MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 5 /1973

Spezielle Funktionen

11.2.1973 bis 17.2.1973

Die unter der Leitung der Herren C.Meyer (Köln) und F.W.Schäfke (Konstanz) stehende Fachtagung "Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie" fand auch in diesem Jahre wieder lebhaftes Interesse. Die nun schon zum fünften Male durchgeführte Tagung wurde von 45 Mathematikern besucht, von denen 7 aus dem Auslande kamen. Die 27 teils ausführlichen Vorträge - davon 13 aus dem Bereich der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und 14 aus dem der Zahlentheorie - gaben zu ausführlichen Diskussionen Anlaß.

Im einzelnen wurden aus dem Bereich der Zahlentheorie folgende Gebiete behandelt: Mehrklassigkeitsfragen bei quadratischen Zahlkörpern, Thetareihen und Eisenstein-Reihen, Computer-Anwendung bei Problemen der algebraischen Zahlentheorie.

In der mathematischen Physik wurde über folgende Themen referiert: Restgliedabschätzungen bei asymptotischen Entwicklungen, Entwicklungen nach hypergeometrischen Funktionen, Watson-Transformationen, Ausbau der Theorie der orthogonalen Polynome. Zudem gab es eine Reihe von Beiträgen zu den Grundlagen der speziellen Funktionen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Störungstheorie.

Schließlich wurde über die Anwendungsmöglichkeiten der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie in der theoretischen Physik berichtet.

Teilnehmer

Arscott, F.M. , Reading/GB
Baltes, H.P. , Berlin
Blankenagel, J. , Köln
Braaksma, B.L.J. , Groningen/NL
Bundschuh, P. , Freiburg
Dieter, U. , Karlsruhe
Draxl, P. , Bielefeld
Flor, P. , Köln
Forst, W. , Tübingen
Hahn, W. , Graz/A
Halbritter, U. , Köln
Happle, W. , Karlsruhe
Henn, W. , Karlsruhe
Kann, C.H. , Köln
Lang, H. , Köln
Lemei, H. , Delft/NL
Leopoldt, W.,Karlsruhe
Lorch, L. , Downsview/Kanada
Matzat, D.B.H. , Karlsruhe
Meixner, J. , Aachen
Mennicken, R. , Regensburg
Meyer, C. , Köln
Neckermann, L. , Würzburg
Neuhaus, W. , Cl.-Zellerfeld
Niemeyer, H. , Hamburg
Nießen, H.-D. , Essen
Petersson, H. , Münster
Pohst, M. , Köln
Rehm, H.P. , Karlsruhe
Sattler, A. , Köln
Schäfke, F.W. , Konstanz
Schertz, R. , Köln
Schmidt, D. , Konstanz
Schmidt, H. , Würzburg
Schneider, A. , Wuppertal
Schoeneberg, B. , Hamburg
Schönhage, A. , Tübingen
Sleeman, B.D. , Dundee/GB
de Snoo, H.S.V. , Groningen/NL
Stender, H.J. , Köln
Stöhr, A. , Berlin
Trinks, W. , Karlsruhe
Wagenführer, E. , Regensburg
Wolf, G. , Konstanz
Zimmer, H.G. , Karlsruhe

Vortragsauszüge

H.P. Baltes : **Die verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion als Korrelationsfunktion in der statistischen Mechanik endlicher Systeme**

Durch die Entdeckung des "long tail" der Geschwindkeits-Korrelationsfunktion [1] wurde das Interesse am Langzeitverhalten von lösbaren stochastischen Modellen und am Einfluß der Endlichkeit des Systems wieder belebt [2]. Ein exakt lösbares physikalisches System ist das der Photonen in einem Hohlraum der Temperatur T. Mit Hilfe der Resultate [3] für die Zustandsdichte lassen sich die Korrelationstensoren des elektromagnetischen Feldes ausrechnen. Z.B. ist die Autokorrelationsfunktion $\langle \vec{E}(0)\, \vec{E}(t) \rangle$ des elektrischen Feldes in einem würfelförmigen Hohlraum (Kantenlänge L) proportional zum Realteil von

$$\sum_{s=2}^{4} a_s (TL)^{s-4}\, \zeta(s,1+i\tau) + \mathcal{O}\left((TL)^{-3}\right) \quad , \quad \tau = \frac{kT}{\hbar}\, t$$

$a_s = \text{const}$, $\zeta(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+z)^{-s}$, wobei $s = 4$ dem unendlich großen System entspricht [4]. Es gilt im Grenzfall $\tau \to \infty$:

$$\tau^4 \,\mathrm{Re}\, \zeta(4,1+i\tau) ; \; \tau^2 \,\mathrm{Re}\, \zeta(3,1+i\tau) , \; - \tau^2 \,\mathrm{Re}\, \zeta(2,1+i\tau) \to -\frac{1}{2} \; ;$$

d.h. die Endlichkeit des Systems führt zu einer Verlangsamung des Abklingens der Korrelationsfunktion!

[1] B.J. Alder, T.E. Wainwright, Phys. Rev. A1 (1970) 18
[2] P. Mazur, Physica Norvegica 5 (1971) 291
[3] H.P. Baltes, Phys. Rev. A1 (1972) 2252
[4] C.L. Mehta, E. Wolf, Phys. Rev. 134 (1964) A1 143 .

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

P. Draxl : Zum Vortrag von H.P.Baltes auf der vergangenen Tagung

Ausgehend vom Spektrum der Wellengleichung im Würfel hat H.P.Baltes auf der vergangenen Tagung ein rein Zahlentheoretisches Problem aufgeworfen und einige Vermutungen formuliert. Letztere sollen bewiesen werden.

