MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 4/1973

Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik

6.2. bis 9.2.1973

Die diesjährige Tagung über Methoden und Verfahren der mathematischen Physik stand wieder unter der Leitung von B.Brosowski (Göttingen) und E.Martensen (Karlsruhe). Obwohl die Tagung in die Vorlesungszeit fiel, fanden sich 34 Teilnehmer aus zahlreichen Instituten zusammen. Daraus und aus der Breite des Problemkreises, aus dem Vorträge gehalten wurden (Elastizitätstheorie, Strömungsphysik, spezielle Anfangswertprobleme der Physik, Kosmologie, Quantenaxiomatik), läßt sich auf wachsendes Interesse und Bedürfnis an einer solchen Tagung schließen.

Es wurde auch diesmal deutlich, wie eng verknüpft physikalische Probleme mit der angewandten Mathematik sind und von welcher Bedeutung eine intensive Zusammenarbeit von Physikern und Mathematikern ist.

Die diesmal kleine Zahl von 14 Vorträgen ließ Raum für eingehende Diskussionen und einen fruchtbaren Gedankenaustausch. Dem Institut und seinem Personal gebührt herzlicher Dank dafür, daß es den harmonischen Verlauf der Tagung ermöglichte.

<u>Teilnehmer</u>

R.Ansorge, Hamburg
W.Arend, Göttingen
B.Beekmann, Tübingen
G.Böhme, Darmstadt
B.Brosowski, Göttingen
N.Dähn, Tübingen
B.Dreseler, Bochum
J.Ehlers, München
K.Finck von Finckenstein, Garching
H.Grabmüller, Darmstadt
N.Grieb, Stuttgart
K.P.Hadeler, Tübingen
H.Kielhöfer, Bochum
K.Kirchgässner, Bochum
R.Kress, Göttingen
R.Leis, Bonn
E.Martensen, Karlsruhe
R.Meier-Spasche, Garching
E.Meister, Tübingen
Niethammer, Mannheim
A.Piskorek, Warschau
W.Schempp, Bochum
J.Schröder, Köln
B.Steffen, Göttingen
W.Törnig, Darmstadt
H.L. de Vries, Göttingen
H.J.Wacker, München
H.Walter, Darmstadt
Weck, Bonn
R.Wegmann, München
H.Weinitschke, Berlin
W.Wendland, Darmstadt
P.Werner, Stuttgart

Vortragsauszüge

B. BEEKMANN: Ein Darstellungssatz für Differentialformen auf hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und seine Anwendung auf Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

Es wird eine Formel zur Darstellung von Differentialformen auf einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit der Dimension 4 hergeleitet. Diese Formel ergibt sich als eine Beziehung zwischen den Hadamardschen endlichen Teilen gewisser divergenter Integrale aus der verallgemeinerten zweiten Greenschen Formel.

Insbesondere lassen sich damit Lösungen der (inhomogenen) Wellengleichung - die auf hyperbolischen Mannigfaltigkeiten einer Potentialgleichung entspricht - bei beliebiger Zeitabhängigkeit darstellen.

Als Anwendung werden Lösungen der Maxwellschen Gleichungen bei beliebiger Zeitabhängigkeit dargestellt. Im Sonderfall der zeitharmonischen Maxwellgleichungen erhält man durch Auswertung der Hadamardschen endlichen Teile bekannte Darstellungssätze für die Feldgrößen zurück.

G. BÖHME: Das Konzept von Primär- und Sekundärströmung bei der analytischen Berechnung der Bewegung nicht Newton'scher Fluide

In der Hydrodynamik nicht Newton'scher Fluide treten Phänomene auf, die man aufgrund der Erfahrung mit Newton'schen Fluiden nicht erwartet. Es wird über eine Näherungstheorie berichtet, die geeignet ist, den sog. Weissenberg-Effekt analytisch zu erfassen. Sie beruht auf der Annahme, daß die Bewegung als Überlagerung einer Primär- und einer Sekundärströmung aufgefaßt werden kann. Bei der Primärströmung handelt es sich um die schleichende Strömung eines Newton'schen Fluids, wobei die Fluidteilchen auf Kreisbahnen umlaufen. Die Sekundärströmung hat zwei Ursachen, nämlich das Feld der Trägheitskräfte sowie die das nicht Newton'sche Fluid charakterisierenden Zusatzspannungen. Die Theorie liefert insbesondere die Gestalt der freien Oberfläche eines Fluids im Spalt zwischen zwei rotierenden Zylindern.

