MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 2/1973

Mengenlehre und Modelltheorie

7.1. bis 13.1.1973

Dies war die Fortsetzung einer Tagung in Berlin vom 1.10. bis 7.10.1972 der Arbeitsgemeinschaft über "Mengenlehre und Modelltheorie". Beide Tagungen beschäftigten sich mit "Forcing in der Modelltheorie".

Diese Tagung stand unter der Leitung von A. Oberschelp und K. Potthoff (beide Kiel).

Teilnehmer

W. Baur, Zürich
G. Belger, Münster
H. Bergmann, Hannover
H.-G. Carstens, Hannover
R. Deißler, Freiburg
E. Drewitz, Heidelberg
W. Eck, Berlin
U. Felgner, Heidelberg
R. Fittler, Berlin
U. Friedrichsdorf, Kiel
K. Gloede, Heidelberg
D.C. Goldrei, Oxford
K. Heidler, Freiburg
J. Jung, Heidelberg
W. Kaufmann-Bühler, Heidelberg
B. Koppelberg, Bonn
R. Lehmann, Berlin
J.A. Makowsky, Zürich
G.H. Müller, Heidelberg
A. Oberschelp, Kiel
B. Peppinghaus, Bonn
K. Podewski, Hannover
K. Potthoff, Kiel
A. Prestel, Bonn
J. Reineke, Hannover
M. Richter, Tübingen
W. Schönfeld, Bonn
W. Schwabhäuser, Bonn
E. Stecker, Heidelberg
K.-H. Tacke, Hannover
E.J. Thiele, Berlin
G. Todt, Kiel
T. von der Twer, Bonn
H. Volger, Tübingen
M. Ziegler, Berlin

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

W. SCHÖNFELD: Forcing und das Omitting-Types-Theorem

Es wurde über die gleichnamige Arbeit von Keisler berichtet, in der Henkin's Satz über das Auslassen von elementaren Typen mit Hilfe des Forcing bewiesen wird: Sei $\mathbb{P}$ derjenige Forcing-Begriff, für den die Bedingungen gerade die mit einer vorgegebenen Theorie widerspruchsfreien endlichen Satzmengen sind. Dann wird jeder elementare Typ, der kein Haupttyp ist, von allen bezüglich $\mathbb{P}$ generischen Strukturen ausgelassen. Letztere existieren für abzählbare Sprachen.
Als Anwendungen des OTT wurden Vaught's Satz über die Existenz von Primmodellen und der ω-Vollständigkeitssatz bewiesen.

J. REINEKE: Forcing für infinitäre Sprachen

Dieser Vortrag stellte die wichtigsten Ergebnisse aus der Arbeit: Forcing for Inf. Languages, Carol Wood Coven, Dissertationsarbeit der Yale Universität, 1971, vor. Das Forcing wurde kanonisch für unendliche Spra chen definiert. Man erhält dann nach entsprechenden analog übertragenen Definitionen Klassen von Modellen von Theorien 1. Stufe, und zwar E_T (existentiell abgeschlossen bzgl. $L_{\omega,\omega}$), ∞_T (generische Strukturen bzgl. unendlichem Forcing in $L_{\omega,\omega}$), U_T(existentiell universell abgeschlossen), G_α(generische Strukturen bzgl. unendl. Forcing in $L_{\alpha,\omega}$) und E_α (existentiell abgeschlossen bzgl. $L_{\alpha,\omega}$). In dem Vortrag wurde die Axiomatisierbarkeit dieser Klassen von Strukturen behandelt und der folgende Zusammenhang bewiesen:
(λ:= Kardinalität von L)

$$\begin{array}{cccccc} & \infty_T & \subset & E_T & & \\ & \cup & & \cup & & \\ \alpha\leq\lambda & G_\alpha & \subset & E_\alpha & & \\ & \cup & & \cup & & \\ & G_{\lambda^+} & = & E_{\lambda^+} & = & U_T \\ & \| & & \| & & \\ \beta>\lambda & G_\beta & = & E_\beta & & \end{array}$$

M. ZIEGLER: Über die Kapitel I & II der Ph.D. Thesis von W. Wheeler: "Algebraically closed divisionrings, Forcing and the analytical hierarchy".