J.Meixner : Positive Funktionen und ihre Anwendungen

Aus der Gesamtheit der monotonen wachsenden Funktionen $\varphi(\omega)$ in $-\infty < \omega < \infty$ gewinnt man über die Fourier-Stieltjes-Transformation die positiv definiten Funktionen, welche beispielsweise als Korrelationsfunktionen bei stationären stochastischen Prozessen auftreten, und über die Darstellung

$$Y(p) = Ap + ia + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - ip\omega}{p - i\omega}\, d\varphi(\omega)\,, \quad A \geqq 0\,, \quad a \text{ reell}$$

die positiven Funktionen, welche in $\operatorname{Re} p > 0$ holomorph mit positivem Realteil sind. Solche Funktionen bestimmen den Funktionalzusammenhang linearer passiver Systeme $f(t) \rightarrow g(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Anwendungen der linearen passiven Systeme sind zahlreich. Als Beispiele werden genannt: 1. Elektrische Netzwerke, 2. Quantenmechanische kanonische Gesamtheiten, die durch einen zeitabhängigen Zusatz zum Hamilton-Operator gestört werden, 3. Elastisches und thermisches Verhalten von Elementen kontinuierlicher Materie und 4. von Systemen, die aus kontinuierlicher Materie aufgebaut sind.

1) H.König und J.Meixner, Math.Nachr. 19. 265 (1959)
2) R.Schwindt, Diss. Köln 1965
3) W.Hackenbroch, Diss. Univ. des Saarlandes 1967
4) J.Meixner, Z.Physik 219. 79 (1969), Archive Rat.Mech. Anal. 33. 33 (1969).

E.Wagenführer : Über Singularitäten bei Systemen linearer Differentialgleichungen

Vorgegeben sei die komplexe Matrix-Differentialgleichung

$$(1) \quad x^{s+1}Y'(x) = B(x)Y(x) \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{N}, > 0 ;$$

$$B(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}B_{\nu} \quad \text{holomorph für } |x| < R .$$

Gesucht sind Bedingungen für die Existenz sogenannter "regulärsingulärer" Lösungen von (1), der Gestalt

$$(2) \quad Y(x) = H(x)x^{J} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu}x^{\nu I+J} , \text{ d.h. } H \text{ holomorph}$$

für $|x| < R$.

Es werden nicht nur Fundamentallösungen (2) gesucht; es soll aber der maximale Rang einer Lösung (2) nach oben und unten abgeschätzt werden. Für eine Lösung (2) gelten die Matrizengleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}H_{\nu} = 0 && (\mu = 0,\dots,s-1) \\ &\sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}H_{\nu} - H_{\mu-s}(J+(\mu-s)I) = 0 && (\mu=s,s+1,\dots) . \end{aligned}$$

Da man J in Jordanscher Normalform annehmen darf, gelangt man zu entsprechenden Gleichungen für die Spalten der H_{ν} , für die ein Lösungsverfahren entwickelt wird. Darüber hinaus, liefert der Defekt einer λ - Matrix, die aus höchstens den ersten $n \cdot s$ Koeffizienten von $B(x)$ zusammengesetzt ist, ein Kriterium, wann genau eine regulär-singuläre Fundamentallösung existiert.

B.D. Sleeman : Singular Linear differential operators with many parameters

It is the purpose of this paper to make a study of the solutions of the following k-formally self-adjoint differential equations

$$\frac{-d^2 y_r}{dx_r^2} + \sum_{s=1}^{k} \left\{ p_{rs}(x_r)\lambda_s + q_r(x_r) \right\} y_r(x_r) = 0 , \qquad (*)$$

$$x_r \in [a_r, b_r), \ r = 1,\dots,k,$$

where $[a_r, b_r)$, $r = 1,2,\dots,k$, denote k semi-open intervals in which a_r is finite and b_r is arbitrary and the λ_s, $s = 1,2,\dots,k$, are spectral parameters.

The main theme of the paper is that of extending the Hermann Weyl limit-point, limit-circle theory to the multi-parameter case. That is we consider under which circumstances there exist, for each r, one or two solutions $y_r(x_r)$ of (*) which are square integrable in a suitably defined Hilbert space H_r. This is then generalised to consider the problem of investigating the possibility of the product $\prod_{r=1}^{k} y_r(x_r)$ of solutions of (*) being square integrable in H, the tensor product of the separate spaces H_r. The analyticity of the corresponding generalised Hermann Weyl coefficients $m_r(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $r = 1,\dots,k$, is also investigated. Some examples illustrating the theory are given and an alternative formulation of the problem is suggested.

A. Schönhage : Ein Störungssatz für Matrizen und seine Anwendung bei speziellen Funktionen

Wird $A = A^*$ mit Eigenwerten $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ hermitesch gestört zu $B = A + S = B^*$ mit Eigenwerten $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_n$, dann gilt $|\alpha_i - \beta_i| \leq |S|$, wobei $|S|$ die euklidische Abbildungsnorm bezeichnet.
Hier wird nun gezeigt, daß analog für beliebige S bzw. B mit $\mathrm{Re}\,\beta_1 \leq \mathrm{Re}\,\beta_2 \leq \cdots \leq \mathrm{Re}\,\beta_n$ noch $|\alpha_i - \beta_i| \leq c_n \cdot |S|$ gilt, wobei die optimalen c_n dieser Art mindestens wie $\sqrt{\lg n}$, höchstens wie $\lg n$ wachsen.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen lassen sich diese Abschätzungen so verschärfen, daß z.B. folgende Anwendung möglich wird:

Bezeichnet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda_2 \leq \ldots$) die Eigenwerte der unendlichen Matrix

$$(\alpha_k = 4k^2) \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 & \mu & & & 0 \\ \mu & \alpha_1 & \mu & & \\ & \mu & \alpha_2 & \mu & \\ & & \mu & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von μ, dann hat die "Diskriminante"

$$D(\mu) = \prod_{j<k} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_j}{\alpha_k - \alpha_j} \right)^2$$

(als ganze Funktion in μ)

höchstens die Wachstumsordnung 1 .

