

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 1/1973

Arbeitstagung Professor Baer

2.1. - 6.1.1973

Auch in diesem Jahr traf der Baersche Kreis unter Einschluß mathematisch verwandter Gäste zur traditionellen Arbeitstagung unter der Leitung von H. Salzmann zusammen, um die im vergangenen Jahr erzielten Ergebnisse auszutauschen und neue Ansätze zu diskutieren.

Aus räumlichen Gründen mußte die Teilnehmerzahl in diesem Jahr etwas geringer sein als sonst; dennoch konnten in den 3 1/2 Tagen 23 Vorträge veranstaltet werden. Es wurden Themen aus der Gruppentheorie, Ringtheorie, Verbandstheorie, Geometrie und topologischen Geometrie behandelt; die Vorträge umspannten also ein weites Feld und standen gleichwohl in mannigfacher Beziehung, was zu vielen fruchtbaren Gesprächen auch außerhalb der Vortragszeiten Anlaß gab. Einzelne Beiträge wurden von anderen Vorträgen der Tagung erst angeregt und machten deren Ergebnisse in anderem Kontext ergiebig. Die Kontinuität der Arbeit dieser Tagungsreihe wurde durch die zahlreichen Anknüpfungspunkte an die Beiträge der Arbeitstagungen vergangener Jahre sinnfällig.

Teilnehmer

M. Aigner, Tübingen	D.W. Erbach, Cambridge
B. Amberg, Mainz	K. Faltings, Kaiserslautern
R. Baer, Zürich	U. Felgner, Heidelberg
Th. Bedürftig, Tübingen	B. Fischer, Bielefeld
H. Bender, Kiel	H. Hähl, Tübingen
Angelika Betten, Tübingen	H.-R. Halder, München
D. Betten, Tübingen	H. Heineken, Erlangen
Th. Buchanan, Tübingen	Chr. Herrmann, Darmstadt

O.H. Kegel, London
H. Kurzweil, Tübingen
W. Liebert, München
R. Löwen, Tübingen
H. Mäurer, Darmstadt
G. Michler, Tübingen
P. Plaumann, Kaiserslautern
O. Prohaska, Kaiserslautern
C.M. Ringel, Darmstadt

H. Salzmann, Tübingen
W. Schelter, Tübingen
P. Schmid, Tübingen
R. Schmidt, Kiel
R.-H. Schulz, Tübingen
K. Strambach, Erlangen
M. Truffault, Nantes - z.Zt.
Tübingen
R. Wille, Darmstadt
J.S. Wilson, Cambridge

Vortragsauszüge

B. AMBERG: Gruppen mit endlichem Rang.

Sei \mathcal{C} eine bezüglich der Bildung von Untergruppen, epimorphen Bildern und Erweiterungen abgeschlossene Gruppenklasse. Sei die auflösbare Gruppe $G = AB$ das Produkt von zwei Untergruppen A und B , von denen wenigstens eine nilpotent sei.

Satz A. Sind A und B \mathcal{C} -Gruppen und ist B noethersch, so ist G eine \mathcal{C} -Gruppe.

Satz B. Hat außerdem jede \mathcal{C} -Gruppe endlichen abelschen Sektionsrang (i.S. von BAER), so gilt: Sind A und B \mathcal{C} -Gruppen und ist B artinsch, so ist G eine \mathcal{C} -Gruppe.

Satz C. Haben A und B endlichen torsionsfreien Rang (i.S. von ZASSENHAUS) und ist G noethersch oder artinsch, so hat G endlichen torsionsfreien Rang und es gilt:

$r(G) = r(A) + r(B) - r(A \cap B)$, wobei $r(X)$ der torsionsfreie Rang von X ist.

R. BAER: Von Konjugiertenklassen gleichmäßig beschränkter Mächtigkeit überdeckte Normalteiler.

Beweis, Folgerungen und Verallgemeinerungen des folgenden Satzes werden diskutiert:

Die folgenden Eigenschaften des Normalteilers $N \triangleleft G$ sind äquivalent:

- (i) Es gibt eine positive ganze Zahl n , so daß jede Konjugiertenklasse x^G mit $x \in N$ höchstens n Elemente enthält.
 - (ii) Es gibt einen endlichen Normalteiler $E \triangleleft G$ mit $N' \subseteq E \subseteq N$ und endlicher von G in N/E induzierter Automorphismengruppe.
- (Vgl. auch den nachstehenden Beitrag von P. PLAUMANN)

Th. BEDÜRFTIG: Homogenitätseigenschaften selbstdualer ebener projektiver Ebenen.

