MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1973

Kontinuumsmechanik fester Körper

14.1. bis 20.1.1973

Die Tagung wurde von W. Günther und H. Lippmann (beide Karlsruhe) vorbereitet. Leider konnten mehrere angemeldete Fachkollegen wegen Grippeerkrankungen nicht teilnehmen (so auch W. Günther) oder mußten in Oberwolfach das Bett hüten.

Das Thema "Kontinuumsmechanik fester Körper" war bewußt breit gehalten, wurde aber von der Vielfalt der in den Vorträgen behandelten Themen voll ausgefüllt. So konnten sich die Teilnehmer umfassend über den Stand der Forschung informieren. Der Bogen spannte sich von Vorträgen zu den physikalischen Grundlagen über die Darstellung und Erörterung phänomenologischer Theorien sowohl klassischer als auch verallgemeinerter Kontinua bis hin zu Berichten über numerische Verfahren und Experimente. Dabei wurden die verschiedenen mechanischen Stoffeigenschaften, wie elastisches, viskoses, plastisches Verhalten usw., berücksichtigt, aber auch die Wechselwirkungen zwischen Mechanik einerseits und Thermodynamik bzw. Elektrodynamik andererseits erörtert.

Die Mannigfaltigkeit der referierten Themen und die Diskussion unter den Teilnehmern ließen erkennen, daß bei den physikalischen Grundlagen der Festkörpermechanik und den phänomenologischen Theorien einschließlich ihrer numerischen Anwendung in der Technik noch viele Probleme offen sind. Im Bereich der numerischen Berechnung fällt die Anwendung komplizierterer, für viele Aufgaben der Praxis realistischerer Stoffgesetze auf. Daneben beobachtet man ein intensives Bemühen, die Verbindung zwischen phänomenologischen Theorien und der Festkörperphysik zu vertiefen. Dies soll in Zukunft verstärkt geschehen. Die Teilnehmer stimmten in dem Vorschlag überein, sich nach 2 Jahren erneut in Oberwolfach zu treffen und über weitere Fortschritte zu diskutieren.

Während der Abende nach dem täglichen Vortragsprogamm und bei einer gemeinsamen Wanderung zum "Heinerhof" wurden die Fachgespräche weitergeführt, alte Bekannschaften aufgefrischt und neue angeknüpft.

Teilnehmer

Alblas, J.B., Eindhoven
Anthony, K., Stuttgart
Baumgarte, J., Braunschweig
Bednarczyk, H., Stuttgart
Besdo, D., Braunschweig
Blum, R., Stuttgart
Bontscheva, N., Sofia
Bruhns, O., Bochum
Bufler, H., Stuttgart
Buggisch, H., Darmstadt
Dikmen, M., Ankara
Futterer, A., Karlsruhe
Geurst, J.A., Eindhoven
Glockner, P., Calgary (Kanada)
Grioli, G., Padua
Goldscheider, M., Karlsruhe
Gudehus, G., Karlsruhe
Herrmann, K., Goslar
Kröner, E., Stuttgart
Laws, N., Cranfield (England)
Lehmann, Th., Bochum
Lenz, J., Karlsruhe
Lippmann, H., Karlsruhe
Luz, E., Stuttgart
Mahrenholtz, O., Hannover
Malmberg, Th., Leopoldshafen
Mannl, V., Karlsruhe
Mróz, Z., Warschau
Olszak, W., Warschau
Parkus, H., Wien
Perzyna, P., Warschau
Radenkovic, D., Paris
Schiffner, K., Darmstadt
Schneider, G., Dortmund
Schwed, H., Karlsruhe
Schwieger, H., Bochum
Stein, E., Hannover
Teodosiu, C., Bukarest
Thermann, K., Bochum
Ulitko, A.F., Kiew
Wawra, H., Karlsruhe
Weber, H., Karlsruhe
Weinitschke, H.J., Berlin
Winzen, W., Karlsruhe
Ziegler, F., Wien

Vortragsauszüge

ALBLAS, J.B.: Some Problems in the Theory of Magneto-Elastic Interactions

In the lecture a review was given of the basic equations of the theory of magneto-elasticity.