Aus den Sätzen von Cohn über Divisionsringe wurden u.a. folgende Sätze über algebraisch abgeschlossene (a.a.) Divisionsringe gezeigt:

1. Jeder abzählbare a.a. Divisionsring besitzt $2^{\aleph_0}$ verschiedene Automorphismen
2. Jeder abzählbare Körper ist in jeden a.a. Divisionsring gleicher Charakteristik einbettbar
3. Sei N ein endlich erzeugter Divisionsring, der im abzählbaren a.a. Divisionsring D enthalten ist, dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi: D \to D$ mit $\varphi(D) \neq D$, $N \subset \varphi(D)$, $\varphi \restriction N = id \restriction N$
4. Seien D_1 und D_2 a.a. Divisionsringe. Dann ist $D_1 \equiv_{\infty,\omega} D_2$ g.d.w. D_1 und D_2 dieselben endlich erzeugten Unterstrukturen besitzen.
5. Es gibt $2^{\aleph_0}$ verschiedene von 3 Elementen erzeugte Divisionsringe.

U. FELGNER: Über "Kapitel III & IV" der Thesis von Wheeler

Es wurden drei verschiedene Modellklassen-Ketten $\langle \Sigma_n; n\in\omega\rangle$ (Cherlin), $\langle K_n; n\in\omega\rangle$ (Hirschfeld) und $\langle \mathcal{E}_n; n\in\omega\rangle$ vorgestellt mit $\Sigma_0 = K_0 = \mathcal{E}_0 = Mod(T_\forall)$, $\Sigma_1 = K_1 = \mathcal{E}_1 = E_T$ und $G_T = \bigcap_n \Sigma_n = \bigcap_n K_n = \bigcap_n \mathcal{E}_n$, wobei G_T die Klasse der T-generischen Modelle ist für das "Infinite-Forcing" von Macintyre. Falls T arithmetisch ist, dann sind $Th(K_n)$ und $Th(\mathcal{E}_n)$ Π^1_n bzw. Π^1_{2n-1}- Teilmengen von ω. Daher folgt: $T^f = \{\Phi\in L;\ \emptyset \Vdash^* \Phi\}$ (für $\Vdash$ finite forcing) ist hyperarithmetisch und $T^F = Th(G_T)$ ist 1-1-reduzibel auf die Zahlentheorie zweiter Stufe, $T^f \leq_1 Th(\mathbb{N})$. Falls T die elementare Theorie der Divisionsringe (=Schiefkörper) ist, dann gilt $Th^2(\mathbb{N}) \leq_1 T^F$ und T^F ist nicht analytisch (im Sinne von Kleene), aber hyperanalytisch, also sind T^F und die Theorie $Th^2(\mathbb{N})$ der zweiten Stufe der Zahlentheorie rekursiv isomorph; also $T^f \neq T^F$. Zum Beweis wird in jedem existentiell abgeschlossenen Divisionsring R eine Struktur für die Analysis definiert.

K. POTTHOFF: Eigenschaften einiger Modellklassen und der zugehörigen Companion-Operatoren

Es wurden Sätze und einige Beweise des Paragraphen 1 der Arbeit "The forcing companions of number theories" von Goldrei, Macintyre und Simmons vorgetragen. In diesem Paragraphen werden die Klassen E_T der T-existentiell abgeschlossenen Modelle, EU_T der T-universell-existenziell abgeschlossenen Modelle, G_T der T-unendlich generischen Modelle und F_T der T-endlich generischen Modelle sowie die zugehörigen Theorien beschrieben.

U. FRIEDRICHSDORF:

Der Vortrag behandelte das zweite Kapitel der Arbeit von Goldrei, Macintyre, Simmons "The forcing companions of number theories". Im wesentlichen wurde gezeigt, daß für den induktiven Teil der Peano-Arithmetik B gilt:
Es gibt einen $\forall$ - Satz I(x) mit

$$I^A = \omega \text{ und } A \models (\forall x) I(x) \Leftrightarrow A = \langle \omega, + \ldots \rangle$$

für jede B - e.a. Struktur A.

D.C. GOLDREI: On the Forcing Companions of Number Theory

The main purpose of the talk was to explain the proof of Thm 3.2 of Goldrei-Macintyre-Simmons, stating: " Let B be the inductive sentences proved in Peano Arithmetic, and CON(B) a natural $\exists_1$-sentence stating the consistency of B in the language of B. Then for all sentences $\sigma \in \forall_1$ $B \cup \{\neg CON(B)\} \vdash \sigma \Rightarrow B \vdash \sigma$". This theorem implies $\neg$CON(B) is in the minimum companion of B. The proof came from Macintyre & Simmons "Gödel's Diagonalization Technique etc." The talk continued with an introduction to Simmons' paper "Topological Aspects of Suitable Theories" which relates the properties of B needed to prove the above theorem to properties of a "pseudo-topological space" naturally obtained from B. The talk concluded with an exposition of § 3 of Goldrei-Macintyre-Simmons.

A. Prestel (Bonn)