Es wurde über verschiedene Homogenitätseigenschaften ebener projektiver Ebenen gesprochen, die auf Selbstdualität zugeschnitten sind. Z.B.:

- (i)_j Γ , die volle Kollineationsgruppe der ebenen projektiven Ebene \mathcal{P} , ist j -fach transitiv auf dem Oval \mathcal{O}_π einer Polarität π von \mathcal{P} .
- (ii) Γ ist transitiv auf dem Innern \mathcal{O}_π° des Ovals \mathcal{O}_π .
- (iii) \mathcal{P} ist überdeckt von Ovalen \mathcal{O}_π .
- (iv) \mathcal{P} ist bis auf einen Punkt von Ovalen überdeckt.
- (v) Es gibt Geraden a , die zweifach absolut sind, d.h. je zwei Punkte auf a sind absolute Punkte mindestens einer Polarität.

Satz:

- a) Gilt (i)₁, so ist $\Gamma_1 \cong R \times SO_2$, oder $\Gamma_1 \cong SO_2$ (oder \mathcal{P} ist desarguessch)
- b) Gilt (iii), so ist \mathcal{P} desarguessch, oder \mathcal{P} läßt sich darstellen über einem Neokörper mit Links- und Rechtskürzung der Addition.
- c) Gilt (iv), und (v) für irgendeine Gerade, so ist \mathcal{P} eine Moultebene, oder \mathcal{P} läßt sich darstellen über einem Neokörper entweder mit Links-, oder mit Rechtskürzung, oder mit kommutativer Addition.
- d) \mathcal{P} ist desarguessch, wenn (i)₂, oder (i)₁ und (ii), oder (v) für alle Geraden gilt.

H. BENDER: Zum Satz von Burnside (II).

Es wurde über eine Arbeit von HIROSHI MATSUMAYA berichtet, die einen sehr einfachen Beweis für den $p^a q^b$ -Satz von Burnside im Falle gerader Ordnung enthält.

Kern der Arbeit ist folgendes

Lemma: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz von Burnside. Sei P bzw. Q eine Sylow- p -Untergruppe bzw. Sylow- q -Untergruppe von G . Ist $1 \neq X \subseteq Z(P)$ und $1 \neq Y \subseteq Z(Q)$, so normalisiert Y keine X enthaltende p -Untergruppe von G .

D. BETTEN: 4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe.

Sei Γ die volle Kollineationsgruppe einer nicht-desarguesschen 4-dimensionalen Translationsebene, und die zusammenhängende Standardgruppe $\Delta = (\Gamma_0)^1$ auf einem eigentlichen Punkt wirke irreduzibel auf dem \mathbb{R}^4 . Dann gibt es genau eine solche Ebene, und diese stimmt formal überein mit den von HERING, MZ 1970, angegebenen endlichen Translationsebenen.

T. BUCHANAN: "Lineare" Loops auf der 3-Sphäre sind homotop zur Quaternionenmultiplikation.

Es wird gezeigt, daß eine Loop auf der 3-Sphäre, die sich aus der Restriktion der Multiplikation eines topologischen zu \mathbb{R}^4 homöomorphen Quasikörpers ergibt, homotop zur Quaternionenmultiplikation (oder deren entgegengesetzten) ist.

(Dies ist eine partielle Lösung eines von S. BREITSPRECHER gestellten Problems.) Aus diesem Ergebnis folgt, daß die Punktmenge der projektiven Ebene über einem topologischen zu \mathbb{R}^4 homöomorphen Quasikörper mit normerhaltender Multiplikation homöomorph zur Punktmenge der klassischen Ebene über den Quaternionen ist.

D.W. ERBACH: Die Jagd nach einer Kodierung einer projektiven Ebene der Ordnung 10.