R. BÖHME: Zur numerischen Behandlung nichtlinearer Eigenwertprobleme.

Ist H ein reeller Hilbertraum, sind F und G aus $C^{\infty}(H, \mathbb{R})$, so betrachten wir das nichtlineare Eigenwertproblem

(*) grad F(x) = λ grad G(x) in $H \times \mathbb{R}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gilt entweder

(a) $F(x) = (Ax,x) + F_k(x) + f(x)$, F_k homogen vom Grad $k \geq 3$,

$G(x) = (x,x) + g(x)$, f von höherer als k-ter, g von höherer als 2-ter Ordnung, oder

(b) $F(x) = (y_o,x) + (Ax,x) + F_k(x) + f(x)$

$G(x) = (x_o,x) + (x,x) + g(x)$

und ist μ isolierter Eigenwert von A mit endlicher Vielfachheit, $y_o = \mu x_o$ in (b), dann kann man alle Lösungen von (*) allein durch den Satz über implizite Funktionen konstruktiv bestimmen, falls F_k, eingeschränkt auf den Kern von $(A-\mu)$, in gewisser Weise nichtentartet ist.

G. DÄHN: Zur Anwendung geordneter Vektorräume in der Quantenaxiomatik

Ausgehend von einer Skizze des von NEUMANN'schen Modells der Quantenmechanik werden im Rahmen den LUDWIG'schen Axiomatik einige mathematische Probleme bei der Deduktion dieses Modells angeschnitten.

B. DRESELER und W. SCHEMPP: Kugelfunktionen und Saturation

An Hand zweier Beispiele aus der Potentialtheorie wird die Tragweite der gruppentheoretischen Untersuchung von Entwicklungen nach speziellen Funktionen der mathematischen Physik (Kugelfunktionen, Besselfunktionen) in der Approximationstheorie und insbesondere in der Saturationstheorie erläutert.

J. EHLERS: Geometrische Strukturen von Raumzeit-Mannigfaltigkeiten

Die geometrischen Strukturen, die in nichtrelativistischen und relativistischen Raumzeit-Theorien der Physik benutzt werden - insbesondere die Differentialtopologie, konforme Struktur, projektive Struktur, lin. Zusammenhang, Metrik, Zeitschichtung, Spinstruktur - werden im Zusammenhang mit ihren physikalischen Motivierungen besprochen, und es wird eine Axiomatik der Einsteinschen pseudoriemannschen Raumzeit skizziert. Dabei ergibt sich eine neue Kennzeichnung der Weylschen Geometrie und eine neue geometrische Charakterisierung des projektiven (Weylschen) Krümmungstensors.

Graf FINCK v. FINCKENSTEIN: Numerische Behandlung nichtlinearer Diffusionsgleichungen

Es wird die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \varphi(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq t \leq T$, mit Anfangs- und Randbedingungen numerisch behandelt: Durch $\varrho = r^2$, $\psi(u) = \int_{\varepsilon}^{u} \varphi(s)\,ds$ erhält obige Gleichung die Form: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\psi(u)\right)$. Zerlegt man $\psi(u)$ in ein Produkt: $\psi(u) = v(u) \cdot w(u)$ mit in u isotonen Faktoren v,w und approximiert man v(u) zum alten Zeitschritt sowie w(u) zum neuen Zeitschritt, dann folgt Konvergenz der numerischen Lösung gegen die exakte Lösung, falls man die Schrittweiten $\Delta\varrho$, Δt gegen Null gehen läßt, und falls man voraussetzt:

$$\Delta t / \Delta\varrho^2 \leq \frac{1}{8\,R^2 \max\limits_{c \leq x \leq C}\left(v'(x) \cdot w(x)\right)} .$$

c bzw. C bezeichnen dabei das Minimum bzw. das Maximum der auftretenden Anfangs- und Randwerte.