For simple geometries and material symmetries some elementary static solutions exist.
A small external perturbation gives rise to small deformations and changes in the magnetisation. A linear set of equations is derived that governs the deviations of the basic solution. The theory is applied to the investigation of the propagation of magnetic and magneto-elastic waves in the infinite space, the half space and the cylinder. Special attention has been given to reflection, transmission and surface phenomena, also in domain structures. The theory also enables the investigation of the stability of the basic solution.

ANTHONY, K.: Gedanken zur Anpassung von Kontinuumstheorien an physikalische Probleme

Die nichteuklidischen Geometrien bieten sehr wirksame Methoden zur Beschreibung von physikalischen Strukturen deformierbarer Medien. Da die mathematische Struktur dieser Geometrien außerordentlich reichhaltig ist, können sie vielen physikalischen Problemen optimal angepaßt werden. Diese Tatsache wird an drei Beispielen demonstriert:

1. Einige Strukturfehler von Atomkristallen.
2. Ansätze zu einer Kontinuumstheorie der Polymere.
3. Ansätze zu einer Kontinuumstheorie des magnetischen Flußliniengitters in Supraleitern 2. Art.

Die Abschnitte 1 und 2 sind geometrischen Fragen gewidmet. Der Abschnitt 3 befaßt sich mit den Zustandsgleichungen des Flußliniengitters.
Im Vortrag wird auf mathematische Formalismen zugunsten einer physikalisch anschaulichen Darstellung verzichtet.

BESDO, D.: Wege zu Lösungsverfahren der COSSERAT-Plastizitätstheorie

Das Stoffgesetz für ein isotropes starrplastisches COSSERAT-Kontinuum sei ähnlich aufgebaut wie im klassischen Kontinuum. Das Fließkriterium $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\mu}}, Y, L, \dots) = 0$ ist dann im Raume der Spannungen σ_{ij}, μ_{ij} mit dem Vektor $\underline{\lambda}$ der 18 Formänderungsgeschwindigkeiten $\lambda_{ij} = v_{i;j} + e_{ijk}\omega_k$, $\eta_{ij} = \omega_{i;j}$ über $\underline{\lambda} = \chi \operatorname{grad} f$

$(\chi > 0)$ verbunden. Die Bedingung $f = 0$ beschreibt dabei eine konvexe Fläche, und f ist innerhalb negativ. Falls f als $-\overset{1}{f}\overset{2}{f}$ gegeben ist, gilt $\underset{\sim}{\lambda} = \overset{1}{\chi} \operatorname{grad} \overset{1}{f} + \overset{2}{\chi} \operatorname{grad} \overset{2}{f}$ $(\overset{1}{\chi}, \overset{2}{\chi} > 0)$. Für die Kriterien

(a) $\quad f = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} + L^{-2}\mu_{ij}\mu_{ij} - \frac{2}{3}Y^2$

(b) $\quad f = -[\sigma'_{(ij)}\sigma'_{(ij)} - \frac{2}{3}Y^2][\sigma_{[ij]}\sigma_{[ij]} + L^{-2}\mu_{ij}\mu_{ij} - K^2]$

wird gezeigt, daß bei dem elliptischen Gleichungssystem, das sich in beiden Fällen daraus herleitet, für ebene Umformungen eine Transformation auf Gleitlinien ein numerisches Integrationsverfahren mit hyperbolischen Teilsystemen und einer umschließenden Iteration aufzubauen gestattet. Im Fall (b) benötigt man jedoch neben dem Gleitlinienfeld ein zweites orthogonales Netzwerk. Allgemeiner anwendbare Verfahren auf der Basis des Satzes von der oberen Schranke werden erwähnt. Für den Fall eines Finit-Element-Verfahrens ist zu erwarten, daß die geschätzten Geschwindigkeitsfelder oft Sprungflächen enthalten. Die dort auftretenden inneren Leistungen werden für die Fälle (a) und (b) angegeben.

BUGGISCH, H.: <u>Herleitung der mechanischen Bilanzgleichungen des COSSERAT-Kontinuums aus der Energiegleichung</u>

Bekanntlich kann man die Bilanzgleichungen für den Impuls und die Masse aus der Energiebilanzgleichung eines Kontinuums - z.B. eines COSSERAT-Kontinuums - gewinnen, wenn man das Verhalten der Energiegleichung bei Galileitransformationen kennt. Weiß man darüber hinaus, wie sich die Energiegleichung eines COSSERAT-Kontinuums beim Übergang zu rotierenden Systemen transformiert, so lassen sich zusätzlich die Bilanzgleichungen für den Drall und die Mikroträgheit gewinnen.