Es wurde über den erst seit kurzem in Angriff genommenen Versuch berichtet, die Eigenschaften der Kodierung einer hypothetischen projektiven Ebene der Ordnung 10 zu bestimmen. Insbesondere wurde ein Überblick über Methoden gegeben, mit deren Hilfe es kürzlich gelungen ist, einen Beweis der Nichtexistenz von Codewörtern von Gewicht 15 zu führen; und es wurden die gegenwärtigen Anstrengungen erörtert, die Isomorphieklassen und Anzahlen der Codewörter von Gewicht 16 zu bestimmen.

K. FALTINGS: Modulare Verbände mit Punktsystem.

Es wurde vorgetragen über eine teilweise Lösung des Problems einer geometrisch-verbandstheoretischen Kennzeichnung von Untermodulverbänden unitärer Moduln über beliebigen unitären Ringen. Dabei besteht die Einschränkung darin, daß die Moduln einen freien direkten Summanden vom Rang 1 besitzen und zusätzlich einigen Reichhaltigkeitsbedingungen genügen.

U. FELGNER: \mathcal{N}_1 -kategorische Theorien stark-regulärer Ringe.

M. MORLEY (TAMS 114 (1965)) hatte die Vermutung von LOS bewiesen: "Eine Theorie, die in einer überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch ist, ist in allen überabzählbaren Mächtigkeiten kategorisch".

\mathcal{N}_1 -kategorische Theorien sind ω -stabil. A. MACINTYRE (Fund. Math. 70, 71 (1971)) hat die ω -stabilen und die \mathcal{N}_1 -kategorischen Theorien abelscher Gruppen und kommutativer Körper charakterisiert. Für stark-reguläre Ringe R ($\forall a \in R \exists x \in R: a = a^2x$) haben wir gezeigt:

Satz: Sei R ein stark-regulärer Ring und $\text{Th}(R)$ ω -stabil. Dann hat R ein Eins-Element und R ist direkte Summe von endlich vielen Schiefkörpern.

Allgemein sind Ringe R mit $\text{Th}(R)$ ω -stabil perfekt. Aus dem

obigen Satz folgt unter Verwendung einiger modelltheoretischer Techniken das Resultat von REINEKE, daß die ω -stabilen Theorien kommutativer halbeinfacher unitaler Ringe R genau die direkten Summen von algebraisch-abgeschlossenen Körpern mit endlichen Ringen sind. Die volle Klassifizierung der \aleph_1 -kategorischen Ringe ist noch nicht erledigt.

H.-R. HALDER: Eine Verallgemeinerung der Großkreisgeometrie.

Sei S eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und \mathcal{L} ein System abgeschlossener 1-dimensionaler Teilmannigfaltigkeiten ("Geraden").

Es gelte:

- A I: Zwei Geraden schneiden sich in genau n Punkten ($n > 0$, fest)
- A II: Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert eine Verbindungsgerade
- A III: Zu jedem Punkt existiert eine Umgebung U , so daß die Spurgeometrie auf U eine Salzmannebene ist.

Dann heiße (S, \mathcal{L}) eine ebene n -Schnitt-Geometrie. Für solche gilt:

- 1.) Die Geraden sind homöomorph zur Kreislinie. \mathcal{L} ist homöomorph zur projektiven Ebene; und es ist
 $n = 1$, also (S, \mathcal{L}) eine ebene projektive Ebene
oder $n = 2$ und S ist homöomorph zur 2-Sphäre.
- 2.) Die Gruppe der stetigen Kollineationen ist eine höchstens 2-dimensionale Liegruppe, sofern (S, \mathcal{L}) nicht eine Überlagerung einer ebenen projektiven Ebene ist, sonst höchstens 8-dimensional.
- 3.) Die ebenen (sphärischen) 2-Schnitt-Geometrien, die nicht Überlagerung einer ebenen Ebene sind, mit 2-dimensionaler Kollineationsgruppe erhält man durch geeignetes Zusammenkleben zweier affiner Ebenen.

H. HEINEKEN: p -Gruppen kleiner Ordnung mit p -Automorphismengruppen.

Bericht über gemeinsam mit H. LIEBECK (Keele) erzielte Ergebnisse:

1. Alle p -Gruppen der Klasse 2, deren Ordnung nicht größer als p^5 ist, besitzen Involutionen als Automorphismen.
2. Es gibt eine Gruppe G mit $o(G)=p^6$ und $G'=G^p=Z(G)$ als größter Untergruppe vom Exponenten p , deren Automorphismengruppe die Ordnung p^{10} hat.
3. Es gibt eine von zwei Elementen erzeugte p -Gruppe der Klasse 2, deren Automorphismengruppe eine p -Gruppe ist.