H. Grabmüller: Über die Lösbarkeit einer Integrodifferentialgleichung aus der Theorie der Wärmeleitung

Aufgrund der klassischen Thermodynamik irreversibler Prozesse ist es möglich, daß sich Temperaturstörungen in einem wärmeleitenden Medium mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten können. Man nennt diese Tatsache das Paradoxon der Wärmeleitungstheorie. Ihr Ursprung ist in dem empirisch gewonnenen Fourierschen Wärmeleitungsgesetz zu suchen. Für wärmeleitende Materialien mit schwindendem Gedächtnis haben Gurtin und Pipkin sowie Meixner eine lineare Theorie entwickelt, in der das Paradoxon aufgelöst wird. Anstelle der klassischen Fourierschen Wärmeleitungsgleichung wird für die gesuchte Temperatur $T(x,t)$ eine lineare Integrodifferentialgleichung

$$\dot{T}(x,t) = \int_0^\infty H(t-s)T(x,s)\,ds$$

mit einem Operatorkern $H(t-s)$ gesetzt. Unter Zurückführung auf eine Volterrasche Integralgleichung mit Operatorkern werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze bewiesen für ein verallgemeinertes Anfangsrandwertproblem mit Null-Dirichletbedingungen. In die Existenzsätze fließen bekannte Ergebnisse aus der Theorie elliptischer Differentialoperatoren ein. Zugrundegelegt werden ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ sowie ein kompaktes Zeitintervall.

H. GRIEB: Fourierentwicklungen für die Maxwellschen Gleichungen im Außenraum

Die Lösungsfelder E und H des Maxwellschen Anfangswertproblems im Ganzraum

$$\nabla \times E + \mu\frac{\partial}{\partial t} H = 0 \quad , \nabla \times H - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} E = 0 \quad (\varepsilon, \mu \text{ konstant})$$

$$E(x,0) = F(x) \quad , \quad H(x,0) = G(x)$$

ergeben sich auch als Lösungen von Anfangswertproblemen für die vektorielle Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} W - \Delta W = 0$. Diese kann man mit der klassischen Fourier-Transformation im R^3 lösen, da die ebenen Wellen ae^{-ixy} die Schwingungsgleichung $(\Delta + |y|^2 I)ae^{-ixy} = 0$ erfüllen. Beim Übergang zum Maxwellschen Rand- und Anfangswertproblem im Außenraum Ω einer total reflektierenden Fläche S (d.h. $n \times E = 0$) muß man die Kerne ae^{-ixy} der Transformation durch "verzerrte ebene Wellen" $w(x,y,a) = ae^{-ixy} + v(x,y,a)$ ersetzen, dabei werden die Korrekturterme v so gewählt, daß die Randbedingungen erfüllt werden und daß weiter in geeigneter Entfernung von S die Korrekturterme abklingen. Es läßt sich dann eine verallgemeinerte Fourier-Transformation angeben, und man kann über die Spektraltheorie unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren nachweisen, daß die Parsevalgleichung und die Umkehrformel gelten. Zusätzliche Schwierigkeiten ergeben sich dabei dadurch, daß das zeitunabhängige Maxwellsche Außenraumproblem den Eigenwert 0 hat.

H. KIELHÖFER: Existenz von Lösungen fastlinearer parabolischer Anfangswertprobleme in unbeschränkten Gebieten.

Gesucht ist eine Lösung des parabolischen Anfangswertproblems

(1) $u_t + Au = F(u)$, $u(o) = u_o$, $u(t) \in D(A)$,

wobei A ein linearer elliptischer und F ein nichtlinearer Differentialoperator einer um eins niedrigeren Ordnung ist. Das Problem wird als Evolutionsgleichung von $L_p(\Omega)$ ($\Omega \subset R^n$) formuliert und auf abstrakte Existenzsätze zurückgeführt. Die angewandte Methode benutzt die zuerst von Sobolevskii erdachte Substitution $u = A^{-\alpha}\omega$, $0 \leq \alpha < 1$, wodurch man die in der Nichtlinearität auftretenden Differentiationen abschätzen kann. Da Ω unbeschränkt sein kann, hat man die Kompaktheit von A^{-1} nicht mehr zur Verfügung und man muß daher die bei der Anwendung eines allgemeinen Fixpunktsatzes geforderte Vollstetigkeit des zu (1) gehörenden Integraloperators durch Eigenschaften von F allein beweisen. Es wird eine hinreichende Bedingung an $F(u) = f(u,D_1u,\ldots,D_{l-1}u)$ für die zeitlich lokale Lösbarkeit von (1) gegeben, die bei beliebigen (glatt berandeten) Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