H.S.V. de Snoo : Einige Bemerkungen über Watson Transformationen

Watson Transformationen werden definiert als beschränkte lineare Abbildungen W im Raum $L^2(\mathbb{R}_+)$, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$: $WS_\alpha = \frac{1}{\alpha} S_{\frac{1}{\alpha}} W$ genügen. Hierbei bedeutet S_α : $(S_\alpha f)(x) = f(\alpha x)$, die Translation auf $\mathbb{R}_+$. Nun sind die "multipliers" im Raum $L^2(\mathbb{R})$ bekannt und damit können Watson Transformationen einfach charakterisiert werden. Man hat z.B. : für jede Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ existiert eine Funktion $k \in L^2(\mathbb{R}_+)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi\left(\frac{x}{t}\right) (Wf)(t) \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}_+} k(xt) f(t)\,dt \,, \qquad \text{f.ü.} \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Wenn W unitär ist hat man

$$\int_{\mathbb{R}_+} k(at)\overline{k(bt)}dt = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(at)\overline{\phi(bt)}dt, \qquad a,b \in \mathbb{R}_+ .$$

Mit einem beschränkten linearen Operator V im Raum $L^2(\mathbb{R}_+)$, der für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+ : VS_\alpha = S_\alpha V$ genügt, definiert man einen Teilraum L_V von $L^2(\mathbb{R}_+)$, nämlich der Wertebereich von V . Unter gewissen Voraussetzungen ist L_V ein Hilbertraum, die Einbettung von L_V in $L^2(\mathbb{R}_+)$ beschränkt und L_V invariant unter W. Damit erhält man ein Tripel $L_V \subset L^2(\mathbb{R}_+) \subset L_V'$, und W kann auf L_V' fortgesetzt werden. Durch diese elementaren Überlegungen gewinnt man Resultate, die sich leicht formulieren lassen, einfach beweisbar sind und die bekannte Resultate auf solche Weise verallgemeinern, daß alles auf L.K.A. Gruppen gültig bleibt.

H. Lemei : On a class of even order linear differential equations and the corresponding eigenfunction expansions in L_1

Consider the differential eq. $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} y - \{\lambda^{2n} + q(x)\} y = 0$, $-\infty < n < \infty$, $n = 2,3,\ldots,$ where $q(x)$ is a continuous function defined for all real values of n and $\int_{-\infty}^{\infty} |q(t)|dt < \infty$. The solutions $y_\pm(x,\lambda)$ are characterized by their asymptotic behaviour in $\pm\infty$ respectively.

$$\left.\begin{array}{l} y_\pm(x,\lambda)\exp(\pm\lambda x) \to 1 , \\ \{y_\pm(x,\lambda)\exp(\pm\lambda x)\}^{(j)} \to 0 , \ j = 1,\ldots,2n-1 \end{array}\right\} \text{ as } x \to \pm\infty \text{ and } |\arg\lambda| \leq \pi/2n$$

The following theorem is proved:

Let x_o be real. Let $q(x)$ be as above. Let $y_\pm(x,\lambda)$ be the solutions as above. Let $f(t)$, defined for all real t, be of bounded variation in a neighborhood of $t = x_o$ and $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$. Let $Y_\pm(x,\lambda)$ be the n-vector

$$\left(y_\pm(x,\lambda), y_\pm(x,\omega\lambda), \ldots, y_\pm(x,\omega^{n-1}\lambda)\right)^t$$

and

$$\Phi_\pm(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)Y_\pm(t,\lambda)dt \;,\; \omega = \exp\left(\frac{-\pi i}{n}\right) .$$

Let A be the $n \times n$ matrix with (g,h) element $[y_-(x,\omega^{h-1})y_+(x,\omega^{g-1}\lambda)]$, $[\varphi,\psi] = \varphi^{(2n-1)}\psi \ldots -\varphi\psi^{(2n-1)}$ is the bilinear concomitant of φ and ψ.

Let G be the part of the λ-plane where $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \leq \arg\lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Let C be a contour in G consisting of the ray with $\arg\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ from $\infty \exp i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$ to $\alpha \exp i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$, $\alpha > 0$, then a curve in G from $\alpha\exp\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) i$ to βi, $\beta > 0$, such that the non removable singularities of $Y_-^t(x_o,\lambda)\, A^{-1}(\lambda)Y_+(t,\lambda)$ on to the left of it, and the positive imaginary axis from βi to $i\infty$. Let $\mathcal{C}\!\int_{i\omega\mu}^{i\mu}$, $\mu > \max(\alpha,\beta)$, denote integration along the contour C from $i\omega\mu$ to $i\mu$. Then the following two formulas hold. (in matrix notation).

$$\lim_{\mu\to\infty} \mathcal{C}\!\int_{i\omega\mu}^{i\mu} 2n\lambda^{2n-1}\, Y_-^t(x_o,\lambda)\, A^{-1}(\lambda)\, \phi_+(\lambda)d\lambda = \pi i\, \{f(x_o-0)+ f(x_o+0)\} .$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \mathcal{C}\!\int_{i\omega\mu}^{i\mu} 2n\lambda^{2n-1}\, Y_+^t(x_o,\lambda)(A^{-1}(\lambda))^t\, \phi_-(\lambda)d\lambda = \pi i\, \{f(x_o-0)+ f(x_o+0)\} .$$

D.Schmidt : Zu den Reihenentwicklungen nach Hypergeometrischen Funktionen

Es wurde die (allgemeine) lineare Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + a(z) \right) y' + \frac{b(z)}{z(z-1)}\, y = 0$$

mit komplexen Zahlen γ und δ sowie auf dem Innengebiet $\mathcal{E}$ einer Ellipse mit den Brennpunkten 0 und 1 definierten holomorphen Funktionen a und b betrachtet. Gegenstand der Untersuchung war die Herleitung von Darstellungen für die Lösungen dieser Dgl, mit denen man deren analytisches Verhalten zugleich an den beiden (einfachen) Singularitäten 0 und 1 beherrscht. Es wurde gezeigt: Bezeichnet Ξ die Gesamtheit der charakteristischen Exponenten der Dgl auf $\mathcal{E} \setminus [0,1]$ und gilt hierfür $\nu \in \Xi \Rightarrow 2\nu + \gamma + \delta \notin \mathbb{Z}$, so läßt sich jede Lösung y der Dgl (mit eindeutig bestimmten Koeffizienten η_ν) in die auf $\mathcal{E} \setminus \{0,1\}$ lokal absolut gleichmäßig konvergente Reihe

$$y(z) = \sum_{\nu \in \Xi} \eta_\nu\, z^\nu\, F(\nu, 1-\gamma-\nu; 2-\gamma-\delta-2\nu; \tfrac{1}{z})$$

entwickeln.

U. Halbritter : Über eine Abschätzung des Fehlergliedes in der Stirlingschen Reihe

Bekanntlich gilt für das Fehlerglied $R_n(z)$ in der Stirlingschen Reihe:

$$R_n(z) = -(2n)! \int_0^\infty \frac{P_{2n+1}(u)}{(z+u)^{2n+1}}\, du \quad \text{mit} \quad P_{2n+1}(u) = (-1)^{n+1} 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu u}{(2\pi\nu)^{2n+1}}$$

Für $z = r\, e^{i\Theta}$, $r \geq 0$, $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\pi}{2}$, wurde die Abschätzung

$$(1) \qquad |R_n(z)| \leq M_1 \cdot \frac{B_{2n+2}}{\sqrt{2n+1}\,(2n+2)} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}} \quad ,$$

für $r \geq 0$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ die Abschätzung

$$(2) \quad |R_n(z)| \leq M_2 \frac{B_{2n+2}}{\sqrt{2n+1}\,(2n+2)} \quad \frac{1}{(\sin\theta)^{2n+1}} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}}$$

bewiesen, wobei für $i \in \{1,2\}$ $M_i \in \mathbb{R}, M_i$ unabhängig von n und z, ist. Zusammen mit der Abschätzung $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

$$(3) \quad |R_n(z)| \leq \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}}$$

(Lindelöf, Le Calcul des Résidues, Seite 99) folgt leicht für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

$$|R_n(z)| \leq M_3 \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \quad \frac{1}{\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n+1}} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}} \quad ,$$

wobei M_3 von n und z unabhängig ist.

Es wurde weiterhin nachgewiesen, daß die Ungleichung (1) in gewisser Weise optimal ist:

existiert keine Folge $(a(n,z))_{n \in \mathbb{N}}$, $a(n,z) \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$, $z = \sigma + i\tau, \sigma \geq \sigma_o \geq 0, \tau \geq 0$ mit $\lim\limits_{\min(n,|z|) \to \infty} a(n,z) = 0$,

sodaß mit einer von n und z unabhängigen Zahl M_3 für $z \in \{\omega : \omega = \sigma + i\tau, \sigma \geq \sigma_o, \tau \geq 0\}$ gilt:

$$|R_n(z)| \leq M_3 \frac{B_{2n+2}}{\sqrt{2n+1}\,(2n+2)} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}} \quad |a(n,z)| \ .$$

L. Neckermann : <u>Zur Abschätzung des Restes $R_n(x)$ der asymptotischen Darstellung der konfluenten hypergeometrischen Funktion $\psi(a,c,x)$ im Komplexen.</u>

Für asymptotische Entwicklungen spezieller Funktionen im Komplexen gibt es in der Literatur nur vereinzelt (numerisch brauchbare) Restabschätzungen, wie auch F.W. Olver [2] auf einem Kongreß festgestellt hat, wo er solche Fehlerabschätzungen für die Besselschen Funktionen hergeleitet hat. E.Hille [1] hat mit Hilfe einer Integrodifferentialgleichung eine Restabschätzung für $R_n(x)$ ($x \to \infty$ in $|\arc x| \leq \frac{\pi}{2}$; $a,c \in \mathbb{C}$) angegeben.

Hier wird auf einem verhältnismäßig einfachen Weg eine Abschätzung von $R_n(x)$ für $x \to \infty$ in $|\arc x| \leq \frac{3\pi}{2}$ bei beliebigen Parametern $a,c \in \mathbb{C}$ angegeben. Die Methode ist verwandt mit der von Whittaker-Watson [3] zur Gewinnung der asymptotischen Entwicklung, wo aber keine numerischen Schranken angegeben werden. Wie dort wird zur Restabschätzung eine Integraldarstellung des Restglieds der binomischen Reihenentwicklung herangezogen, aber unter Beibehaltung der Laplacedarstellung für die zu untersuchende Funktion, was sich als vorteilhaft für die Abschätzung erweist.

<u>Literatur:</u>

[1] E.Hille: Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison Wesley, London 1969, S.346 ff.

[2] F.W.Olver in C.H.Wilcox (Ed.): Asymptotic Solutions of Differential Equations and their Applications, John Wiley Inc., New York, 1964, S.163-183.

[3] E.T.Whittaker - G.N.Watson: A Course of Modern Analysis, 4.Ed., Cambridge 1952, S.342 ff.

W.Neuhaus : <u>Restgliedentwicklungen asymptotischer Potenzreihen spezieller Funktionen und ihre Fehlerschranken</u>

Bei der Stieltjesschen Weiterentwicklung des Restgliedes asymptotischer Potenzreihen und den Aireyschen Konvergenzfaktoren

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu} + g(x)\left(\sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{\beta_\mu(N,x)}{x^\mu} + \rho_M(N,x)\right)$$

ist $\rho_M(N,x)$ im allgemeinen nicht kleiner als das nächste vernachlässigte Glied $g(x)\,\frac{\beta_M(N,x)}{x^m}$. Im Vortrag wurde für das Exponentialintegral $E_1(z)$ und die modifizierte Besselfunktion K_o durch verallgemeinerte Abelsche Asymptotik eine Weiterentwicklung hergeleitet, die für reelle $z = x$ diese Eigenschaft hat und eine weitere Approximationsverbesserung um ca. 2 Dezimalstellen aufweist:

$$e^{-z}E_1(z) = \int_o^\infty e^{-zt}\,\frac{1}{1+t}dt = \sum_{\nu=o}^{N-1} (-1)^\nu \frac{\nu!}{z^{\nu+1}} + \frac{(-1)^N N!}{z^{N+1}} \; *$$

$$* \left(\sum_{\mu=o}^{M-1} \frac{a_\mu(N,z)}{z^{[\frac{\mu+1}{2}]}} + 2\,\theta\,\frac{N!}{x^{\frac{M+1}{2}}}\,a_M(N,\mathrm{Re}\ z)\right)$$

mit $a_o = \frac{1}{2}$; $a_1 = -\frac{1}{4}(N+1-z);\ldots;\ 0 \leq \theta \leq 1$, M gerade, $|z| > 0$,

$$e^{z}K_o(z) = \int_o^\infty \frac{e^{-2zt}}{t^{1/2}(1+t)^{1/2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{\nu=o}^{N-1} \frac{(0,\nu)}{(2z)^\nu} + \right.$$

$$\left. + (-1)^N \frac{\Gamma(N+1/2)}{(2z)^{N+1/2}} \left(\frac{2z}{\pi^3}\right)^{1/2} \left(\sum_{\mu=o}^{M-1} \frac{b_\mu(N)\,c_\mu(N,2z)}{(2z)^{[\frac{\mu+1}{2}]}} + 2\,\theta' b_M(N)\,\frac{c_M(N,2x)}{(2x)^{\frac{M+1}{2}}}\right)\right]$$

mit $b_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^N\,(2+y^2)^{\mu+1}}$; $0 \leq \theta' \leq 1$, M gerade, $|z| > 0$,

$c_o - 1$; $c_1 = -(N + 1/2 - 2z)$.

Durch eine heuristische Minimumbetrachtung wurde das günstigste N in Abhängigkeit von M für $E_1(z)$ zu $N = \left[x - \frac{M}{3}\right]$ ermittelt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Lee Lorch : Higher monotonicity properties of certain Sturm-Liouville functions

A Sturm-Liouville function is a nontrivial solution of the Sturm-Liouville differential equation $y'' + f(x)y = 0$ or, more generally, of $(gy')' + f(x)y = 0$, $g(x) > 0$. A function $h(x)$ is said to be monotonic of order N if its even derivatives are positive, its odd derivatives negative, up to order N. A similar definition holds for sequences, with differences replacing derivatives. If $N = \infty$, then the function (sequence) is said to be completely monotonic, a concept of importance in the moment problem, Hausdorff summability theory and elsewhere.

Typical of the problems considered here is the isolating of simple sufficient conditions of a higher monotonicity character on f and g which imply higher monotonicity of such quantities as

$$M_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} W(x)\,|y(x)|^{\lambda} dx, \lambda > -1 ,$$

where x_k is the k-th zero of $y(x)$, and $W(x)$ is of higher monotonic type.

References can be found in a paper of Lee Lorch, M. E. Muldoon, Peter Szego, Higher monotonicity properties of certain Sturm-Liouville functions, IV, Canadian J.Math., 24, 1972, pp.349-368.

F.W.Schäfke - G.Wolf (Vortragender) : Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome

Mit den Intervallen $\dot{\imath}$ und Gewichtsfunktionen w der drei klassischen Orthogonalpolynomarten und mit Polynomen $v_{\nu\mu}$ werden positiv-definite symmetrische Skalarprodukte (für Polynome)

$$(p,q) := \sum_{(\nu,\mu)\in N_0^2} \int_{\dot{\imath}} w(x)v_{\nu\mu}(x)p^{(\nu)}(x)q^{(\mu)}(x)dx$$

betrachtet. Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome ergeben sich nun zu solchen Skalarprodukten, für die man in bestimmter naturgemäßer Weise symmetrische Polynomoperatoren erhält, die bei jedem Polynom eine Graderhöhung um 1 (oder bei geradem Skalarprodukt um 2) bewirken.

Dies liefert genau acht verschiedenartige Polynomklassen. Für sie wird eine einheitliche umfassende Theorie entwickelt. Danach läßt sich eine natürliche Normierung so wählen, daß die Differenz aufeinanderfolgender Orthogonalpolynome proportional zu normierten klassischen Orthogonalpolynomen ist. Die zugehörigen Konstanten genügen einer dreigliedrigen Rekursion. Die Polynome lassen sich weiter durch zwei aufeinanderfolgende klassische Orthogonalpolynome ausdrükken, wobei wieder der gleiche Koeffizientensatz auftritt. Für diese Konstanten lassen sich überdies auch explizite Formeln gewinnen. Schließlich lassen sich hinreichende Bedingungen dafür gewinnen, daß die Polynome sämtliche Nullstellen einfach in $\mathcal{N}$ haben. Dabei werden bestimmte lineare Abbildungen von $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{R}$ verwendet, die durch die Daten des Skalarproduktes als prinzipiell gegeben anzusehen sind.

F.M.Arscott : <u>Orthogonal Polynomials in two variables</u>

There is no general theory of orthogonal polynomials in two variables which satisfactorily generalises that for one variable. A useful theory may, however, be developed for a special class known as bipolynomials. A bipolynomial $p(x,\xi)$ of degree n is a function which, when either of x,ξ is held constant becomes a polynomial of degree n in the other. Let R be a region of the x,ξ plane and w a suitable weight function: then the orthogonality condition

$$\iint_R p_n(x,\xi)\, p_{n'}(x,\xi)\, w(x,\xi)\, dx\, d\xi = 0, \quad n \neq n'$$

leads to a sequence $\{p_n(x,\xi)\}$ of symmetric bipolynomials, each p_n being a linear manifold of degree $n + 1$ spanned by determinate bipolynomials π_n^m , $m = 0$ to n . From this follow properties similar to those of "ordinary" orthogonal polynomials.

Finally, we construct some families of special interest, in which p_n is spanned by $n + 1$ separable bipolynomials, i.e. in the form $q(x)\, q(\xi)$, the q being polynomials solutions of certain second order linear differential equations.

H. PETERSSON: Einfache Thetareihen zu großen Untergruppen der Modulgruppe

Die Funktion
$$\vartheta_0(\tau,6) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \pi i(6m+1)^2 \frac{\tau}{12}$$

erweist sich zunächst als Modulform der Gruppe $\Gamma_0[24]$.
(Für $n \in \mathbb{N}$ bedeutet $\Gamma_0[n]$ die Untergruppe von $SL(2,\mathbb{Z})$ der $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \mod n$).
An den Entwicklungen in Vertretern der 8 Spitzenklassen mod $\Gamma_0[24]$ erkennt man, daß $\vartheta_0(\tau,6)$ bereits eine Modulform der Gruppe $\Gamma_0[6]$ ist. Diese Gruppe ist als Invarianzgruppe von $\vartheta_0(\tau,6)$ in $SL(2,\mathbb{R})$ maximal. Man schließt aus den Ordnungen von $\vartheta_0(\tau,6)$ in den Spitzen und aus dem bekannten Wert der Ordnungensumme von $\vartheta_0(\tau,6)$, daß $\vartheta_0(\tau,6)$ in der oberen Halbebene und in der Spitze 0 nicht verschwindet.
Die Funktionen $\eta(l\tau)$ $(l=1,2,3,6)$ stellen sämtlich Modulformen der $\Gamma_0[6]$ mit bekannten Divisoren dar; sie liefern die Produktdarstellung
$$\vartheta_0(\tau,6) = \eta^{-1}(\tau)\ \eta(2\tau)\ \eta^2(3\tau)\ \eta^{-1}(6\tau)$$
und damit einen expliziten Ausdruck für die Multiplikatoren von $\vartheta_0(\tau,6)$.
Als zahlentheoretische Anwendungen der Funktion $\vartheta_0(\tau,6)$ ergeben sich Sätze über die Anzahlen der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von h Quadraten ganzer Zahlen $\equiv 1 \mod 6$.

B.SCHOENEBERG: Lage der Nullstellen der Eisenstein-Reihen

Elementare Begründung der Theorie der Funktionen und Formen zur vollen Modulgruppe. Weg zu einer Vermutung über die Lage der Nullstellen der Eisenstein-Reihen. Beweis dieser Vermutung nach Rankin und Swinnerton-Dyer.

C.MEYER: Mehrklassigkeitsfragen bei reell-quadratischen Zahlkörpern

Sei $K = Q(\sqrt{D})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper, dessen Diskriminante den quadratfreien Kern $D > 0$ besitzt. Schreibt man eindeutig $D = n^2 + r$ mit $-n < r \leq n$, so ist für $r \nmid 4n$ K ein

Körper vom sog. Degertschen Typ. Hierfür läßt sich die Grundeinheit ε_0 explizit angeben. Von H.-U. Nordhoff stammen neue (unendliche) Klassen reell-quadratischer Zahlkörper vom Nicht-Degertschen Typ, deren Grundeinheit explizit angebbar ist.
Bei Kenntnis der normpositiven Grundeinheit ε_0^+ von K lassen sich dann in folgender Weise Mehrklassigkeitsaussagen machen. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in K mit der $\mathbb{Z}$-Basis $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$. Dann ist die aus der regulären Darstellung $\varepsilon_0^+\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ resultierende Matrix $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ eine unimodulare hyperbolische Matrix mit $\det M = N(\varepsilon_0^+) = +1$. Die $\mathfrak{a}$ zugeordnete rationalwertige Bildung

$$\Psi_1^{\varepsilon_0^+}(\mathfrak{a}) := \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{a}) \left(- \frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a,c)\right)$$

ist nun eine Invariante der engeren Idealklassen von K; dabei ist $\delta(\mathfrak{a}) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_1^\tau\\ \alpha_2 & \alpha_2^\tau\end{vmatrix}$ (τ = nichtident. Automorphismus von K) und $s(a,c)$ ist die (a,c) zugeordnete Dedekindsche Summe. Demzufolge ist $A(\mathfrak{a}) = |\Psi_1^{\varepsilon_0^+}(\mathfrak{a})|$ eine rationalwertige Invariante der weiteren Idealklassen von K.
Durch Invariantenvergleich für geeignete Ideale ($1, \mathfrak{p}/2, \mathfrak{q}/3$) läßt sich dann aus der expliziten Kenntnis von ε_0^+ und damit von M bzw. von $s(a,c)$ u.U. auf die Mehrklassigkeit von K schließen.