Hierbei ist p grundsätzlich eine ungerade Primzahl. Die Konstruktionen in 2. und 3. sind sonst unabhängig von der speziellen Wahl von p .

H. KURZWEIL: Gruppen, die schön zerfallen.

Eine endliche Gruppe G heiße A -Gruppe, falls G eine Reihe von Normalteilern

$$1 \subseteq N \subseteq M \subseteq G$$

besitzt, so daß

- (i) $|N|$ und $|G/M|$ sind ungerade
- (ii) $M/N / Z(M/N)$ ist direktes Produkt einer 2-Gruppe mit einfachen Gruppen E_i ($i = 1, 2, \dots$).

Eine A -Gruppe G heiße A^* -Gruppe, falls die E_i isomorph zu einer der folgenden einfachen Gruppen sind: $L_2(2^n)$, $Sz(2^n)$, $U_3(2^n)$, $L_2(q)$ mit $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$, JR.

Es wurde der Beweis des folgenden Satzes diskutiert:

Satz: Sei G eine endliche Gruppe. Dann sind gleichwertig:

- a) Jede 2-lokale Untergruppe von G ist eine A -Gruppe
- b) G ist eine A^* -Gruppe
- c) Jede auflösbare 2-lokale Untergruppe von G hat 2-Länge 1.

W. LIEBERT: The Jacobson radical of some endomorphism rings.

Let R be a principal ideal domain. Let M be an R -module which is a direct sum of cyclics. Let $E(M)$ be the R -endomorphism ring of M and $JE(M)$ its Jacobson radical.

Theorem 1: Let M be free. Let $\Phi(M) = \{\alpha \in E(M) ; M\alpha \subseteq J(R)M\}$ and $E_0(M) = \{\alpha \in E(M) ; r(M\alpha) < \infty\}$. Then $\Phi(M)$ and $E_0(M)$ are 2 - sided ideals in $E(M)$ with $JE(M) = \Phi(M) \cap E_0(M)$.

Theorem 2: Let M be p -primary. Let $M[p] = \{x \in M ; px = 0\}$ and $M_n = M[p] \cap p^n M$. Let $H(M) = \{\alpha \in E(M) ; M_n \alpha \subseteq M_{n+1} \forall n\}$. Then $JE(M) = \{\alpha \in H(M) ; \exists k = k(\alpha) ; M_k \alpha = 0\}$.

Theorem 3: Let $M = F \oplus T$ where F is free and T torsion. Let $T = \bigoplus_p T_p$ be the primary decomposition of T . Then, with obvious embeddings, $JE(M) = JE(F) + JE(T) + \text{Hom}_R(F, T)$, where $JE(F)$ is as in Theorem 1 and where $JE(T) = \prod_p JE(T_p)$ with $JE(T_p)$ as in Theorem 2.

H. MÄURER: Symmetrische Ovale.

Sei \mathcal{O} ein Oval in einer projektiven Ebene \mathcal{E} , $P \in \mathcal{O}$ und p die Tangente in P an \mathcal{O} . An jeder Geraden $g \neq p$ durch P existiere eine \mathcal{O} invariant lassende Perspektivität $\neq 1$ von \mathcal{E} mit der Achse g .

In dieser Situation ist \mathcal{E} papposch und \mathcal{O} ein Kegelschnitt, falls \mathcal{E} eine Moufangebene ist. Unter der Voraussetzung " \mathcal{E} ist Translationsebene bzgl. p " kann dieses Resultat nicht bewiesen werden.

G.O. MICHLER: Primitive Ideale in Gruppenringen endlich erzeugter nilpotenter Gruppen.

Inhalt dieses Vortrages ist der mit A.W. GOLDIE gemeinsam erhaltene Satz: Sei G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe und R ein kommutativer Hilbert-Ring. Dann ist jeder primitive Faktorring des Gruppenringes RG eine zentral-einfache Algebra.