K. Kirchgässner: Fixpunkte gestörter Potentialoperatoren und Anwendungen

Die Lösung gewisser nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme, so z. B. der Nachweis der Existenz von zellularen Lösungen beim Bénardschen Problem der Hydrodynamik, lassen sich auf die Lösung einer Gleichung der Form

$$(1) \quad u - T(u) - S(u,\lambda) = 0$$

in einem reellenHilbert-Raum für kleine Werte von $|\lambda|$ zurückführen. Dabei ist $T : H \longrightarrow H$ ein vollstetiger Potentialoperator und $T(\alpha u) = \alpha^k T(u)$ mit $k \geq 2$. Das zugehörige Funktional l wird gegeben durch $l(u) := (T(u),u)/(k+1)$
$S : H \times \mathbb{R} \longrightarrow H$ ist eine stetige Abbildung mit $S(u,0) = 0$ für alle $u \in H$. Es wird gezeigt, daß wenn l nicht konstant ist, (1) mindestens zwei nichttriviale Lösungen besitzt.

A. PISKOREK: <u>Über Anfangswertaufgabe für Differentialgleichungssystem der Thermoelastizitätstheorie</u>

Das Differentialgleichungssystem für die Bewegungen und thermischen Effekte eines elastischen Körpers der Dichte ϱ lautet in vektorieller Schreibweise folgendermaßen:

$$\varrho \partial_{tt} u - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \mu \Delta u + \gamma \operatorname{grad} \Theta = X$$

$$\Delta \Theta - \varkappa^{-1} \partial_t \Theta - \eta \partial_t \operatorname{div} u = - \varkappa^{-1} Q$$

worin Δ der LAPLACE'sche Operator ist:

$\lambda, \mu, \gamma, \eta, \varkappa$ die physikalische Konstanten sind;

Θ die Veränderung der Temperatur bedeutet;

ϑ die Dichte der Wärmequellen ist und

X die Massenkraft bedeutet.

Im quasi-stationären Fall reduziert sich die Anfangswertaufgabe für dieses Differentialgleichungssystem nach der Idee von L.Lichtenstein (vgl. Math. Zeitschr., Band 20 (1924), S. 21-28) auf eine einfache Anfangswertaufgabe für die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

M. SCHNEIDER: <u>Existenzaussagen für Differentialgleichungen vom gemischten Typ</u>

Die Beschreibung einer stationären, ebenen, isentropischen, wirbelfreien Strömung führt auf eine Differentialgleichung vom gemischten Typ (Tschaplyginsche Gleichung). Ausgehend von einer solchen Differentialgleichung vom gemischten Typ wurden Existenzaussagen mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden gewonnen; dies führt auf die Begriffe "smooth", "strong", "semi-strong", "weak", "generalized" solution. Mit Hilfe der a,b,c Methode wurde ein Verfahren angegeben zur Gewinnung von a-priori Abschätzungen, die die Existenz solcher Lösungen mit dem gewünschten Randverhalten weitgehend sichern. Die Existenz einer "weak" solution unter geringeren Voraussetzungen als in den Arbeiten von Morawetz (1958), Mihailov (1968) Nahusev (1972) angegeben, wurde gezeigt.

P.WERNER: Über das Verhalten elektromagnetischer Felder für kleine Frequenzen

Es sei (E_ω, H_ω) die Lösung des Außenraumproblems

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \times E_\omega - i\omega\mu H_\omega = 0 \\ \nabla \times H_\omega + i\omega\varepsilon E_\omega = J_\omega \end{array}\right\} \quad \text{in } G\,,$$

$$n \times E_\omega = 0 \qquad \text{auf } F\,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)E_\omega = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ für } r = |x| \longrightarrow \infty$$

(vollständige Reflexion eines durch die Stromdichtenverteilung J_ω erzeugten stationären elektromagnetischen Feldes). Es gelte $J_\omega \longrightarrow J_0$ und $\rho_\omega = (\nabla \cdot J_\omega)/i\omega \longrightarrow \rho_0$ für $\omega \to 0$. Es werden Methoden entwickelt, die es ermöglichen, das Grenzverhalten von (E_ω, H_ω) für $\omega \to 0$ auch für den Fall zu diskutieren, daß das topologische Geschlecht p der reflektierenden Fläche F von 0 verschieden ist. In bisherigen Veröffentlichungen wurde stets p=0 vorausgesetzt.

W. Arend (Göttingen)