R.SCHERTZ: <u>Die Klassenzahl der Teilkörper von Ringklassenkörpern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern</u>

Sei Σ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$. Dann kann man, ausgehend von der Kroneckerschen Grenzformel, die Klassenzahlen der Teilkörper von Ringklassenkörpern über Σ untersuchen. So erhält man:

<u>Satz 1:</u> K/Σ unverzweigt und $(D,6) = 1 \implies 2^{[K:\Sigma]-1} \frac{h_K}{h_\Sigma} \in \mathbb{N}$.

<u>Satz 2:</u> Sei $D < -3$; $f = p$ Primzahl mit $p+1 \equiv \pm 3\ (9)$, $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ oder $f = 9$ und $\left(\frac{D}{3}\right) = -1$. f_0 sei eine zu f prime natürliche Zahl, so daß 1) es einen kubischen Zahlkörper der Diskriminante $D(f_0 f)^2$ gibt, 2) für jeden echten Teiler f_0' von f_0 kein kubischer Zahlkörper der Diskriminante $D(f_0' f)^2$ existiert. m sei die Anzahl der durch 3 teilbaren Invarianten von $\mathfrak{R}_{f_0}$, der Ringidealklassengruppe mod f_0 von Σ. Dann gilt:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für alle einfach reellen kubischen}\\ \text{Zahlkörper K der Diskriminante}\\ D(f_0 f)^2 \text{ gilt } 3^{m+1} / h_K\end{array}\right) \implies 3^{m+1} \mid [\mathfrak{R}_{f_0} : 1].$$

Satz 3: Sei K_2 ein reell-quadratischer, K_3 ein einfach reeller kubischer Zahlkörper und $K = K_2K_3$. Dann gilt mit einer Zahl $m \in \mathbb{N}$, die sich als Einheitenindex deuten läßt: $h_K = \frac{2}{3} m\, h_{K_2} h_{K_3}$.

H.LANG: Über verallgemeinerte Bernoullische Zahlen und die Klassenzahl reell-quadratischer Zahlkörper

Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante $d > 0$. Dann gilt für den Wert der Zetafunktion einer Idealklasse $\mathfrak{K}$ an der geraden Stelle 2k

$$\zeta(2k,\mathfrak{K}) = \frac{(2\pi)^{2k}\sqrt{d}}{4(4k)!\,d^{2k}}\, B(2k,\mathfrak{K})$$

mit einer rationalen Zahl $B(2k,\mathfrak{K})$. Es zeigt sich, daß man aus der genaueren Kenntnis der arithmetischen Struktur dieser rationalen Zahl zu Aussagen über die Klassenzahl h von Ω gelangen kann. Es wurde eine Kongruenz bewiesen, die die Klassenzahl h mit verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen in Beziehung setzt.

P.BUNDSCHUH: Verteilungseigenschaften der Fibonacci-Folge

Sei $\mathfrak{A} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$, sei $m \geq 2$ und $0 \leq j < m$; $A_{\mathfrak{A}}(N,j,m)$ sei die Anzahl der a_n mit $n \leq N$, die $\equiv j \bmod m$ sind.
Def.(Niven 1961): $\mathfrak{A}$ heißt gleichverteilt mod m, wenn für jedes der j $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_{\mathfrak{A}}(N,j,m)$ existiert und $= \frac{1}{m}$ ist.

1972 haben Kuipers und Shiue gezeigt: Die Folge $\{L_n\}$, $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ $(n \geq 3)$ der Lucas-Zahlen ist für kein $m \geq 2$ gleichverteilt mod m. Hier wird die analoge Frage für die Fibonacci-Folge $\{F_n\}$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ untersucht und gezeigt der
Satz: Sei $m \geq 2$. $\{F_n\}$ ist mod m gleichverteilt $\Longleftrightarrow$ $m = 5^k$.

Die Beweismethode ist völlig elementar und liefert Ergebnisse auch für andere Folgen, die mehrgliedrigen linearen Rekursionen genügen.

M.POHST: Computer-Anwendung bei zwei Problemen der algebraischen Zahlentheorie

1) Bei der Bestimmung der Minimaldiskriminante eines total reellen algebraischen Zahlkörpers 6. Grades hat man u.a. nicht galoissche kubische Erweiterungen K von $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bzw. $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

zu studieren. Hierzu betrachtet man den im Normalkörper N zu K enthaltenen Körper L 4. Grades. Es gilt die Diskriminantenformel $\vartheta_{K/\Omega} = \vartheta_{L/\Omega}\mathfrak{f}^2$, wobei $\mathfrak{f}$ den Führer derjenigen Kongruenzidealgruppe vom Index 3 in L bezeichnet, zu der N Klassenkörper ist. Für $\mathfrak{f} = (1)$ wurden mit dem Computer für 152 fragliche Körper L unabhängige Einheitensysteme und Klassenzahlen berechnet.
2) Bei der Aufstellung aller Klassen im Geschlecht eines total positiven Gitters L über einem algebraischen Zahlkörper nach der Methode der Gitternachbarn von M. Kneser kann man bei Kenntnis des Maßes des Geschlechts abkürzend verfahren, indem man zunächst für jeden neuen Vertreter mit dem Computer dessen Automorphismenanzahl ermittelt und mit der Maßformel nachprüft, ob das Vertretersystem bereits vollständig ist.

W.TRINKS: Behandlung von Problemen der algebraischen Zahlentheorie mit Hilfe des Computers

Es wurden Verfahren beschrieben, mit denen gewisse Grundaufgaben in der Theorie der Zahlkörper mit dem Computer gelöst werden können, wenn man Grad und Diskriminante des Körpers nicht zu groß wählt. Insbesondere: Bestimmung der Galoisgruppe des Zerfällungskörpers eines rationalen Polynoms, Prüfung der Isomorphie zweier durch je ein erzeugendes Polynom definierter Körper, Bestimmung von Einheiten- und Klassengruppe eines Zahlkörpers.