DIKMEN, M.: <u>Einige Sätze der Variationsrechnung und ihre Anwendung auf ein Kontinuum mit Verzerrungsenergiefunktion</u>

Die klassische Variationstheorie der hyperelastischen Körper stellt hohe Differenzierbarkeitsforderungen, welche nicht notwendig sind bei dem Beweis der Existenz einer Lösung des reinen mathematischen Variationsproblems, unter Erweiterung der Klasse der zulässigen Funktionen. Dann aber entspricht diese Variationsaufgabe nicht mehr der klassischen endlichen Elastizitätstheorie. In diesem Vortrag wird besprochen, ob und inwieweit eine in diesem Sinne verallgemeinerte Verzerrungsenergiefunktion die Mechanik eines Kontinuums bestimmen kann.

GEURST, J.A.: A continuum theory for smectic mesophases

The Ericksen-Leslie director theory for liquid crystals of the nematic and cholesteric mesophase is extended to the smectic mesophase of type A. A complete dynamic theory is developed for a model having a layered structure determined by a family of parallel surfaces with a perpendicular director. The focal-conic texture is shown to be compatible with the theory. The model can be extended to other smectic mesophases.

GLOCKNER, P.: COSSERAT Surface and Sandwich Shell Theory

Using both direct and index notation, the nonlinear deformation of sandwich shells with a "weak" core and similar membrane facings is investigated by means of a variable director field. Using previously obtained equilibrium equations, a virtual work principle for such sandwich shells is derived and suitable strain measures defined which are analogous to those of COSSERAT surface theory.

Compatibility equations between these strain measures are derived and compared, where possible, with corresponding equations of classical nonlinear shell and linear COSSERAT surface theories.

GOLDSCHEIDER, M.: Stoffgleichungen und Fließverhalten von trockenem Sand

Sand als Kontinuum wird als homogener, geschwindigkeitsunabhängiger, isotroper einfacher Feststoff mit Erinnerungsvermögen charakterisiert. Die Stoffannahmen werden unter Anwendung der Prinzipien der modernen Kontinuumsmechanik begründet und für endliche Verformungen formuliert. Durch Beschränkung auf "Quaderverformungen" (engl. "rectilinear extensions") und lineare Verformungswege wird die Stoffgleichung auf eine isotrope Tensorfunktion reduziert, die unter Beachtung eines Darstellungstheorems durch Polynomansätze approximiert werden kann. Homogene, weggesteuerte Quaderverformungen an Sand können in einem neuartigen Versuchsgerät fast ideal ausgeführt werden (sechs quadratische, reibungsfrei und orthogonal gegeneinander geführte Platten 16cm x 16cm). Die gemessenen Verformungs- und Spannungswege, - zur Veranschaulichung im Hauptkomponentenraum axonometrisch dargestellt -, zeigen neue Ergebnisse bezüglich Erinnerungsvermögen, Isotropie und Fließverhalten körniger Stoffe.

