$$

wobei $H_2^1(\Omega, K) = H_2^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \{ x : x \to K \text{ f.ü. auf } \Omega \}$ ist und $\mathcal{C}$ eine durch Randbedingungen definierte Teilmenge von $H_2^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bezeichnet.

Dann wird gezeigt:

(I) Wenn $K \in C^3$ und quasiregulär ist, und wenn $f(x,w,p)$ asymptotisch von der Ordnung p^2 und sehr stark elliptisch ist im Sinne von Morrey, so ist $x \in H_2^{2,loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

(II) Wenn darüberhinaus f von spezieller Natur ist (z.B. wie der bei H- Flächen auftretende Integrand

$$f(w,x,p) = p_\alpha \cdot G(x) \, p_\alpha + Q(x) \cdot (p_1 \wedge p_2) \quad),$$

so kann auch $x \in C^{1+\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H^{2,loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bewiesen werden für alle $\alpha \in (o,1)$ und $p \in [1, \infty)$.

Diese Resultate überschneiden sich teilweise mit denen von F. Tomi, während die Beweismethode ganz verschieden von der Tomischen ist und auf a priori - Abschätzungen für Differenzenquotienten von x_u, x_v beruht.

Fritz TOMI :

Variationsprobleme mit einer Ungleichung als Nebenbedingung.

Es wird das Problem betrachtet, ein Variationsintegral der Gestalt

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx \;, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

in einer Klasse von vektorwertigen Funktionen $u = (u^1, \ldots, u^N)$ zum Minimum zu machen, welche außer Randbedingungen einer Ungleichung

$$F(x,u(x)) \geq 0 \quad x \in \Omega$$

genügen müssen. Die Existenztheorie solcher Variationsprobleme ist unproblematisch, wenn die Lösung in geeigneten Sobolevräumen gesucht wird. Wenn $n = 2$, $f(x,u,p)$ asymptotisch gleich $|p|^2$ ist, und F eine Bedingung der gleichmäßigen Lipschitz- Regularität genügt, so kann gezeigt werden, daß eine Lösung aus dem Sobolevraum $H_2^1(\Omega)$ tatsächlich zu $C^\alpha(\Omega)$ gehört mit $0 < \alpha < 1$. Wenn eine bestimmte Strukturbedingung an das Differential von I erfüllt ist und F zu C^3 gehört, so kann man beweisen, daß eine Lösung in $C^\alpha(\Omega)$ bei beliebigem n automatisch im Raum $C^{1+\beta}(\Omega)$ liegt für alle β, $0 < \beta < 1$. Die Strukturbedingung an I ist z.B. beim Dirichlet- Integral für Funktionen mit Werten in einem Riemannschen Raum erfüllt.

Jens FREHSE :

Zum Regularitätsproblem bei Linearen Variationsungleichungen zweiter Ordnung

Minimiert man das Dirichletintegral unter der Nebenbedingung, daß die gesuchte Funktion vorgegebene Randbedingungen erfüllt und größer oder gleich einer Hindernisfunktion Ψ ist, so führt dieses Problem bekanntlich auf eine lineare Variationsungleichung zweiter Ordnung. Es ist bekannt, daß die Lösung im allgemeinen unstetige zweite Ableitungen hat. Das Äußerste, was man im allgemeinen an Regularität für die Lösung erwarten kann, ist die Beschränktheit der zweiten Ableitungen, dies ist jedoch bisher nur im Fall von zwei unabhängigen Variablen bei konvexem Hindernis bekannt gewesen, im Fall beliebiger Dimension und nicht konvexem, glattem Hindernis verfügte man bisher nur über das Resultat, daß die zweiten Ableitungen der Lösung in L^p, $1 \leq p < \infty$, liegen.
Der Vortrag gibt eine Methode, mit der die Beschränktheit der zweiten Ableitungen in dem gewünschten allge-

meinen Fall erhalten wird. Zu diesem Zweck wird das Problem diskretisiert und u.a. mit Hilfe von Maximumprinzipien eine gleichmäßige Abschätzung der zweiten Differenzenquotienten der Lösungen der diskretisierten Probleme gegeben. Diese Diskretisierung hat den Zweck, die Koinzidenzmenge besser in den Griff zu bekommen.
(Die Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt, die dem Verfasser ein sechsmonatiges Stipendium für einen Aufenthalt an der Scuola Normale in Pisa gewährte).

Wolfgang Alt, Münster

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft