MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6/1973

Funktionentheorie

18.2. bis 24.2.1973

Die Funktionentheorietagung, in deren Mittelpunkt Funktionen einer Veränderlichen stehen, fand in diesem Jahr vom 18. bis 24.Februar im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Die Leitung hatten H.Wittich (Karlsruhe), D.Gaier (Giessen) und F.Huckemann (Berlin) übernommen. Der Tagung wohnten 41 Teilnehmer, darunter 10 aus dem Ausland, bei.

Die diesjährige Tagung hatte den Charakter einer Arbeitstagung. Im Mittelpunkt standen drei Vortragsserien (jeweils 5 mal 1 Stunde), die insbesondere jüngeren Mathematikern Überblick über spezielle Forschungsgebiete geben sollten. Für diese Vortragsserien hatten sich dankenswerterweise zur Verfügung gestellt
D.Gaier: Räume analytischer Funktionen
Ch.Pommerenke: Randverhalten analytischer Funktionen
K.Strebel: Quadratische Differentiale.

Neben den Vortragsserien wurden noch 10 Kurzvorträge von 30 - 45 Minuten Dauer gehalten. Die Ergebnisse über die berichtet wurde, betrafen hauptsächlich die Themenkreise schlichte Funktionen, Riemannsche Flächen, Differentialgleichungen im Komplexen.

Teilnehmer

J.Becker, Berlin
C.Constantinescu, Lausanne
K.Doppel, Wien
Eckert, Berlin
G.Ehrig, Berlin
H.Epheser, Hannover
G.Frank, Dortmund
F.Gackstatter, Berlin
D.Gaier, Giessen
K.Habetha, Dortmund
H.Herold, Würzburg
H.Hornich, Wien
F.Huckemann, Berlin
K.H.Indlekofer, Frankfurt

G.Jensen, Berlin
O.Knab, Karlsruhe
H.Köditz, Würzburg
E.Kühn, Dortmund
H.Kuhn, Karlsruhe
E.Lowien, Berlin
W.Meyer-König, Stuttgart
Mogk, Giessen
E.Mues, Karlsruhe
R.Nevanlinna, Helsinki
J.Nikolaus, Bonn
A.Pfluger, Zürich
Ch.Pommerenke, Berlin
H.Reimann, Bern
M.von Renteln, Giessen
E.Röding, Berlin
S.Ruscheweyh, Bonn
Russell, Toronto
T.Sheil-Small, Bonn
A.Sontag, Zürich
K.Strebel, Zürich
H.Tietz, Hannover
S.Timmann, Hannover
J.Winkler, Berlin
H.Wittich, Karlsruhe
D.Wrase, Karlsruhe
H.Ziegler, Würzburg

Vortragsauszüge

D.GAIER: Räume analytischer Funktionen

In einer Serie von fünf Vorträgen wurden drei markante Themen aus dem oben genannten Problemkreis behandelt:

I: Ring-Isomorphismen und konforme Abbildung;
II: Der Maximalitätssatz von Wermer;
III: Der Ring aller ganzen Funktionen.

In I handelt es sich um den Satz von Bers, wonach zwei Gebiete G, G^* in $\mathbb{C}$ genau dann konform äquivalent sind, wenn die Ringe A, A^* der in G, G^* analytischen Funktionen einen Isomorphismus Φ mit $\Phi(i) = i$ gestatten. Dies gelingt durch Betrachtung der maximalen Hauptideale der Ringe. Der Fall $G = G^* = \mathbb{C}$ wird besonders hervorgehoben.
Der Satz von Wermer wird als Approximationssatz gedeutet. Die Beweise von Lumer und Cohen werden im einzelnen vorgeführt.
Als Beispiel für das Studium eines Funktionenrings wird die

Struktur des Ringes aller ganzen Funktionen untersucht. Teilbarkeit, endlich erzeugte Ideale, feste und freie Ideale, maximale Ideale, Primideale sind die Themen, mit denen sich der Vortrag III beschäftigt. Insbesondere wird gezeigt, daß es nicht-maximale Primideale gibt.

CH.POMMERENKE: Randeigenschaften analytischer Funktionen

Das Ziel war die Darstellung der wichtigsten Ergebnisse über das Randverhalten meromorpher Funktionen in $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$. Etwa die Hälfte der Sätze wurde bewiesen, die übrigen nur angegeben.

I.Problemkreis: Winkelgrenzwerte fast überall

1. Beschränkte analytische Funktionen: Satz von Fatou über die Existenz von Winkelgrenzwerten fast überall auf ∂D (mit Beweisandeutung). Einige funktionalanalytische Eigenschaften.

2. Funktionen beschränkter Charakteristik: Darstellung, insbesondere als Quotient beschränkter Funktionen. Eindeutigkeitssatz von Riesz (mit Beweis). Existenz von Winkelgrenzwerten fast überall.

3. Hardy-Klassen: Einige funktionentheoretische und funktionalanalytische Eigenschaften. Satz von Riesz über die konforme Abbildung von Gebieten mit rektifizierbarem Rand (mit Beweis).

4. Satz von Plessner: Für jede meromorphe Funktion in D sind fast alle Punkte von D Plessner-Punkte (d.h. in jedem Winkelraum wird jeder Wert approximiert) oder es existiert ein endlicher Winkelgrenzwert (mit Beweis).
Folgerung: Eindeutigkeitssatz von Privalov.

II.Problemkreis: Häufungsmengen und asymptotische Werte

1. Häufungsmengen

2. Bagemihl ambiguous point theorem: Für jede komplexwertige Funktion existieren nur abzählbar viele Punkte auf ∂D, für welche Häufungsmengen längs verschiedener Kurven

disjunkt sein können. Beweis unter Benutzung des topologischen Satzes von Moore-Jensen über verallgemeinerte Trioden (mit Beweis).

3. Mengen 1.Kategorie. Collingwood maximality theorem. Radialverhalten analytischer Funktionen auf Mengen 1.Kategorie.

4. Randhäufungsmengen: Satz von Iversen (mit Beweis). Satz von Gross und Iversen.

5. Existenz asymptotischer Werte: Asymptotische Werte und Koebe-Bögen. Satz von Collingwood-Cartwright über den Zusammenhang zwischen Werteannahme und asymptotischen Werten (mit Beweis).

6. Normale Funktionen: Definition und Beispiele. Bloch-Funktionen und deren Zusammenhang mit der Bloch-Konstante und auch schlichten Funktionen. Lehto-Virtanen Maximumprinzip für normale Funktionen. Koebe-Bögen für normale Funktionen. Satz von Lehto-Virtanen über die Identität von asymptotischen Werten und Winkelgrenzwerten normaler Funktionen (mit Beweis). Existenz von asymptotischen Werten auf überabzählbar dichter Menge.

K.STREBEL: Quadratische Differentiale

1) Definition einer Riemannschen Fläche, einer berandeten Riemannschen Fläche, des Spiegel-Bildes und der Verdoppelung einer berandeten Riemannschen Fläche.
Definition eines meromorphen quadratischen Differentials ϕ auf einer Riemannschen Fläche. Trajektorien: Integralkurven der Linienelemente $\phi(z)dz^2 > 0$. Einführung der inversen Funktion Φ^{-1}, wo $\Phi(z) = \int \sqrt{\phi(z)}\, dz$. Anwendung derselben zur Ermittlung der Trajektorienstruktur. Geschlossene Trajektorien.

2. Lokales Studium der Trajektorienstruktur in der Umgebung der regulären und der kritischen Stellen von ϕ. Lokales Verhalten der Metrik $|\phi(z)|^{1/2}|dz|$.

3) Für kompakte Flächen: Globales Verhalten der Trajektorien, insbesondere der "Spiralen". Die Häufungsmenge eines Spiral-Strahls.

4) Die Metrik $|\phi(z)|^{1/2}|dz|$ im Grossen: Teichmüllersche Winkelrelation, Eindeutigkeitssatz für die geodätische Verbindung zweier Punkte bei holomorphem ϕ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Trajektorienbogen sind die kürzesten Verbindungen zwischen ihren Endpunkten, geschlossene Trajektorien die kürzesten geschlossenen Kurven in ihren Homotopieklassen.

5) Anwendungen von quadratischen Differentialen auf
   A) Teichmüllersche Abbildungen
   B) Charakterisierung der komplexen Dilatation extremaler quasikonformer Abbildungen im Einheitskreis
   C) Ringgebiete auf kompakten, punktierten Flächen, Extremalmetrik.

K.DOPPEL: Eine spezielle Klasse von schlichten Funktionen

Mit einer von Van d. Waerden gegebenen stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen, die nirgends differenzierbar ist, wird eine Klasse von im offenen Einheitskreis schlichten Funktionen, deren Argument der 1. Ableitung beschränkt ist, konstruiert. Diese Funktionenklasse steht im engen Zusammenhang mit einer Vermutung über eventuell isoliert liegende schlichte Funktionen in dem von H.Hornich definierten Banachraum B; überdies gilt für jede dieser Funktionen:

$$\lim_{r\to 1} \int_{\alpha}^{\beta} |f'(re^{i\vartheta})|r\, d\vartheta = \infty$$

für jedes reelle α, β mit $\alpha < \beta$.