KRÖNER, E.: Zur Elastizitätstheorie statistisch aufgebauter Festkörper

Die vollständige makroskopische Beschreibung des Verhaltens von Festkörpern mit einem mikroskopisch ungleichmäßigen, zumindest teilweise ungeordneten Aufbau erfordert unendlich viele Funktionen. Diesen Zweck erfüllen die Korrelationsfunktionen des Materialtensors sowie der maßgeblichen Feld- und Quellgrößen. Die entscheidende Bedeutung des Ordnungsgrades wird am Beispiel der linearen Elastostatik demonstriert. Dabei wird angenommen, daß der Körper lokal den Gesetzen der konventionellen Elastizitätstheorie folgt.
Das Verhalten solcher "Zufallsmedien" kann in vier Kategorien gruppiert werden, die wir als primitv lokal, primitiv nichtlokal, nichtprimitiv lokal und nichtprimitiv nichtlokal einstufen. Der Term primitiv bedeutet, daß die mittleren Felder individuell aus einem geschlossenen Gleichungssystem ohne Heranziehen von Korrelationsfunktionen berechnet werden können. Damit dies möglich ist, muß die Hillsche Bedingung $\langle\sigma\varepsilon\rangle = \langle\sigma\rangle\langle\varepsilon\rangle$ gelten, wo σ und ε den Spannungs- und Dehnungstensor darstellen. Diese Situation tritt in vielkristallinen Aggregaten und in Mehrphasensystemen dann, und nur dann, auf, wenn (1) eine Ergodenhypothese begründet werden kann, (2) die Zahl der Körner unendlich ist und (3) die Verteilung der Volumspannungsquellen, soweit solche vorhanden sind, nicht zu den lokalen Elastizitätsmoduln korreliert ist.
Wenn die Materialparameter über endliche Distanzen korreliert sind, erhält man ein nichtlokales Antwortgesetz, das in der primitiven Situation die Standardform annimmt. Nur wenn der Auf-

bau des Körpers vollkommen ungeordnet und die Situation primitiv ist, gehorchen die mittleren Felder einem Antwortgesetz mit effektivem Materialtensor.
Sind alle Korrelationsfunktionen der lokalen Materialparameter bekannt, so kann man einen Satz von mittleren Greenschen Funktionen berechnen, der es erlaubt, die gewünschten makroskopischen Felder durch die makroskopischen Quellen auszudrücken.

LAWS, N.: <u>Composite Materials</u>

The problem of determing overall thermoelastic moduli of some solid composites is discussed. The phases may be arbitrarily anisotropic. One phase is required to be aligned ellipsoidal inclusions. Some exact results are obtained for a binary composite. In the general case, the self-consistent method is used to estimate the overall moduli. The general results are shown to reduce to known formulae for an isotropic dispersion of spheres.

LEHMANN, TH.: <u>Endliche, elsto-plastische, nicht-isotherme Formänderungen</u>

Bei der Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen eines klassischen Kontinuums entstehen zwei Problemkreise:

1. das kinematische Problem, die Verzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufzuspalten,
2. die Beschreibung des Vorganges
   a) im Rahmen einer Prozeßbeschreibung
   b) als thermodynamische Zustandsänderungen.

Zur Aufspaltung der Verzerrungen geht man zweckmäßig von einer multiplikativen Zerlegung der Größen $q^i_k = \overset{\circ}{g}{}^{ir} g_{rk}$ in $q^i_k = \overset{\circ}{g}{}^{ir} \overset{*}{g}_{rm} \overset{*}{g}{}^{ms} g_{sk}$ aus, wobei $\overset{\circ}{g}$ die Metrik im unverformten, $\overset{*}{g}$ die Metrik im - gedachten - plastisch verformten Zwischenzustand und g die Metrik des elasto-plastisch verformten Mediums ist.
Die Prozeßbeschreibung ordnet dem Satz unabhängiger Prozeß-Variabler (etwa den Spannungen und der Temperatur) funktional einen Satz abhängiger Prozeß-Variabler zu. Die charakteristische Form der Prozeß-Beschreibung elasto-plastischer Formänderungen ist

ein System gewöhnlicher D.-Gln. für die abhängigen Prozeß-Variablen. Hinzu treten gewisse Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und Ungleichungen.
Die Beschreibung durch Zustandsgleichungen enthält Zustandsfunktionen der Zustandsgrößen. Es wird untersucht, wie sich für elastisch-plastische Formänderungen geeignete Zustandsgrößen definieren lassen und welche Beziehungen zwischen diesen Zustandsgrößen und den Prozeß-Variablen bestehen.

LIPPMANN, H.: <u>Bemerkungen zu den inkrementellen Extremalsätzen elastisch-plastischer Medien</u>

Diese wurden vor ca. 25 Jahren von GREENBERG, PRAGER, HODGE u.a. begründet, seitdem vielfach erweitert und lauten in ihrer einfachsten Form wie folgt:

1) $W\ (\dot{\sigma}^{\circ}, \lambda^{\circ}, \dot{F}^{\circ}, u) \geq W\ (\dot{\sigma}, \lambda, F, u);$

2) $W\ (\dot{\sigma}^{*}, \lambda^{*}, \dot{F}, u^{*}) \geq W\ (\dot{\sigma}, \lambda, F, u).$