W.HENN: Automorphismengruppe und Weierstraßpunkte von Funktionenkörpern einer Variablen

Sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen vom Geschlechte g über seinem genauen Konstantenkörper Ω mit char $\Omega = p > 0$. Zur Vereinfachung sei Ω algebraisch abgeschlossen. Es wurde gezeigt, daß für die Automorphismengruppe $\mathfrak{g} = \mathrm{Aut}\,(K/\Omega)$ $|\mathfrak{g}| < 16\,g^4$ gilt mit der einzigen Ausnahme, daß K der unitäre Fermatkörper vom Exponenten n ist, d.h. $K = \Omega(x,y)$, $x^n + y^n + 1 = 0$, $n = q+1$, $q = p^s$. Hier gilt $\mathfrak{g} = \mathrm{PGU}\,(3,q^2)$, die Ordnung ist etwas größer als $16\,g^4$.
Ferner wurden einige neuere Ergebnisse über Weierstraßpunkte berichtet: Für einige Körperserien mit 'großer' Automorphismengruppe wurden sämtliche Weierstraßpunkte angegeben. Anzahl und Fehlerzahlverteilung von Weierstraßpunkten und das Verhalten bei Konstantenreduktion wurden untersucht.

W.HAPPLE: Gruppentheoretische Behandlung der Relationen zwischen Relativnormabbildungen in endlichen galoisschen Körpererweiterungen

Die Relationen zwischen den Relativnormfunktionen wurden definiert. Geeignete Relationen liefern eine Beschränkung des Klassengruppenexponenten eines Zahlkörpers K, der über k galoissch ist, durch die Klassengruppenexponenten von Zwischenkörpern L. Bei der systematischen Untersuchung der Normrelationen erhält man eine ziemlich kuriose Liste von Gruppen, für die es keine Normrelationen gibt, die den Klassengruppenexponenten von K beschränken. Für andere Gruppenklassen zeigt sich, daß schon 'kleine' Zwischenkörper auf K zu schließen gestatten. Ferner kann zu gegebener Galoisgruppe eine Liste aller 'interessanten' Normrelationen algorithmisch bestimmt werden.

H.MATZAT: Über die Nullklassengruppe der Fermatschen Funktionenkörper

Sei Ω ein Zahlkörper. Ein Funktionenkörper $F^n(\Omega) := \Omega(x,y)$, $x^n+y^n+1=0$, heiße Fermatkörper vom Exponenten n über Ω. Enthält Ω eine primitive n-te Einheitswurzel ζ, so erzeugen $\varrho = ((x,y) \to (\zeta x,y))$ und $\omega = ((x,y) \to (x,\zeta y))$ eine Untergruppe von Aut (F^n/Ω) vom Typ $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Die Fixkörper $L_k^n(\Omega)$ der Automorphismen n-ten Grades von $\langle\varrho,\omega\rangle$ mögen primäre Teilkörper heißen. Diese Definition ist auch für $\zeta \notin \Omega$ sinnvoll.
Die Anzahl der Erzeugenden der Nullklassengruppe $A(K(\Omega))$ eines Funktionenkörpers K/Ω modulo der Torsion heiße Rang $r(K(\Omega))$.

Satz 1: $\varphi(t) := t\prod_{p|t}\frac{p-1}{p}$, $\quad \psi(t) := t\prod_{p|t}\frac{p+1}{p} \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{t\,t'=n}\ \sum_{i=1}^{\varphi(t')} r(F^t(\Omega)) = \sum_{k=1}^{\psi(n)} r(L_k^n(\Omega)).$$

Ist $n = l$ Primzahl, so sind die L_k^l vom Geschlecht $g > 0$ gegeben durch $L_k^l(\Omega) := \Omega(u,v)$, $v^l = u^k(1-u)$ für $1 \leq k \leq l-2$.

Satz 2: Ist e der l-Rang der Klassengruppe des l-ten Kreiskörpers $\mathbb{Q}^{(l)}$, so folgt $r(L_k^l(\mathbb{Q}^{(l)})) \leq \{[\frac{l-5}{4}] + 2e\}\,(l-1)$.

Satz 3: Ist $e \leq [\frac{l+1}{8}]$, so liegen auf der Fermatkurve $x^l+y^l+1=0$ nur endlich viele rationale Punkte.

H.P.REHM: Allgemeine Dedekindsche Modulsysteme

Geordnete Halbgruppen, in denen die Operationen $(a,b) \to a/b := \max\{c, cb \leqq a\}$, $(a,b) \to \max\{c, bc \leqq a\} =: b\backslash a$ definiert sind (reticulated semigroups) werden bei Gültigkeit des 'Axioms' $(a/a)x \geqq x$ und $x \leqq x(a\backslash a)$ als 'abstraktes Dedekindsches Modulsystem' bezeichnet. Beispiele: (i) Klassische Theorie (auch gebrochener) Ideale in hyperkomplexen Systemen.(ii) Sämtliche Untergruppen der Additivgruppe eines beliebigen Ringes mit 1 bei der aus (i) bekannten Multiplikation.(iii) Die Halbgruppe sämtlicher Relationen auf einer Menge etc. Es lassen sich wesentliche Züge der Theorie (i) in diesem abstrakten Rahmen auffinden, insbesondere die Brandtgrupoide invertierbarer Moduln zu Systemen von Ordnungen (die in Zahlkörpern mit den gewöhnlichen Idealgruppen zusammenfallen).

G. Wolf (Konstanz)
H.-J. Stender (Köln)