G.EHRIG: Die Bieberbachsche Vermutung für eingeschränkte zweite Koeffizienten

Sei $S = \{f \mid f$ analytisch und eineindeutig in $D = \{z \mid |z| < 1\}$ mit der Normierung $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\}$.

Unter der Einschränkung des zweiten Koeffizienten bewies Aharonov, daß für $f \in S$ mit $|a_2| < 1.05$ gilt: $|a_n| < n$ $\forall\, n = 3,4,\ldots$.

In dem Vortrag wird gezeigt, daß dieses Ergebnis unter Benutzung der Ungleichung von Fitz Gerald erweitert werden kann. Es gilt der

Satz: Sei $f \in S$ und $n \geq 7$. Dann gibt es Konstanten K_n so, daß gilt: $|a_n| < n$ für $|a_2| \leq K_n$ und $\lim_{n\to\infty} K_n = 1.5879$.

Die Konstanten K_n werden explizit angegeben. Zum Beispiel gilt $|a_n| < n$ in dem Fall

$n = 7$ für $|a_2| \leq K_7 = 0.9547$

$n = 10$ für $|a_2| \leq K_{10} = 1.110$

$n \to \infty$ für $|a_2| \leq 1.5879$.

H.HEROLD: Vergleichssätze bei linearen Differentialgleichungen im Komplexen

Es werden Sätze angegeben, die es gestatten, die Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit komplexwertigen Koeffizienten mit den Lösungen linearer Differentialgleichungen mit reellwertigen Koeffizienten zu vergleichen, z.B.: Seien $p_j(z)$ $(j = 1,\ldots,n)$, $f(z)$ holomorph in $|z| < R$, $P_j(r)$, $F(r)$ stetig für $r \in [0,R)$, $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq F(r)$.

Ist $w(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$w^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} p_j(z) w^{(n-j)} = f(z),$$

$W(r)$ eine Lösung von

$$W^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} P_j(r) W^{(n-j)} = F(r)$$

mit

$$|w^{(k)}(0)| \leq W^{(k)}(0) \quad (k = 0,\ldots,n-1),$$

so gilt mit $|z| = r$ für $r \in [0,R)$

$$|w^{(k)}(z)| \leq W^{(k)}(r) \ .$$

H.HORNICH: Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen

B sei die Menge der in $G(|z| < 1)$ analytischen Funktionen, die im Kleinen schlicht sind ($f'(z) \neq 0$ in G) mit der Normierung $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, für die $\sup|\arg f'(z)| < \infty$. B sei ein linearer Raum mit der Addition ($f,g \in B$)

$$\int_0^z f'(\zeta)g'(\zeta)d\zeta = [f,g](z)$$

und der Multiplikation mit reellen Zahlen α

$$\int_0^z [f'(\zeta)]^\alpha d\zeta = \alpha \times f(z), \text{ wobei } [f'(0)]^\alpha = 1 \text{ sei.}$$

Führen wir die Norm $\|f\| = \sup\limits_{z\in G}|\arg f'(z)|$ und die Metrik

$$\|[f,(-1)\times g]\| = \sup_{z_1,z_2\in G} |\arg f'(z_1) - \arg f'(z_2) - \arg g'(z_1) + \arg g'(z_2)|$$

ein, so ist B ein Banachraum. Speziell werden die Zusammenhangsverhältnisse in der Menge S der schlichten Funktionen $\in$ B untersucht und mehrere offene Fragen behandelt.

H.KÖDITZ: Über die Häufigkeit "fortsetzbarer" meromorpher Funktionen auf abstrakten Riemannschen Flächen

Für eine offene Riemannsche Fläche F versehen wir den Körper M(F) der auf F meromorphen Funktionen mit der Topologie der lokal gleichmäßigen chordalen Konvergenz.

$M(F)$ wird so zum BAIRE'schen Raum.
Eine Überlagerungsfläche (F,f) heißt fortsetzbar zu einer Überlagerungsfläche (G,g) $(f \in M(F),\ g \in M(G))$, wenn eine konforme, injektive, jedoch nicht surjektive Abbildung $\varphi: F \to G$ mit $f = g\,|_{\varphi(F)} \circ \varphi$ existiert. Es wird gezeigt:

<u>Satz:</u> $\mathfrak{M}(F) := \{f \in M(F) \mid (F,f)$ ist nicht fortsetzbar$\}$ ist in $M(F)$ eine Residualmenge.