Hierin bedeuten σ_{jk} den Spannungszustand (statisch, keine Volumenkräfte), $F_j = \sigma_{kj}\, n_k$ die zugehörigen Oberflächenkräfte (n_k: Einsnormale auswärts), u_j die Verschiebungs- und $\lambda_{jk} = u_{(j,k)}$ die zugehörigen Formänderungsgeschwindigkeiten (in raumfesten kartesischen Koordinaten x_j). $\dot{\sigma}_{jk}$ erfüllt dieselben Gleichgewichtsbedingungen wie σ_{jk}, jedoch mit zusätzlichen konvektiven Gliedern. Diese werden vernachlässigt.
Der zulässige Zustand $\dot{\sigma}^{\circ}, \lambda^{\circ}, \dot{F}^{\circ}$ erfüllt wie $\dot{\sigma}, \lambda, F$ die Gleichgewichtsbedingungen und das elastisch-plastische Stoffgesetz (PRANDT-REUSS, idealplastisch oder mit Verfestigung; ggf. mit allgemeinem plastischem Potential), jedoch ohne Zusammenhang mit Verschiebungsgeschwindigkeiten. Der zulässige Zustand $\dot{\sigma}^{*}, \lambda^{*}, u^{*}$ genügt ebenfalls dem Stoffgesetz, jedoch braucht kein Gleichgewicht zu bestehen.

a) Durch ein Gegenbeispiel wird gezeigt, daß Satz 2) grundsätzlich falsch ist, weil bei seiner Herleitung statt $\dot{F}_j = \dot{\sigma}_{jk} n_k + \sigma_{jk} \dot{n}_k$ nur $\dot{F}_j = \dot{\sigma}_{jk} n_k$ berücksichtigt wird. Ausnahme: $\sigma_{jk} \dot{n}_k = 0$, insbes.: $\dot{n}_k \equiv 0$.
b) Hingegen ist Satz 1) stets richtig, und zwar selbst dann, wenn die konvektiven Glieder in den Gleichgewichtsbedingungen oder andere Zusatzterme (etwa bei materieller Zeitableitung $^{\bullet}$) nicht

wegfallen.

MAHRENHOLTZ, O.: Zur Berechnung der Dynamik gebauter, elastischer Rotoren .

Rotoren großer Abmessungen werden ebenso wie Sonderkonstruktionen aus Teilen mit überwiegendem Scheibencharakter aufgebaut. Solche "gebauten Läufer" lassen sich nicht länger als eindimensionales Kontinuum behandeln. Es wird eine finite Umsetzung angegeben, mittels derer das räumliche rotationssymmetrische Problem auf ein ebenes zurückgeführt wird. Sei r, ϕ, z die Einbettung, so gilt für das Verschiebungsfeld $u = U(r,z) \cdot \cos\phi$; $v = V(r,z) \cdot \sin\phi$ $w = W(r,z) \cos\phi$. Die finiten Elemente sind Toroidelemente mit Dreiecksform in der Meridianebene. Vergleichsrechnungen für homogene Kreiszylinder zeigen die Brauchbarkeit des Näherungsansatzes, der auch für die Berechnung eines Modelläufers herangezogen wurde. Die numerische Lösung machte von der Methode der simultanen Iteration der Lösungsvektoren Gebrauch.

MROZ, Z.: Boundary-value problems in cyclic plasticity

Simple theories of plasticity such as flow rules associated with a single yield surface are sufficient accurate in predicting plastic behaviour for monotonic loading. However, for alternating or cyclic loads, such theories cannot describe complex plastic behaviour with sufficient accuracy. The concept of multiple loading surfaces or internal state parameters may then be introduced and respective plasticity theories become considerably complicated, requiring step by step integration of incremental relations for both strain and internal parameters.
The present work is aimed at elaborating relatively simple models of cyclic behaviour that could be expressed in terms of generalized stresses and strain and could be applied in treating boundary-value problems both for loading and unloading or subsequent loading conditions. The stress-strain relations obtained imply partial independence of the loading path. Some particular cases of thick-walled tube and circular plates are considered in detail

in order to illustrate applicability of the proposed description.