P. PLAUMANN: Bemerkungen zu einem Satz von BAER.

Unter Verwendung des von BAER angegebenen Satzes (siehe Seite 2

dieses Vortragsberichts) wird folgendes Ergebnis bewiesen:
 Für eine lokal kompakte, total unzusammenhängende Gruppe G und einen Normalteiler N von G sind folgende Bedingungen gleichwertig:

- (i) Es gibt eine kompakte Teilmenge C von G , so daß jede Konjugiertenklasse x^G , $x \in N$, kompakt ist und in xC enthalten ist.
- (ii) Es gibt einen kompakten Normalteiler K von G mit $N' \subseteq K \subseteq N$, so daß G auf N/K eine endliche Gruppe von Automorphismen induziert.

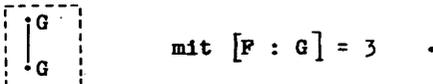
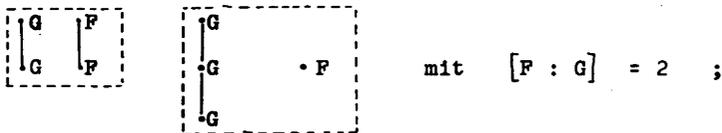
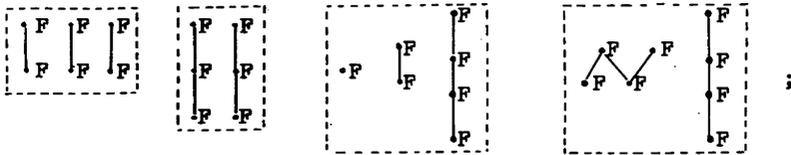
C.M. RINGEL: Vektorräume mit vorgegebenen Unterräumen.

Sei F ein Körper, der den Körper K in seinem Zentrum enthält und endlichen Grad über K hat. Eine K -Struktur S für F besteht aus einer endlichen Halbordnung (die ebenfalls mit S bezeichnet werde) und einer Familie $(F_i)_{i \in S}$ von K enthaltenden Unterkörpern von F mit $F_i \subseteq F_j$ für $i \leq j$. Ein S -Raum $(V, V_i)_{i \in S}$ ist ein F -Vektorraum V mit F_i -Unterräumen V_i , derart daß $V_i \subseteq V_j$ für $i \leq j$. Der folgende Satz verallgemeinert ein Ergebnis von KLEINER, NAZAROVA und ROITER; er wurde in Zusammenarbeit mit V.DLAB bewiesen:

Satz: Sei S eine K -Struktur. Es gibt nur endlich viele unzerlegbare S -Räume dann und nur dann, wenn

$$\max \left\{ \sum_{i \in I} [F : F_i] ; I \text{ Antikette in } S \right\} \leq 3$$

und wenn außerdem S keine der folgenden Strukturen als volle Unterstruktur enthält:



W. SCHELTER: Flat Modules and Torsion Theories.

One obtains a torsion theory for a ring R , from a left flat R -module ${}_R U$, by taking as torsion all right R -modules M_R , such that $M \otimes_R U = 0$. It is shown that the UTUMI torsion theory for $C(X)$, X compact, does not arise from a flat module. It is also shown that if the idempotent filter of dense ideals has a countable base, then the torsion theory does come from a flat (for arbitrary R). If and only if U is finitely generated over its endomorphism ring, then the torsion theory comes from a product of indecomposable injectives.

P. SCHMID: Über das \mathcal{F} -Hyperzentrum einer endlichen Gruppe.

Eine Formation $\mathcal{F} \neq \emptyset$ heißt auflösbar-gesättigt, falls aus $G/\Phi(N) \in \mathcal{F}$ für einen auflösbaren Normalteiler N von G stets $G \in \mathcal{F}$ folgt. BAER hat gezeigt, daß solche Formationen in einem gewissen Sinne lokal erklärbar sind. Aufgrund dieses Ergebnisses kann man in jeder endlichen Gruppe G in natürlicher Weise das \mathcal{F} -Hyperzentrum $Z_{\mathcal{F}}(G)$ definieren. Ist $\mathcal{F} = \mathcal{N}$ die Formation der nilpotenten Gruppen, so handelt es sich gerade um das Hyperzentrum $Z_{\infty}(G)$.