E.LOWIEN: <u>Ein Extremalproblem für den 3-fach punktierten Einheitskreis</u>

Für drei gegebene Punkte a,b,c des Einheitskreises E wird unter den Gebieten $G \subset E - \{a,b,c\}$, deren Komplement bez. E zusammenhängend ist, dasjenige Gebiet G_o gesucht, für das der Modul seinen größten Wert annimmt.
Es wird gezeigt, daß $E - (G_o \cup \{a,b,c\})$ aus den von n_o ausgehenden Trajektorien des quadratischen Differentials $\sigma_{n_o} = Q_{n_o}(z)dz^2$ besteht, wobei $Q_n(z)$ für $n \in E$ eine rationale Funktion von z ist. Der eindeutig bestimmte Punkt n_o erweist sich als Schnittpunkt der Lösungen zweier Differentialgleichungen.

J.NIKOLAUS: <u>Subnormale Lösungen linearer Differentialgleichungen</u>

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\text{(D)}\quad w^{(n)} + L_o(z) + L_1(z)e^{q_1(z)} + \ldots + L_k(z)e^{q_k(z)} = 0$$

mit $L_j(z) = a_{n-1,j}(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_{o,j}(z)w$, wobei die $a_{i,j}(z)$ und die $q_j(z)$ Polynome sind. Hat dann (D) Lösungen endlicher Wachstumsordnung λ, so ist λ rational und läßt sich aus einem Diagramm folgender Ausdrücke bestimmen:
$w^{(n)}+L_o,\ L_1,\ldots,L_k$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Der Beweis dieser Behauptung wird hier angedeutet. Er verwendet Ergebnisse der Zentralindexmethode von Wiman-Valiron. Die Anwendung dieses Satzes an folgenden Beispielen ergibt: Die Differentialgleichung $w'' + \sin(z^2)\, w' + (\cos z) w = 0$ hat keine Lösungen endlicher Ordnung. Wenn die Differentialgleichung $w'' + (\sin z)^2\, w' + (\cos z)\, w = 0$ Lösungen endlicher Ordnung hat, dann sind diese Ordnungen gleich 1.

E.RÖDING: <u>Konforme Abbildung endlicher Riemannscher Flächen auf kanonische Überlagerungsflächen der Zahlenkugel</u>

Die endliche Riemannsche Fläche $\overline{R}(g,r,s)$ vom Geschlecht g mit $r \geq 1$ Randlinien und $s \geq 0$ punktförmigen Randkomponenten kann man als Überlagerungsfläche der Zahlenkugel konkretisieren derart, daß für die Blattzahlen über $\overline{\mathbb{C}} - \{|w| = 1\}$

α) $m \leq g + \frac{r+s}{2}$ gilt, falls $r + s$ gerade

β) $m \leq g + \frac{r+s-1}{2}$ gilt, falls $r+s$ ungerade und $2g+5 \leq r+s$,

und die Bilder des Randes von $\overline{R}$ bei dieser Konkretisierung über der Einheitskreislinie gelegene Schlitze sind. Um die Beweismethode zu erläutern, wurde der Satz für $g = 0$, r beliebig, $s = 0$ bewiesen.

S.RUSCHEWEYH: <u>Über die Vermutung von Polya und Schönberg</u>

Seien K, S^*, C die Familien der in der üblichen Weise normierten schlichten Funktionen, die den Einheitskreis auf konvexe, sternförmige bzw. fast-konvexe Gebiete abbilden. Für je zwei im Einheitskreis holomorphe Funktionen

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

sei

$$(f*g)(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z^k$$

die Faltung von f und g.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Polya und Schönberg (1958) vermuteten, daß die Faltung von je zwei Funktionen aus K wieder in K liegt. Ein Beweis dieser Vermutung wurde in diesem Vortrag skizziert. Außerdem wurden weitere Ergebnisse in dieser Richtung angekündigt: 1) Die Faltung je einer Funktion aus K und C liegt in C. 2) Die Faltung von je zwei ungeraden Funktionen aus S^* liegt in S^*. 3) Seien $g,h \in K$ und φ subordiniert zu g, so ist $\varphi * h$ subordiniert zu $g * h$. (Das letztere beweist eine Verallgemeinerung einer Vermutung von Wilf (1961)). Eine Anwendung dieser Resultate, die alle in Zusammenarbeit mit T.Sheil-Small (University of York) entstanden sind, betrifft den Wertebereich gewisser stetiger Funktionale auf C.

H.J.W.ZIEGLER: Deformation und Wertverteilung holomorpher Kurven

Es wird eine geometrische Erweiterung der Nevanlinnaschen Theorie erläutert, welche von der Erweiterung durch Weyl und Ahlfors sehr verschieden ist.

E.Mues (Karlsruhe)