OLSZAK, W.: Nichthomogenitäts- und Anisotropie-Effekte in der Plastizitätstheorie

(I) Fast alle in der technischen Praxis verwendeten Materialien weisen in ihrem mechanischen Verhalten ausgesprochene Nichthomogenitäts- und Anisotropie-Effekte auf. Wenn diese Erscheinungen im elastischen Regime oft vernachlässigbar sind, ist diese Vereinfachung für das plastische und rheologische Materialverhalten meist nicht mehr zulässig.
In der Arbeit wird zunächst eine entsprechende Klassifizierung der nichthomogenen und anisotropen Materialien vorgenommen und durch entsprechende Beispiele belegt. Es wird weiterhin die Form des plastischen Potentials für den allgemeinen Fall der Anisotropie, begleitet von einer Material-Nichthomogenität, vorgeschlagen. Es wird nachgewiesen, daß die Formänderungsenergie im allg. nicht in der üblichen Art in die beiden Bestandteile (Volumenänderungs- und Gestaltänderungsenergie) aufgespaltet werden kann. Eine derartige Aufspaltung ist nur für gewisse wohldefinierte Symmetrietypen der Materialstruktur sowie für deren totale Symmetrie (Isotropie) möglich. Es können jedoch geeignete entsprechend definierte Begriffe (die verallgemeinerte Volumenänderungs- bzw. verallgemeinerte Gestaltsänderungs-Energie der ersten und der zweiten Art) eingeführt werden, die eine analoge Aufspaltung gestatten. Auf dieser Basis kann dann auch die Fließbedingung (in der energetischen Fassung) formuliert werden. Es werden die verschiedenen Formen dieser Fließbedingung diskutiert (je nachdem die verallgemeinerte Gestaltsänderungs-Energie der ersten oder der zweiten Art verwendet wird oder aber die allgemeine Form der Fließfunktion).
(II) Als Anwendungsbeispiele werden Randwertprobleme gelöst und zwar: (1) eine inhomogene Halbebene, beansprucht durch eine konzentrierte Kraft; (2) der inhomogene exzentrische Kreiszylinder; (3) nichthomogene, rotierende Scheiben; (4) nichthomogener isotroper dickwandiger Zylinder; (5) nichthomogener anisotroper Zylinder; (6) nichthomogene Schalen; (7) Grenzlast-

probleme nichthomogener anisotroper Konstruktionselemente; (8) nichthomogene lockere und kohärente körnige Medien. Abschließend wird gezeigt, wie die Verwendung von entsprechend angesetzten Nichthomogenitätsfunktionen als Grundlage von effektiven Methoden zur (angenäherten) Lösung von plastizitätstheoretischen Problemen der homogenen Medien dienen kann.

PERZYNA, P.: <u>Physical Theory of Viscoplasticity</u>

The objective of this lecture is to develop a thermodynamic theory of viscoplasticity describing strain rate sensitivity and thermal influences in the entire range of strain rate and temperature changes. A mathematical structure of this theory together with a set of rules of interpretation is given. Two groups of internal state variables are introduced to describe rheological properties and structural changes implied by dynamic plastic deformations.

A secondary purpose is to base this investigation on physics of solids and available experimental data. The discussion of mechanisms responsible for dynamic plastic deformations is given and the description of the changes of internal parameters is presented. All considerations are valid for finite deformations. Application of this theory to the description of thermo-mechanical properties of irradiated materials is shown.

RADENKOVIC, D.: <u>Duality of limit theorems and applications in soil mechanics</u>

We consider structures submitted to external forces which depend on u independent parameters Q^i, so that the external work is $W = Q^i q_i$, with q_i as dual kinematical variables; σ is the distribution of generalized internal forces and v that of corresponding velocities.

It is shown that the study of limit equilibrium is related to an eigen-value problem. For standard materials the approximate values of vectors Q, if not these of the corresponding fields (σ, v), can be found considering a dual min-max problem for a

functional J[Q,q,σ,v] of four independent arguments.
For non-standard materials Q lies in an annulus which can be defined, but no definite meaning can be attached to any approximate solution, as it is shown on an example.