Es werden Beziehungen zwischen $Z_{\mathcal{F}}(G)$ und dem \mathcal{F} -Residuum $G^{\mathcal{F}}$ aufgezeigt. Grundlegend ist, daß sich diese beiden Untergruppen immer zentralisieren. Ist \mathcal{F} gesättigt, so gibt es eine Untergruppe F von G mit $F \in \mathcal{F}$ und $G = F \cdot G^{\mathcal{F}}$; ist F maximal mit diesen Eigenschaften, so gilt $Z_{\mathcal{F}}(G) = C_F(G^{\mathcal{F}})$. Dies verallgemeinert einen Satz von HUPPERT. Für jede auflösbar-gesättigte Formation \mathcal{F} und jede endliche Gruppe G gilt $G^{\mathcal{F}} \cap Z_{\mathcal{F}}(G) \leq \Phi(G)$. Für die Formation der nilpotenten Gruppen kann dies verbessert werden: Es ist $G' \cap Z_{\infty}(G) \leq \Phi(G)$.

K. STRAMBACH: Variationen über ein Jugendthema von R. BAER.

Es wurde gezeigt, daß man die meisten Sätze über die Norm einer

Gruppe von der Klasse der diskreten auf die Klasse der lokal kompakten Gruppen übertragen kann.

B. TRUFFAULT: Quelques propriétés des 1/6 - groupes de GREENDLINGER.

On définit un 1/6-groupe au moyen d'une présentation finie

$$G = \langle a_1, \dots, a_r; R_1(a_\mu), \dots, R_n(a_\mu) \rangle$$

où les R_i sont cycliquement réduits et tels que si R et S sont des permutations circulaires de relateurs ou de leurs inverses, R et S ne peuvent coïncider sur plus de 1/6 de leur longueur à moins d'être identiques.

Dans un tel groupe le problème des mots est résoluble au moyen de l'algorithme de DEHN. On peut en outre montrer que ces groupes ont des propriétés qui les rendent très proches des groupes libres; notamment deux éléments permutables sont nécessairement contenus dans un même sous-groupe cyclique, deux puissances non symétriques d'un même élément d'ordre infini ne sont pas conjugués, les sous-groupes cycliques vérifient une condition maximale ... Il est quasi certain que cette analogie puisse être poussée encore plus loin.

R. WILLE: Über modulare Verbände, die von einer endlichen halbgeordneten Menge frei erzeugt werden.

D_2 sei ein zweielementiger Verband, M_3 ein fünfelementiger modularer Verband, der nicht distributiv ist und $FM(H)$ ein modularer Verband, der von der halbgeordneten Menge H frei erzeugt wird; ferner sei A_4 eine vierelementige Antikette und H_5 die disjunkte Vereinigung eines Elementes mit zwei zweielementigen Ketten:



Satz: Für eine endliche halbgeordnete Menge H sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) $FM(H)$ ist endlich
- (2) Jedes homomorphe Bild von H erzeugt in einem Verband von Untervektorräumen einen endlichen Unterverband.
- (3) $FM(H)$ ist ein subdirektes Produkt von Verbänden, die zu D_2 und M_3 isomorph sind.
- (4) A_4 und H_5 sind zu keiner Unterstruktur von H isomorph.

J.S. WILSON: SN-groups with non-Abelian free subgroups.

Generalisations of the results of MERZLJAKOV (1963) and P.HALL (1964) showing that \overline{SI} -groups may possess non-Abelian free subgroups were discussed, and groups with the properties of the title were presented. Let p be any prime, and let A_p denote the ring of rationals with denominators coprime to p . If G is the group of all $g \in SL_2(A_p)$ with $g \equiv 1 \pmod{pA_p}$, then G has non-Abelian free subgroups; that it is both an \overline{SI} -group and an \overline{SN} -group is a trivial consequence of the

Theorem: (a) any non-central subnormal subgroup of G contains a term of the lower central series of G
and (b) any non-subnormal serial subgroup of G is metabelian.

Since non-Abelian free groups are neither \overline{SI} -groups nor \overline{SN} -groups, Problem 10 of the KUROŠ and ČERNIKOV survey, which asks whether or not the properties \overline{SI} and \overline{SN} are inherited by subgroups, has a negative answer.

H. Hahl (Tübingen)