SCHIFFNER, K.: <u>Numerische Behandlung der Randwertaufgabe des viskoelastischen Kontinuums</u>

Zwei Lösungsmethoden, mit denen das quasistatische Randwertproblem für viskoelastische Kontinua auf der Basis der Finite-Element-Methode behandelt werden kann, werden angegeben:
(1) Mit Hilfe des Mehrstellenverfahrens werden die partiellen Ableitungen der Zustandsgrößen nach der Zeit durch Differenzenquotienten ersetzt. Die so angenäherte Randwertaufgabe läßt sich wie das Randwertproblem der Elastizitätstheorie mit Vorspannungen lösen.
(2) Es werden mit Hilfe des viskoelastischen Korrespondenzprinzips numerische Lösungen für den Laplace-transformierten Raum (bezüglich der Zeit) bestimmt. Zur Berechnung der Umkehrtransformation wird ein Näherungsverfahren angewandt.

SCHWIEGER, H.: <u>Der Biegestoß auf eine elastische Platte. Eine vereinfachte Theorie und ihre experimentelle Überprüfung</u>

Beim zentralen Stoß einer kugelförmigen Masse auf eine Platte entstehen Biegestörungen, die sich zum Rande hin ausbreiten und dort reflektiert werden. Bei relativ großen Platten ist die maximale Stoßkraft und das maximale Biegemoment an der Stoßstelle unabhängig von den Randbedingungen, da die reflektierten Wellen erst nach dem Auftreten der maximalen Stoßbelastung im Zentrum eintreffen. Theoretisch wird gezeigt, daß in diesem Frühstadium das zentrale Biegemoment unabhängig von den Längsdimensionen der Platte ist. Für die Stoßkraft läßt sich eine einfache Differentialgleichung ableiten und die dimensionslose Stoßkraft als Funktion eines Stoßparameters darstellen. Kennt man die Stoßkraft, so kann man in Annäherung, falls man die Stoßkraftfunktion durch eine Rechteckfunktion ersetzt, das maximale Biegemoment abschätzen. Zur besseren Bestimmung dieser Belastungsgröße werden Kurvenblätter bereitgestellt, in welchen das Maximum des dimensionslosen Biegungsmoments ebenfalls als Funktion des Stoßparameters festbehalten ist. Experimentell wurden die Stoßkraft und das zentrale Biegungsmoment gemessen, die z.T. recht gut mit den theoretischen Werten dieser Größen übereinstimmten.

STEIN, E.: Zur Analyse nichtlinearer Schwingungen kontinuierlicher elastischer Systeme

Der Bewegungszustand eines deformierbaren Elementarwürfels wird zunächst in Lagrange'scher Betrachtungsweise mit Einführung des Cauchy-Green'schen Verzerrungstensors und des Kirchhoff'schen Spannungstensors beschrieben. Es folgt das Hamilton'sche Prinzip bei Berücksichtigung eines beliebigen Vorspannungszustandes.

Für die Anwendung der Theorie auf vorgespannte Membranen wird eine räumliche Diskretisierung durch lineare Verschiebungsansätze für ebene "finite Dreieckelemente" vorgenommen. Als freie Parameter werden die Knotenverschiebungen gewählt, die als die generalisierten Koordinaten der zugeordneten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen aufzufassen sind. Man erhält ein System von gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen die Knotenverschiebungen in den 1., 2. und 3. Potenzen auftreten.

Die Lösung nichtlinearer Schwingungsprobleme für stoßartige Belastungen bei gegebener Vorspannung kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten erfolgen:

1. Man diskretisiert auch über die Zeit t, z.B. mit Hilfe Hermite'scher Interpolationspolynome. Damit wird eine vollständige finite Übersetzung erreicht. Hierzu muß der Verschiebungszustand an der oberen Zeitgrenze variiert werden, was einen Randterm im Hamilton'schen Prinzip bewirkt. Die entstehenden algebraischen Gleichungssysteme sind entweder
   a. kubisch nichtlinear
   b. linear für eine weitere Unterteilung der Zeitspanne in

kleine Zeitelemente und eine Reihenentwicklung der Formänderungsenergie bis zu bilinearen Termen.

2. Es wird ein Runge-Kutta-Verfahren zur unmittelbaren Integration des nichtlinearen DGL-Systems der Lagrange'schen Gleichungen angewandt, besser jedoch das von FEHLBERG verbesserte Verfahren.

Anhand einer Reihe von Beispielen für ebene und sattelförmige Membrane mit Belastungszeiten bis 0,2 sec und Zeitschritten von 0,001 bis 0,0005 sec sowie verschiedener gewählter Vorspannungen wurden Ergebnisse vorgestellt und wesentliche Effekte der Vorspannung auf das stark nichtlineare Schwingungsverhalten diskutiert.

TEODOSIU, C.: <u>Combined atomistic and continuum analysis of the stress and strain fields around crystal defects</u>

The elastic displacements and stresses produced by straight dislocations in anisotropic elastic media are determined under consideration of arbitrary traction boundary conditions on the dislocation core and by employing a complex variable technique. The results are applied to improve the semi-discret method, by using overlapping regions of atomistic and continuum calculations for non-linear elasticity. A similar method may be used for calculating the stresses and stains produced by point defects.

THERMANN, K. u. BRUHNS, O.: <u>Stabilitätsprobleme elasto-plastischer Kontinua</u>

Aufbauend auf den Arbeiten von SHANLEY und HILL wird eine Theorie zur Bestimmung von Verzweigungspunkten elasto-plastisch deformierter Kontinua hergeleitet. Wesentliches Merkmal dieser Theorie ist dabei die Beschränkung auf Belastungsvorgänge. Unter Annahme eines homogenen Grundzustandes mit bekanntem Spannungsfeld ergeben sich lineare partielle Dgln. für ein mögliches Geschwindigkeitsfeld. Die Eindeutigkeit dieses Geschwindigkeitsfeldes wird untersucht.

Eine mögliche Lösung besteht stets in einem solchen Geschwindig-

keitsfeld, welches wiederum zu homogenen Deformationszuständen führt. Neben dieser trivialen Lösung existieren für "kritische" Werte des Spannungszustandes (Verzweigungslasten) auch Lösungen, die zu inhomogenen Deformationen führen.
Als Beispiel werden für einen geführten kreiszylindrischen Körper unter radialer Beanspruchung diese Verzweigungslasten ermittelt. Dabei zeigt sich, daß sowohl für Druck- als auch für Zugbeanspruchung Verzweigungslasten existieren.

ULITKO, A.F.: Die Methode der Eigenvektorfunktionen in der räumlichen Elastizitätstheorie

Im Vortrag wird die Lösung der räumlichen Aufgaben der Elastizitätstheorie aufgrund der Eigenvektorfunktionsmethode erörtert. Die Grundlage der Methode besteht in der Separation der vektoriellen Lameschen Gleichung nach einzelnen Variablen und in der Konstruktion der vollständigen Eigenvektorfunktionen auf der Oberfläche der elastischen Körper verschiedener geometrischer Formen. Nachdem die Eigenvektorfunktionen konstruiert und die Orthogonalitätsbedingungen festgestellt sind, wird die Lösung in der Reihenentwicklung nach diesen Eigenfunktionen gesucht. Die Methode wird an den Lösungen der Randwertaufgaben in verschiedenen Koordinatensystemen illustriert.

WEINITSCHKE, H.J.: Bemerkungen zur nichtlinearen Membrantheorie

Es wird das Problem der endlichen Deformation elastischer Membranen als Randwertproblem formuliert. Für genügend große Zugspannungen längs des Randes ist das Problem elliptisch. Wird eine Hauptspannung Null bzw. negativ, so wird das Problem gemischt parabolisch-elliptisch bzw. hyperbolisch-elliptisch. Nach einem Kriterium von STEIN-HEDGEPETH wird die Membran instabil, wenn die kleinere der beiden Hauptspannungen Null wird. Im speziellen Fall der gleichförmig belasteten Kreismembran, am Rand durch Zugspannung belastet, wird das Stabilitätsproblem als Eigenwertaufgabe formuliert und gelöst. Es ergibt sich Instabilität in guter Übereinstimmung mit dem STEIN-HEDGEPETH-Kriterium.

Auch im instabilen Bereich existieren jedoch symmetrische Lösungen (außer wenn der Rand auf Druck belastet wird); bei der Rechteckmembran bleibt die Frage offen, ob bei Instabilität, wenn identisch mit Nichtelliptizität, Lösungen existieren.

V. Mannl (Karlsruhe)